CAPÍTULO 3
REVISIÓN DE LA TEORÍA DE WAVELETS

En este capítulo se presenta la teoría de wavelets iniciando con la perspectiva histórica de las wavelets, en la cual se define a la teoría de Fourier como las bases de la teoría wavelet. Se exponen los fundamentos de la teoría de wavelets incluyendo la definición de wavelet y los conceptos de la CoWT, DWT y SWT. Finalmente se explica brevemente la reducción de ruido con métodos wavelet y el algoritmo VisuShrink seleccionado para esta aplicación.

3.1 Introducción

Se describe la teoría de las wavelets desde una perspectiva histórica, en la cual se define a la teoría de Fourier como la base de la teoría wavelet por ser el primer método en proponer la aproximación de señales por súper-posición de señales. Para este trabajo la perspectiva histórica de la teoría wavelet se define a la década de los 80's como la década en que propiamente se concreta la teoría de las wavelets, debido a que los trabajos anteriores a esta época parecían ser más trabajos aislados que trabajos de una teoría congruente.

Se explica que es una wavelet, las familias de wavelets más comunes y los fundamentos de la Transformada Wavelet (WT). Se analizan las transformadas Wavelet Continua (CoWT) y la Transformada Wavelet Discreta (DWT), en 1D y 2D, y la Transformada Wavelet Estacionaria (SWT), con el fin de describir las ventajas y desventajas de cada una de éstas transformadas.

3.2 Antecedentes históricos de la Transformada Wavelet

Existen muy numerosas referencias que organizan la historia de la teoría de las wavelets de diferentes maneras. Esto se debe en gran manera a que mucho del trabajo de esta teoría fue desarrollado alrededor de los años 30's pero éste parecía ser simplemente esfuerzos separados y no parte de una teoría coherente, se decide establecer a la década de los 80's como el punto decisivo en el desarrollo de la teoría wavelet tal como se explica en la referencia [MEY93].

3.2.1 Inicio de la teoría de las wavelets

Antes de 1930 la rama de las matemáticas que dio origen a la teoría de las wavelets comenzó con las teorías de análisis de frecuencias de Joseph Fourier en 1807, cuando se introdujo la expansión de señales periódicas como la sumatoria de senos y cosenos [YIT76].

Dados los descubrimientos de Fourier después de 1807 los matemáticos poco a poco fueron cambiando sus ideas de análisis en frecuencia por ideas de análisis en escala. Es decir, analizar una función $f(x)$ creando estructuras matemáticas que variaran en escala.

La primera mención de una wavelet fue hecha por Alfred Haar en 1909 y una de las propiedades de la wavelet Haar era su soporte compacto. Sin embargo, esta wavelet no era continua, por lo que se limitaba a ciertas aplicaciones.

Fue entonces entre los años 1930 y 1980 que importantes matemáticos, físicos e ingenieros como Levy, Marr, Grossman, Morlet, Goupillaud, Weis, Coifman, definieron los conceptos básicos de la teoría wavelet.

3.2.2 Wavelets después de los 80's

Se toman los años 80's como un punto importante en la evolución de las wavelets dado que en 1985 Stephane Mallat estableció la relación de los filtros espejo de cuadratura, los algoritmos piramidales y las bases orto-normales de las wavelets. Cerca de este mismo año inspirado en los trabajos de Mallat, Yves Meyer desarrollo las primeras wavelets no tribales (continuas pero sin un soporte compacto). Fue entonces en 1988 que Ingrid Daubechies publicó un conjunto de wavelets orto-normales que se convirtieron en el pilar de las aplicaciones wavelets [GRA95].

3.3 Teoría de wavelets

Una función wavelet es una pequeña onda cuya energía se encuentra concentrada en el tiempo y sirve como herramienta para el análisis de fenómenos transientes, no estacionarios y variantes en el tiempo [MAL99].

