CAPITULO 2
MARCO TEÓRICO

En este capítulo se dará una breve introducción y se tratarán temas teóricos como pruebas de hipótesis, potencia estadística, diseño de experimentos, método Taguchi, entre otros. Cada tema es desarrollado con detalle, además de presentar diagramas y gráficos que facilite la comprensión al lector. Por último se presentan tres ejemplos que engloban la realización de los arreglos ortogonales con el análisis de varianza y los índices señal/ruido, así como el análisis de sus resultados.

2.1 Introducción.

En el presente capítulo se presentará toda la teoría estadística que forma la base para comprender la metodología que se va a desarrollar posteriormente. Incluye diferentes temas y ejemplos para una mayor comprensión.

2.2 Pruebas de Hipótesis.

El diseño de experimentos es una técnica que permite obtener datos de una manera planeada para probar algunas suposiciones o afirmaciones de interés y permite cuantificar los riesgos en los que se incurre y el impacto del cambio de la afirmación que se deriva. La prueba de hipótesis consiste en hacer una suposición que se va a refutar o poner a prueba, a la que vamos a llamar hipótesis nula (H0) y en consecuencia se genera una hipótesis alternativa (Ha), que establece la suposición contraria a la hipótesis nula, la cual se va a aceptar como verdadera en el caso que haya evidencia suficiente para rechazar la suposición inicial, previo establecimiento de un criterio de decisión. (Montgomery, 1996).

Los pasos a seguir en una prueba de hipótesis son:

a) Planteamiento de una hipótesis estadística
b) Obtención de un estadístico de prueba y
c) Aplicación del criterio de rechazo para tomar una decisión

Una hipótesis estadística es una afirmación sobre los valores de los parámetros de una población o proceso y que es susceptible de probarse a partir de la información contenida en una muestra representativa obtenida de la población. Por ejemplo, la afirmación “este proceso produce menos del 8% de defectuosos” se puede plantear estadísticamente, en términos de la proporción p desconocida de artículos defectuosos que genera el proceso, como se hace a continuación

$H0: p=0.08$ (hipótesis nula)

$Ha: p<0.08$ (hipótesis alternativa)

La hipótesis nula se plantea como una igualdad y asumimos que H0 es verdadera. En caso de rechazar H0 por la evidencia que aportan los datos de la muestra, se acepta la hipótesis alternativa como verdadera. Podría haberse tratado de la afirmación “este proceso produce el 8% de defectuosos”, en cuyo caso se trata de una hipótesis alternativa bilateral. (Montgomery, 1996).

$H0: p=0.08$ (hipótesis nula)

$Ha: p\neq 0.08$ (hipótesis alternativa)

2.2.1 Estadístico de prueba.

La estrategia para probar la hipótesis parte de suponer la H0 como verdadera, mientras no se demuestre lo contrario, para lo cual se toma una muestra aleatoria (o se obtienen datos mediante un experimento planeado). El estadístico de prueba es un número calculado a partir de los datos y la hipótesis nula y cuya magnitud permite discernir si se acepta o se rechaza la H0. El estadístico de prueba es un número que tiene las siguientes propiedades:

a) Contiene la información muestral respecto al parámetro de interés y
b) Bajo el supuesto de que la hipótesis nula es verdadera, sigue una distribución de probabilidad conocida.

Así estas características hacen útil a este número para comprobar la validez estadística de H0, sólo verificando si en realidad sigue la distribución que se supone debe de seguir; si hubiera contradicción se atribuye este hecho a la falsedad de H0 y por lo tanto se acepta como valida Ha. (Montgomery, 1996).

Al conjunto de posibles valores del estadístico de prueba que lleva a rechazar H0, se le llama zona de rechazo para la prueba, y a los posibles valores donde no se rechaza, región o zona de no rechazo.

2.2.2 Criterio de decisión.

El estadístico de prueba es una variable aleatoria con distribución conocida. Si H0 es verdadera el estadístico de prueba debería de caer dentro del rango de valores más probables de su distribución asociada o región de no rechazo. Si cae en una de las colas de su distribución asociada, fuera del rango de valores más probables (zona de rechazo) es evidencia de que este valor no pertenece a dicha distribución y por lo tanto debe estar mal el supuesto bajo el cual se construyó, es decir, H0 debe ser falsa.

