CAPÍTULO 2

GENERALIDADES Y DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

2.1 Antecedentes

El problema de programación binivel (PPBN) es un problema de optimización que como restricción incluye otro problema de optimización. Se divide en dos problemas, un nivel superior (también llamado "líder") y un nivel inferior (también llamado "seguidor"). Cada nivel debe tomar una decisión que será determinante para todo el problema. El decisor del nivel inferior tiene que optimizar su objetivo bajo parámetros dados por el decisor del nivel superior, quien a su vez, con información completa de las posibles reacciones del nivel inferior, selecciona los parámetros para optimizar su propio objetivo. Nótese que el decisor del nivel superior se limita a influir, más que a controlar, el resultado del nivel inferior.

La formulación general del PPBN es como sigue:

$$
\begin{array}{ll}
\text{mín}_y & F(x,y) \\
\text{s. a.} & \\
& G(x,y) \leq 0 \\
& H(x,y) = 0 \\
& \text{mín}_x \, f(x,y) \\
& \text{s. a.} \\
& \qquad\qquad g(x,y) \leq 0 \\
& \qquad\qquad h(x,y) = 0 \\
& x \in X \subset \mathbb{R}^{n_1}, y \in Y \subset \mathbb{R}^{n_2}
\end{array}
\tag{2.1}
$$

donde $f, F : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mapsto \mathbb{R}$, $g = [g_1, \ldots, g_J] : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mapsto \mathbb{R}^J$, $G = [G_1, \ldots, G_{J'}] : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mapsto \mathbb{R}^{J'}$, $H = [H_1, \ldots, H_{I'}] : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \mapsto \mathbb{R}^{I'}$.

Existen varias definiciones relacionadas con la solución del PPBN enlistadas a continuación:

- El conjunto factible relajado

$$\Omega = \{(x,y) : G(x,y) \leq 0, H(x,y) = 0, g(x,y) \leq 0, h(x,y) = 0\}$$

- para cada x, el conjunto factible del nivel inferior

$$\Omega(x) = \{y : y \in Y, h(x,y) = 0, g(x,y) \leq 0\}$$

- para cada x, el conjunto de reacción para el nivel inferior (región factible del seguidor)

$$M(x) = \{y : y \in argmin\{f(x,y) : y \in \Omega(x)\}\}$$

- para cada x, y cualquier valor de y en $M(x)$, el valor óptimo de nivel inferior

$$v(x) = f(x,y)$$

- la región inducida

$$IR = \{(x,y) : (x,y) \in \Omega, y \in M(x)\}$$

El modelo PPBN se reporta que aparece por primera vez en un artículo de J. Bracken y J. T. McGill [12], dedicado a la asignación de recursos y armamento para optimizar la ofensiva y la defensiva simultáneamente. Sin embargo, se dice que W. Candler y N. Norton [14] son los primeros en usar el término "binivel" o "multinivel" al describir un problema de política de desarrollo, pero fue hasta principios de los ochenta cuando este problema empezó a recibir mayor atención. Motivados por la teoría de juego de Stackelberg [51, 55], varios autores estudiaron intensivamente la programación binivel y contribuyeron a su proliferación en las asociaciones de programación matemática. Tal es el caso de W.Bialas y M. Karwan [11] que presentan una estructura general matemática del PPBN, así como un algoritmo de solución con el método del punto extremo adyacente. Por otro lado, J. Bard y J. Falk [5] estudian la programación multinivel en el juego de suma no nula y proponen un algoritmo de ramificación y acotamiento. De la misma manera, W. Candler et al [13] describen la programación multinivel aplicada a politícas de agricultura. En este mismo sentido W. Candler y R. Townsley [15] plantean el juego de Stackelberg como un ejemplo del PPBN. De una manera más general J. Fortuny-Amat y B. McCarl [24] exponen una formulación para problemas jerárquicos con procesos de decisiones en etapas.