Una de las características que ha permitido la aplicación de la teoría wavelet en diferentes campos de estudio es la capacidad de realizar un análisis en tiempo y frecuencia de fenómenos estacionarios y no estacionarios. El análisis wavelet se basa, al igual que la teoría de Fourier, en el concepto de aproximación de señales usando la superposición de señales. La diferencia entre la teoría de Fourier y la teoría wavelet radica en que las funciones wavelet varían tanto en frecuencia como en escala.

Una forma general de ver las funciones wavelet es como familias de funciones que tienen una buena localización tanto en frecuencia como en tiempo. Está característica hace del análisis wavelet una herramienta poderosa para diversas aplicaciones que involucran el procesamiento de señales.

3.3.1 Definición de wavelet

Una wavelet es una señal oscilatoria de corta duración cuya energía es finita y se encuentra concentrada en un determinado intervalo de tiempo. Las wavelets son funciones que satisfacen ciertos requerimientos matemáticos. Dichas funciones son usadas para representar datos u otras funciones [SAD05].

Para que una función de análisis sea clasificada como una wavelet $\psi(t)$, ésta debe de cumplir con los siguientes criterios matemáticos [ADD02]:

1. Una wavelet debe tener energía finita (3.1):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 \, dt < \infty \tag{3.1}$$

2. La función wavelet $\psi(t)$ debe de cumplir con el criterio de la constante de admisibilidad C_ψ (3.2):

$$C_\psi = \int_{0}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < \infty \tag{3.2}$$

Donde *f* denota la frecuencia y la condición implica que la wavelet debe tener componente de frecuencia 0 (Ψ(0)=0), donde Ψ(f) es la transformada de Fourier de la wavelet. El valor de C_ψ dependerá de la wavelet seleccionada.

3. Para wavelets complejas la transformada de Fourier Ψ(f) debe ser real y desvanecida para frecuencias negativas.

3.3.2 Transformada wavelet

La WT genera bloques de información en escala y tiempo de una señal. Estos bloques se generan desde una única función fija llamada wavelet madre $\psi(t)$, como se define en la ecuación (3.3), mediante operaciones de translación y dilatación [BURR98].

$$\psi_{a,b} = \frac{w\left(\frac{x-b}{a}\right)}{\sqrt{|a|}}; a,b \in R, a \neq 0 \tag{3.3}$$

Donde *a* y *b* son números reales del conjunto *R*, *a* permite hacer las dilataciones y contracciones de la señal, y *b* permite cambiar la posición de la señal en el tiempo. Cuando la variable *a* es igual a 0 la señal se indetermina [HER03].

El proceso de transformada wavelet de una señal se llama análisis y el proceso inverso para reconstruir la señal se llama síntesis. Este análisis genera diferentes sub-bandas, por lo que distintos niveles de descomposición se pueden generar de acuerdo a las necesidades de la aplicación. Dichas sub-bandas en el plano de la frecuencia no son uniformes y se encuentran divididas logarítmicamente tal como se muestra en la Figura 3.1 [ROS05]. En donde para un rango de 0 a *fn* las muestras de una señal son la mitad para cada nivel de escalamiento.

El análisis WT es superior a los distintos tipos de análisis de Fourier ya que proporciona una localización tiempo-frecuencia adaptiva. A un nivel de escala grande de la wavelet se obtiene buena resolución en frecuencia mientras que a una escala baja se tiene una buena resolución en tiempo [SHU03].

Existen diferentes familias de wavelets, de las cuales no existe un criterio definido para evaluar su calidad debido a que esta depende en gran medida de la aplicación y las características requeridas para ésta, como lo pueden ser su soporte,