2.2.3 Pruebas de una y dos colas.

La ubicación de la región de rechazo depende de si la hipótesis es bilateral o unilateral. En el primer caso cuando la Ha es del tipo “no es igual” (≠) y, en el segundo caso es del tipo “mayor que” (>) o “menor que” (<). La región de rechazo se define a partir del valor crítico, el cual se obtiene de tablas de la distribución correspondiente a la supuesta en la prueba. Para la distribución normal se requiere conocer α y para las distribuciones t-student, chi-cuadrada y Fisher se requiere conocer además los grados de libertad. Cuando la Ha es del tipo “no es igual” (≠) se trata de una prueba de dos colas. Si asumimos que se trata de una distribución normal y que se requiere de un nivel de significancia α =0.05, el valor critico es z=1.96 y, por lo tanto, la región de rechazo consiste en los puntos sobre el eje X, a la derecha de z=1.96 y a la izquierda de z=-1.96 como se puede ver en la figura 2-1: El valor del estadístico de prueba es z0= (x-μ)√n /σ, donde x es el promedio de los datos de la muestra obtenida. El valor del estadístico z0 se compara con el valor crítico y de acuerdo al siguiente criterio de decisión se rechaza o acepta H0.

$$\text{El criterio de decisión es } \begin{cases} \text{Rechazar si} & z0 > 1.96 \text{ ó } z0 < -1.96 \\ \text{No rechazar si} & -1.96 \leq z0 \leq 1.96 \end{cases}$$

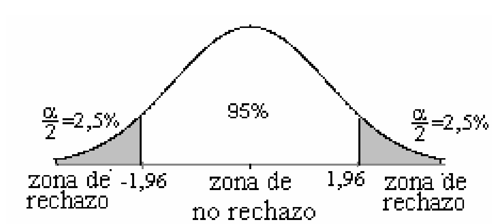


Figura 2-1 Zonas de no rechazo y rechazo para una prueba de dos colas

Para el caso de una cola, el valor critico es z =1.64, ya que para este caso se toma α =0.05 tal cual. Se compara contra este valor z el valor del estadístico z0= (x-μ)√n /σ. Si se trata del caso menor que (<), la zona de rechazo esta a la izquierda de -1.64 y si se trata del caso mayor que (>), la zona de rechazo esta a la derecha de 1.64, como se puede ver en la figura 2-2 inciso (a) y (b) para este ejemplo. En la figura 2-2 (c) se puede ver la zona de rechazo y de aceptación para prueba de una cola (distribución chi-cuadrada o Fisher). Ver Montgomery (1996). Para este trabajo se hace uso de la distribución F-Fisher la cual es una prueba unilateral derecha, por tanto la región de rechazo esta a la derecha del valor crítico Fα, gl numerador, gl denominador. La regla de decisión es Rechazar H0 (si Fcalc > Fα, gl num, gl error). Este último término es el 100(1-α) percentil de la distribución F.

