CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE DISEÑO DE REDES

Notaciones para la formulación del CNDP:

E: el conjunto de conexiones en la red

W: el conjunto de pares origen-destino (OD) (puede haber varios orígenes y varios destinos)

$T = (T_w)_{w\in W}$ es un vector

T_w: la demanda de flujo en el par $w \in W$ (es un dato)

R_w: el conjunto de rutas dentro del par w

$h = (h_{pw})_{p\in R_w, w\in W}$ es un vector

h_{pw}: el flujo en la ruta p del par w (es una variable)

$x = (x_a)_{a\in E}$ es un vector

x_a: el flujo en la conexión a (es una variable)

$y = (y_a)_{a\in E}$ es un vector

y_a: el incremento de capacidad en la conexión a (es una variable)

$u = (u_a)_{a\in E}$ es un vector

u_a: la cota superior para el incremento de capacidad en la conexión a (es un dato)

θ_a: el factor de conversión de costo de inversión (para incremento de capacidad) a flujo (p.e. tiempo de viaje) en la conexión a (es un dato)

$c(x, y) = (c_a(x_a, y_a))_{a\in E}$ es un vector

$c_a(x_a, y_a)$: la función de costo unitario del flujo (para el sistema) a través de la conexión a

$G(y) = (G_a(y_a))_{a\in E}$ es un vector

$G_a(y_a)$: la función de costo de inversión en la conexión a

$\bar{c}(x, y) = (\bar{c}_a(x_a, y_a))_{a\in E}$ es un vector

$\bar{c}_a(x_a, y_a)$: la función de costo del flujo (para los usuarios) a través de la conexión a

$$\delta_{ap}^{w} = \begin{cases} 1 \text{ si la ruta } p \text{ en el par } w \text{ usa la conexión } a \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

El modelo del CNDP en términos de la Programación Binivel puede formularse como sigue:

$$\begin{array}{ll} \text{min}_y & F(x,y) := \sum_{a\in E} \left(c_a(x_a, y_a)x_a + \theta_a G_a(y_a)\right) \\ \text{s.a.} & 0 \le y_a \le u_a, \ \text{para todo } a \in E \end{array} \tag{3.1}$$

donde x es el flujo óptimo definido por el siguiente problema de minimización:

$$\begin{array}{ll} \text{min}_x & z = \sum_{a \in E} \bar{c}_a(x_a, y_a) \\ \text{s.a.} & \sum_{p \in R_w} h_{pw} = T_w, \text{ para todo } w \in W \\ & \sum_{w \in W} \sum_{p \in R_w} h_{pw} \delta_{ap}^w - x_a = 0, \text{ para todo } a \in E \\ & h_{pw} \geq 0, \text{ para todos } p \in R_w, w \in W \end{array} \tag{3.2}$$

Para $F(x, y)$ y z utilizaremos la formulación de [19] (ver también [38]):
$c_a(x_a, y_a) = A_a + B_a \left(\frac{x_a}{K_a + y_a}\right)^4$,
$G_a(y_a) = y_a$,
$\bar{c}_a(x_a, y_a) = \int_0^{x_a} \left(A_a + B_a \left(\frac{w}{K_a + y_a}\right)^4\right) dw$, donde A_a, B_a y K_a son constantes positivas asociadas a a las conexiones $a \in E$.

En la literatura se aprecian distintas consideraciones y discusiones sobre la linealidad o no linealidad de F. Por ejemplo, basados en la formulación de [43] del CNDP como un programa lineal L. LeBlanc y D. Boyce [36] propusieron una formulación mediante Programación Lineal Binivel (PLB).

La formulación requiere una suposición de funciones de inversión lineales. Sin embargo, Steenbrink [56, p. 184 and p. 219] plantea que las inversiones en las conexiones iniciales son generalmente altas, mientras que las adiciones a la capacidad son comparativamente bajas. Para la construcción de hasta cuatro carriles en cada dirección, que es lo más común en los Estados Unidos, él sugiere funciones de costos cóncavas para todos los tipos de carreteras. Para tratar con funciones cóncavas en [8] se propone su aproximación lineal por pedazos. Pero en [8] no se presenta ningún algoritmo de PLB para resolver el problema.

La función $\bar{c}_a(x_a, y_a)$ después de calcular la integral queda como $\bar{c}_a(x_a, y_a) = A_a x_a + \frac{B_a x_a^5}{5(K_a + y_a)^4}$. Tenemos que $\frac{\partial c_a}{\partial x_a} = A_a + \frac{B_a x_a^4}{(K_a + y_a)^4}$ que es positiva para todo $x_a \geq 0$. Además $\frac{\partial^2 c_a}{\partial x_a^2} = \frac{4 B_a x_a^3}{(K_a + y_a)^4}$ que también es positiva para todo $x_a > 0$. Así resulta que para y_a fijo, $\bar{c}_a(x_a, y_a)$ es estrictamente convexa y estrictamente creciente con respecto a x_a. Luego, la función objetivo z del problema de nivel inferior (3.2) es convexa en x y ya que las restricciones de (3.2) son lineales tenemos que el problema de nivel inferior es un problema no lineal convexo (con solución única) fácil de resolver con cualquier programa de programación no lineal disponible.