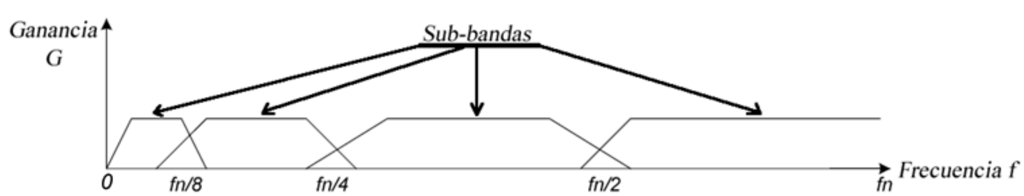

Figura 3.1 Sub-bandas generadas por la descomposición wavelet

simetría, momentos de desvanecimiento, regularidad, etc. Las familias más conocidas de wavelets son: Haar, Daubechies, Coiflets, Symlets, Biortogonales, Meyer, Mexican hat, Shannon y Morlet. Se propone analizar la eficiencia del algoritmo con las primeras 5 familias mencionadas y diferentes cantidades de coeficientes, ya que la selección depende tanto de la escala como la resolución, y para determinar la wavelet adecuada para esta aplicación se debe analizar el método, tanto con diferentes wavelets como con diferentes niveles de descomposición a los cuales trabajan dichas wavelets.

3.4 Transformada Wavelet Continua (CoWT)

Dadas las limitantes de la STFT se desarrolla la CoWT para superar dichas restricciones. La ecuación (3.4) que define la CoWT es [RIO91]:

$$CoWT(b,a) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi\left(\frac{(t-b)}{a}\right) dt; a,b \in R; a \neq 0 \tag{3.4}$$

En donde $x(t)$ es la señal a analizar, $\psi(t)$ es la wavelet madre, que es función de la escala $a = fo/f$ (parámetro de dilatación), b es el parámetro de traslación y finalmente f_0 es la frecuencia central de la wavelet. Por lo tanto con los valores a y b se obtienen wavelets que son versiones de la wavelet madre $\psi(t)$.

Este análisis wavelet entrega una serie de coeficientes que indican que tan parecida es la señal a analizar de una función madre. Dado que la CoWT es un proceso reversible la señal puede obtenerse a partir de los coeficientes obtenidos en el análisis. Este proceso de síntesis esta descrito por la ecuación (3.5):

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{CoWT(b,a)}{\sqrt{|a|}} \cdot \psi_{a,b}\left(\frac{t-b}{a}\right) \cdot \frac{da \cdot db}{a^2} \tag{3.5}$$

En donde C_{ψ}^{2} es una constante llamada constante de admisibilidad y debe tener un valor finito para poder realizar el proceso de síntesis [DAU92].

3.5 Transformada Wavelet Discreta (DWT)

En el campo de análisis numérico la DWT es cualquier transformada wavelet para la cual las funciones wavelet son discretizadas. Al igual que otras WT captura la información en una escala de tiempo frecuencia.

3.5.1 DWT en una dimensión (1D-DWT)

El análisis wavelet para señales discretas utiliza una familia de wavelets orto-normales, es decir, que las wavelets son ortogonales y normalizadas para tener una energía unitaria [MAL99], de esa forma la familia de wavelets orto-normales está dada por la ecuación (3.6):

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-j/2}\psi\left(2^{-j}t - k\right) \tag{3.6}$$

De esta forma j y k son enteros que escalan y dilatan la función madre ψ, para generar la familia de wavelets discretas. Es decir, j indica la anchura de la wavelet y k determina la posición. Para analizar el dominio de datos en diferentes resoluciones, la wavelet madre ψ es utilizada en la función de escalamiento $\phi(t)$:

$$\phi(t) = \sum_{k=-1}^{N-2}(-1)^{k} \cdot c_{k+1}\psi\left(2t + k\right) \tag{3.7}$$

Donde c_k son los coeficientes wavelet. Para entender este concepto, es más sencillo pensar en los coeficientes c_k como un filtro. Estos coeficientes son acomodados en una matriz de transformación que se aplica a un vector de datos. De esa forma se acomodan los coeficientes en dos patrones diferentes, uno que trabaja como un filtro desvanecedor (filtro pasa-bajos) y otro como un patrón que muestra solo los “detalles” de la información (filtro pasa-altos). A estos acomodos de los coeficientes se les conoce, en el “lenguaje de procesado de señales”, como filtros espejo de cuadratura [GRA95].