2.2 Propiedades del problema de programación binivel (PPBN)

2.2.1 Condiciones de optimalidad

Se han estudiado diferentes condiciones de optimalidad para el PPBN, uno de los primeros en analizar estas condiciones fue J. Bard [3] usando una equivalencia con una programación matemática de un nivel teniendo un conjunto de restricciones infinitas y paramétricas. No obstante, un contraejemplo a las condiciones anteriores se presenta por P. Clarke y A. Westerberg [20] y por A. Haurie et al [30]. Por lo anterior, los algoritmos basados en estas condiciones no son convergentes (véase G. Savard [48]).

En la búsqueda de condiciones de optimalidad necesarias y suficientes, algunos autores exploran la relación entre el PPBN y una función asociada de penalización exacta (véase Z. Bi y P. Calamai [10]). De modo similar, autores como Y. Chen y M. Florian [18] y S. Dempe [21, 22] aplicaron un análisis no suavizado.

A diferencia de gran parte de los análisis de optimalidad que han sido desarrollados para programas matemáticos de un nivel, en el caso de programación multinivel hasta la fecha han ignorado la geometría especial del PPBN. Tomando en cuenta lo anterior, G. Savard y J. Gauvin [49] proponen condiciones necesarias de optimalidad basadas en el método del gradiente descendente. De la misma forma L. Vicente y P. Calamai [53], formulan condiciones de optimalidad necesarias y suficiente basadas en la geometría del PPBN.

2.2.2 Complejidad

La complejidad de solucionar el PPBN se ha estudiado ampliamente en diversos trabajos, uno de ellos es el de R. Jeroslow [31], demostrando que el PPBN lineal es *NP-Hard*. Después, estos resultados son confirmados por J.Bard [4] y O. Ben-Ayed y C. Blair [7]. Investigaciones recientes de L. Vicente et al [54] demuestran que la búsqueda de optimalidad local de un PPBN lineal es un problema también *NP-Hard*.

$\boxed{2.3}$ Planteamiento del problema

La investigación de los PPBN está motivada por aplicaciones del mundo real. Existen muchos ejemplos interesantes que envuelven un proceso de toma de decisiones jerárquica, tal es el caso de problemas de transporte (véase P. Marcotte [38] , L. Leblanc y D. Boyce [36] y S. - W. Chiou [19]), administración (véase J. Bard [2], Cassidy et al [16] y T. Miller et al [42]), planeación (véase W. Candler et al [13], A. Haurie et al [29]), ingeniería de diseño (véase P. Neittaanmäki y A. Stachurski [44], M. Kocvara y J. Outrata [32, 33]), por mencionar algunos.

Como anteriormente se mencionó, una de las aplicaciones del PPBN son los problemas de transporte, dentro de ellos se encuentra el problema de diseño de redes (NDP por sus siglas en inglés).

El NDP se puede clasificar en dos tipos. El primer tipo es el problema de diseño de redes discreto (DNDP por sus siglas en inglés) que determina un conjunto óptimo de ubicaciones para añadir nuevas conexiones (*links*) a la red. El segundo tipo es el problema de diseño de redes continuo (CNDP por sus siglas en inglés) que determina las ampliaciones de capacidad óptimas para las conexiones presentes en la red. La medida de rendimiento del sistema puede ser definida como la suma de tiempos totales de viaje y el costo de inversión de la expansión del *link*. La versión del modelo lineal con una sola función objetivo puede verse en M. S. Bazaraa [6, p. 638]. Sin embargo, es más realista considerar que ambos tipos de NDP se proponen minimizar los costos totales del sistema teniendo en cuenta el comportamiento de los usuarios al seleccionar sus conexiones en la red, para sus desplazamientos o flujos por esas conexiones. Esto es, el usuario también quiere minimizar sus costos o tiempos de desplazamientos por las conexiones. Este enfoque es el que conduce a modelos de la programación binivel. Diferentes tratamientos con modelos binivel pueden verse, por ejemplo, en (véase S-W. Chiou [19], L. Leblanc y D. Boyce [36], Q. Meng y H. Yang [41], E. Morlok [43], O. Ben-Ayed et al [8] y P. Steenbrink [56]). En esta tesis nos ocuparemos de problemas del tipo CNDP.