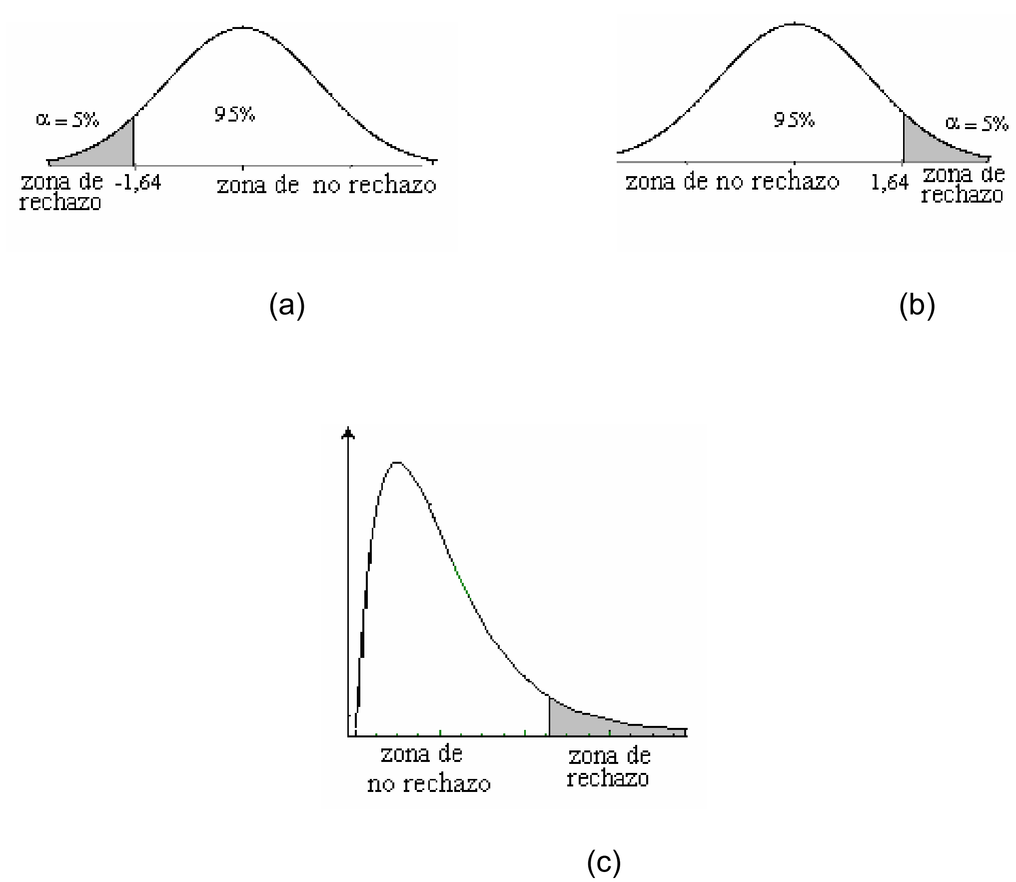


Figura 2-2 Zonas de no rechazo y rechazo para pruebas de una cola.

2.2.4 Tipos de pruebas.

Cuando se estudia el comportamiento de un proceso en cuanto a una característica de calidad, interesan su media y su varianza, puesto que estos parámetros tienen que ver con la posibilidad de que el producto cumpla con los requerimientos preestablecidos. Así pueden hacerse pruebas para la media, para la varianza, comparación de dos medias, igualdad de varianzas, comparación de la proporción de varianzas, o un resumen de los tipos de procedimientos de prueba de hipótesis, donde se indica el tipo de hipótesis, sus supuestos, el estadístico de prueba y el criterio de decisión (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

2.2.5 Valor p.

En la práctica se ha adoptado el enfoque del valor p para evitar el tener que especificar previamente el valor de significancia α, ya que a menudo este último enfoque no permite al tomador de decisiones saber si el estadístico de prueba estaba apenas en la región de rechazo o bien ubicado dentro de ella. Además evita al usuario tener que establecer previamente un valor α con el que pudiera no estar del todo satisfecho con los riesgos implicados por este valor. El valor p es la probabilidad de que el estadístico de prueba tome un valor mayor o igual al valor observado del estadístico (valor obtenido de las tablas estadísticas) cuando H0 es verdadera. El valor p es el nivel de significancia más pequeño que conduce al rechazo de la H0. (Gutiérrez y De la Vara, 2003).

Es habitual llamar significativo al estadístico de prueba cuando H0 se rechaza. El valor p ofrece información suficiente sobre el peso de la evidencia en contra de la H0, y por lo tanto, el usuario puede elaborar una conclusión a cualquier valor específico de significancia; es decir, con distintos valores de α. El valor p permite al investigador determinar qué tan significativa es la información sin que se imponga un nivel de significancia previo. Puede considerarse también como el nivel de significancia α más pequeño para el que los datos son significativos. (Montgomery, 1996).

Si z0 es el valor calculado del estadístico de prueba, entonces el valor P es

$$P = \begin{cases} 2[1-\Phi(|z0|)] & \text{para una prueba de dos colas} \\ 1-\Phi(z0) & \text{para una prueba de cola unilateral superior} \\ \Phi(z0) & \text{para una prueba de cola unilateral inferior} \end{cases}$$

En las expresiones anteriores Φ(z0) es la función de distribución acumulada normal estándar. Por ejemplo para un aprueba de dos colas si el estadístico de prueba calculado es z0= 3.25, el valor P = 2[1-Φ(3.25)] = 0.0012.

2.3 Potencia estadística.

Existen dos tipos de error que se pueden cometer en las pruebas de hipótesis. Cuando la hipótesis nula es rechazada cuando es cierta el error que ocurre es tipo I. Si la hipótesis nula no es rechazada cuando es falsa, entonces el error que se comete es tipo II. Las probabilidades de estos errores se denotan como sigue:

α = P{error tipo I}= probabilidad de rechazar Ho cuando Ho es cierta
β = P{error tipo II}= probabilidad de no rechazar Ho cuando Ho es falsa

El término 1- β representa la potencia de la prueba y es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es falsa. Representa la capacidad de la prueba para detectar diferencias significativas.