Este concepto de análisis de una señal mediante bancos de filtros es conocido como descomposición de árbol de Mallat. En la Figura 3.2 se aprecia como una señal *x(n)* es descompuesta en aproximaciones $a_j(n)$ y detalles $d_j(n)$ por efecto de los filtros pasa-altos $h_j(n)$ y pasa-bajos $g_j(n)$. El símbolo $\downarrow 2$ significa el proceso de decimación, *n* es un número entero y *j=1, 2, 3…k* es el nivel de descomposición.

Este método no pierde la información de tiempo-frecuencia, a diferencia de la FT. Sin embargo, la resolución del análisis depende del nivel de descomposición en que uno se encuentre, por lo que se puede realizar un análisis en diferentes resoluciones (Análisis Multi-Resolución o MRA) y su complejidad computacional es de *O(n).* La DWT es al igual que la CoWT un proceso reversible y la reconstrucción es realizada tomando los valores en la salida de los filtros y multiplicándolas por la respuesta al impulso considerando un proceso de undecimado debido a la decimación realizada en el análisis.

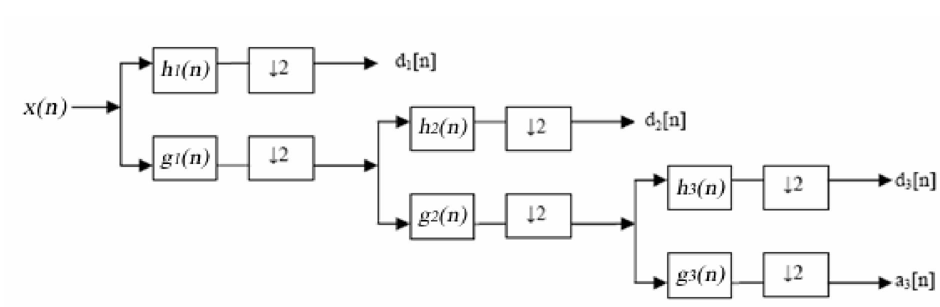

Figura 3.2 Árbol de descomposición de wavelets de 3 niveles

3.5.2 DWT en dos dimensiones (2D-DWT)

La transformada wavelet de dos dimensiones separa las líneas de las columnas y realiza el mismo proceso que se realiza para la DWT de 1-D, considerando a cada fila y a cada columna como una señal uni-dimensional. En la Figura 3.3, se muestra el proceso que se aplica a una señal 2D para ser analizada con bancos de filtros para realizar la 2D-DWT.

Como puede apreciarse en la Figura 3.2, el primer paso es separar las filas y aplicar los filtros pasa-altas (H) y pasa-bajas (L) tal como se haría en la 1D-DWT a todas las filas. Posteriormente se realiza el mismo proceso para cada columna de la señal. Este proceso genera 4 nuevas sub-matrices de la señal original; la primera es una sub-matriz llamada matriz de aproximación LL, después está la sub-matriz LH que son los detalles horizontales de la señal original, posteriormente se encuentra la sub-matriz HL que corresponde a los detalles verticales de la señal original y finalmente la sub-matriz HH o los detalles diagonales de la matriz original. En la Figura 3.4 se ve un ejemplo de cómo un primer nivel de descomposición de una imagen genera las 4 sub-imágenes.

El proceso de reconstrucción simplemente re combina las cuatro sub-imágenes (HH, HL, LH y LL) utilizando un proceso de undecimado.