El CNDP es uno de los problemas mas difíciles de resolver computacionalmente hablando (véase H. Yang y M. G. H. Bell [58]). M. Abdulaal y L. Leblanc [1] fueron los primeros en presentar el algoritmo de Hooke-Jeeves que resuelve este tipo de problemas, además de probarlo con instancias de mediano tamaño. Asimismo, S. B. Gershwin y H. N. Tan [26] formularon el CNDP como un problema de optimización restringido en el que el conjunto restringido fue expresado en términos de flujos en las rutas, probando este método en redes pequeñas. También P. Markotte y G. Marquis [39] analizaron heurísticos para el CNDP con base en la propuesta de sistemas óptimos y obtuvieron buenos resultados numéricos. No obstante, estos heurísticos no han sido probados en redes de gran tamaño.

Otro método de solución propuesto por C. Suwansirikul et al [52] plantean una heurítica simple llamada *Equilibrium Decomposed Optmization* (EDO) y prueban este heurístico en varios ejemplos de redes. La eficiencia computacional del EDO resulta de la descomposición del CNDP en un conjunto interactivo de problemas de optimización en donde en cada iteración solo se necesita calcular el equilibrio de un usuario al actualizar las mejoras de los *links* de la red. Otros métodos de solución para el CNDP como el de T. L. Friesz et al [25] usan los resultados del análisis de sensibilidad para el flujo equilibrado en la red. Además, Y. Chen y M. Florian[17] definen la función de valor óptimo del problema de equilibrio del nivel inferior transformando el programa binivel del CNDP en un problema de optimización de un nivel continuo y diferenciable.

Debido a que la programación binivel para el CNDP es no convexa y no diferenciable varios autores tales como Z. Q. Luo et al [37], P. Marcotte y D. L. Zhu [40], K. Shimizu et al [50], y J. Outrata et al [47], obtienen las condiciones de optimalidad y algunos métodos de solución para el PPBN donde se utiliza el enfoque de no suavizado. Mas tarde J. Falk y J. Liu [23] investigan el análisis teórico para el PPBN no lineal y desarrollan un algoritmo descendente en términos del método *bundle* para solucionar el PPBN no lineal en donde el gradiente de la función objetivo puede ser obtenido cuando esta disponible la información del subgradiente de nivel inferior. El CNDP planteado como un PPBN es estudiado por diversos autores, H. Yang [57] y S. - W. Chiou [19] proponen una formulación para este problema y también algoritmos de solución basados en métodos de gradiente.

El CNDP, se usa frecuentemente en muchos ámbitos, por ejemplo un gobierno que quiere mejorar sus vías de comunicación, ya sean carreteras, vías férreas, etc. Lo anterior nos lleva a que el gobierno debe invertir en mejorar las conexiones dentro de esta red. La decisión de escoger la conexión a mejorar es crucial, ya que viene ligada a las decisiones de los usuarios. Es por eso que una formulación Binivel es una forma en la que se abarca estos dos niveles de decisión.

Como se mencionó anteriormente el PPBN pertenece a la clase NP-Hard, lo que hace improbable la existencia de un algoritmo exacto de solución para este problema, así que es de gran importancia la búsqueda de nuevas técnicas de solución para el CNDP, ya que de esta manera se puede tener soluciones más cercanas al óptimo, teniendo en cuenta el costo computacional que esto implica. Es decir, la búsqueda de una nueva técnica de solución que sea más eficiente, para tener soluciones de mejor calidad en un menor tiempo para instancias de diferentes tamaños.