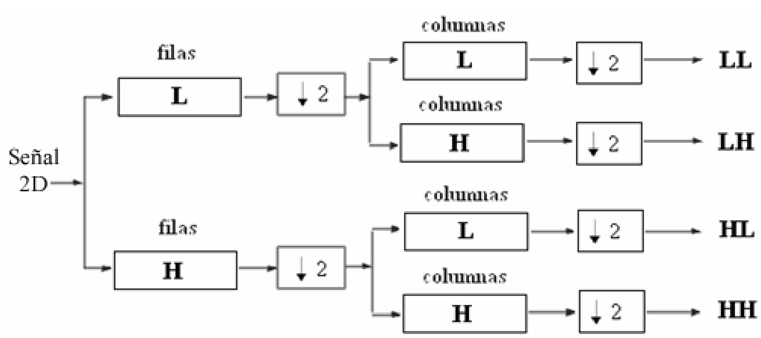

Figura 3.3. Descomposición de un nivel de la 2D-DWT

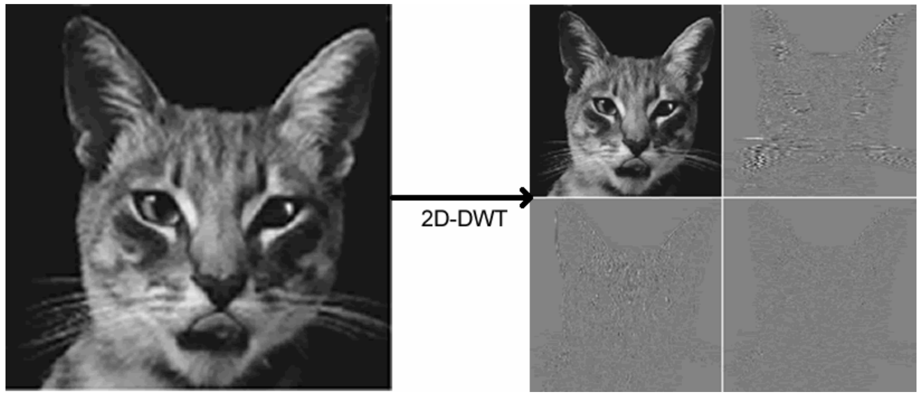

Figura 3.4. Descomposición de una imagen con la 2D-DWT en sus cuatro componentes (arriba-izquierda LL, arriba-derecha LH, abajo-izquierda HL, abajo-derecha HH)

3.6 Transformada Wavelet Estacionaria (SWT)

La SWT es también conocida como transformada wavelet no-decimada, transformada wavelet invariante en el tiempo, transformada wavelet de superposición máxima y más famosamente conocida como algoritmo "à trouse". Ésta tiene una estructura similar a la DWT pero ésta no realiza el proceso de decimación. En la DWT la etapa de decimación que se encuentra después del filtro hace a la DWT variante en el tiempo, mientras que la SWT modifica los filtros interpolando ceros dependiendo del nivel de descomposición en los filtros pasa bajas y pasa altas [SHE92]. La implementación de la estructura de la SWT es mostrada en la Figura 3.5, en donde la señal *x(n)* es

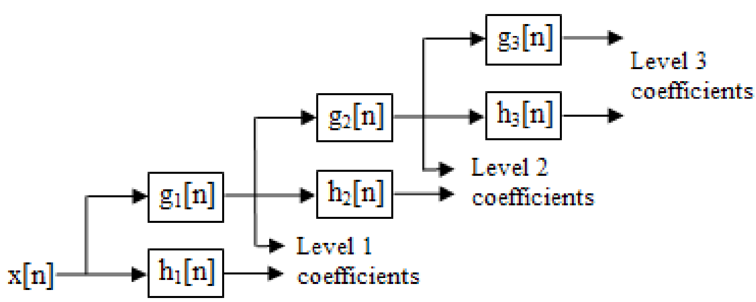

Figura 3.5. Implementación de la SWT representado como bancos de filtros

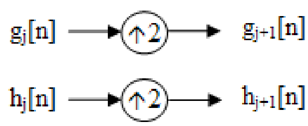

Figura 3.6. Filtros de la SWT con proceso de up-sampling

descompuesta por los filtros pasa bajos $g_j(n)$ y los filtros pasa altos $h_j(n)$, sólo que los filtros de cada nivel son como los mostrados en la Figura 3.6 y tienen el proceso inverso de la decimación, llamado undecimado o "up-sampling" que inserta ceros entre cada dos muestras [SHE92].

De esa forma la SWT tiene el mismo número de coeficientes en cada nivel, que son iguales al número de coeficientes de la señal que se analiza y no presenta corrimientos en la señal, haciéndola ideal para aplicaciones de detección de contorno y reducción de ruido [SHU03]. Sin embargo, la complejidad computacional de la SWT es mayor que la de la DWT siendo esta $O(n^2)$.

3.7 Reducción de ruido

La reducción de ruido en señales utilizando wavelets normalmente se realiza con la técnica denominada "wavelet shrinkage" o encogimiento wavelet, sin importar el tipo de transformada discreta wavelet utilizada [PIZ02]. Esta técnica reduce la magnitud de cada coeficiente wavelet a un cierto valor dependiendo del nivel ruido que se estima de la señal. Un método muy común para el encogimiento es la designación de un umbral (λ). Al definir un umbral los valores de los coeficientes wavelet que se encuentren por debajo de él son eliminados (umbral duro o "hard-threshold) o bien reducidos en magnitud (umbral suave o "soft-threshold") [DON94].

El primer paso para la reducción de ruido consiste en calcular la DWT de la señal. Después debe de seleccionarse un umbral, ya sea duro o suave, con el fin de eliminar o reducir los coeficientes de menor energía. Finalmente se calcula la IDWT a partir de los nuevos coeficientes obtenidos.

Una manera de clasificar los métodos de reducción de ruido por selección de umbral puede ser el descrito en [ROS05] en donde existen 2 categorías: Los umbrales globales y los umbrales recursivos. Los umbrales globales son aquellos que definen un valor fijo de umbral para ser aplicado a todos los coeficientes wavelet. Mientras que los umbrales recursivos seleccionan un umbral diferente para cada nivel de resolución. Existen diferentes maneras de seleccionar el umbral para la eliminación de muestras, de cualquier manera, el algoritmo VisuShrink es uno de los métodos más simples [DON95] y se designa como (3.8):

$$\lambda = \sigma\sqrt{2\log N} \tag{3.8}$$

En donde N es el número de muestras y σ es la desviación estándar que se puede estimar con la ecuación (3.9), donde *DMA* es la desviación media absoluta de los coeficientes wavelet $\{d_{j,k}\}$.

$$\sigma = \frac{DMA(|\{d_{j,k}\}|)}{0.6745} \tag{3.9}$$

3.8 Discusión

La transformada wavelet es una herramienta matemática poderosa debido a su capacidad de analizar señales en una escala de tiempo-frecuencia. Existen diversas transformadas wavelet, de las cuales se escoge la SWT para detectar columnas de humo debido a que es invariante en el tiempo y principalmente a que es considerada una de las mejores transformaciones para detección de contornos [SHU03] a pesar de su complejidad computacional $O(n^2)$. En general resulta desafiante comparar de manera cuantitativa el funcionamiento de las transformadas wavelets para la detección de contornos por lo que se define según los trabajos de [SHU03] a la SWT como un método apropiado para la aplicación en esta investigación y se determina como trabajo a futuro analizar las transformadas 2D-DWT y la Transformada Compleja de Árbol Dual (DT-CWT), tanto en su eficiencia como en los tiempos de procesamiento del método.

Los métodos basados en wavelets han probado ser apropiados para la reducción de ruido en señales por lo que se selecciona, la reducción de ruido con umbral de forma fija (suave), ya que se considera un método atractivo debido a su simplicidad.

Se propone analizar la eficiencia del algoritmo con 5 de las más conocidas familias de wavelets; la Haar, Daubechies, Coiflet, Symlet y Biortogonal, con diferentes niveles de coeficientes con la finalidad de encontrar la wavelet más adecuada para esta aplicación.