Algunos factores que influyen en la potencia:

- El tamaño del efecto a detectar, es decir la magnitud de la diferencia. Cuanto mayor sea el efecto que se desea detectar, mayor será la probabilidad de obtener diferencias significativas y, por lo tanto, mayor la potencia.
- La variabilidad de la muestra estudiada. Cuanto mayor sea la variabilidad en la respuesta más difícil es detectar diferencias entre grupos y menor la potencia.
- El tamaño de la muestra a estudiar. Generalmente en las pruebas de hipótesis se especifica el valor de α y se diseña la prueba de tal forma que el valor de β sea pequeño. Es decir, la probabilidad de cometer el error tipo I se controla directamente, mientras que el error tipo II se controla indirectamente con el tamaño de la muestra; cuanto más datos se tengan más pequeño es β, o sea que entre más grande sea la muestra, mayor es la potencia de la prueba, es decir, se incrementa la probabilidad de rechazar Ho si ésta es falsa.
- El nivel de significancia estadística α. Si disminuimos la probabilidad de cometer un error de tipo I aumentamos simultáneamente la probabilidad de cometer un error tipo II por lo que se trata de encontrar un equilibrio entre ambas.

Considerando los factores anteriores, se requiere evaluar:

- El tamaño de la muestra. Los AO emplean pocas corridas. De acuerdo a la metodología de Taguchi, los AO incluyen los efectos de los factores controlables y también de los incontrolables e involucran muchos efectos. Sin embargo, si se aumenta el tamaño de muestra, también se aumenta la potencia.
- Revisando el nivel de significancia que se establece, según el experimento. Al establecer α antes de realizar el experimento se determina el nivel de β y por lo tanto el de la potencia del experimento (1- β).
- Cuando hay diferencias de las medias entre grupos, es más confiable aplicar los AO sin tener que recurrir a aumentar el número de replicas.
- Pruebas de hipótesis sobre los factores y sus interacciones para ver cuál es el mejor modelo que describe a la variable de respuesta.

También se debe verificar si los factores que intervienen en el estudio son significativos en la variable de estudio, es decir, probar eliminando algunos de ellos e introducir alguna interacción no considerada antes para ver si otra combinación de factores produce mejores resultados. Para evaluar la potencia se requiere de un valor específico de la hipótesis alternativa.

2.4 Diseño de experimentos.

Investigadores de todos los campos llevan a cabo experimentos con la finalidad de descubrir algo acerca de un proceso o sistema particular. En un sentido literal, un experimento es una prueba. El diseño experimental se define como una prueba o una serie de pruebas en las que se hacen cambios deliberados en las variables de entrada de un proceso o sistema para observar e identificar las razones de los cambios que pudieran observarse en la respuesta de salida (Montgomery, 2003).

El objetivo del diseño de experimentos es desarrollar un proceso robusto, es decir, un proceso que sea afectado en forma mínima por fuentes de variabilidad externas (Montgomery, 2003).

En general, los experimentos se usan para estudiar el desempeño de procesos y sistemas. El proceso o sistema puede representarse de la siguiente forma, ver figura 2-3:

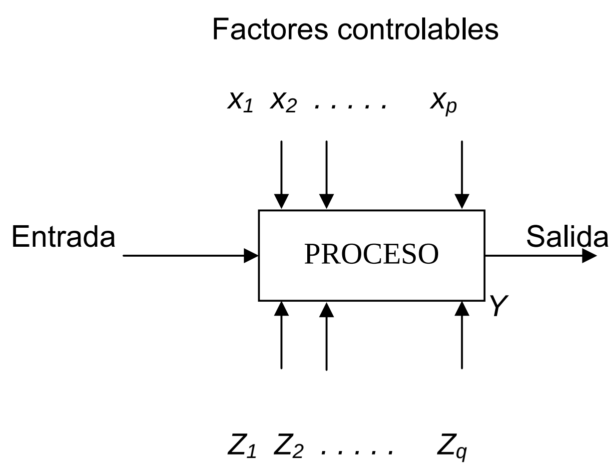


Figura 2-3 Factores no controlables

El proceso puede visualizarse como una combinación de máquinas, métodos, personas u otros recursos que transforman cierta entrada en una salida que tiene una o más respuestas observables. Algunas variables del proceso $x_1,\ x_2\ .\ .\ .\ \ x_p$ son controlables, mientras que otras $Z_1\ Z_2\ .\ .\ .\ .\ .\ \ Z_q$ son no cotnrolables. Los objetivos de los experimentos pueden ser:

- Determinar cuáles son las variables que tienen mayor influencia sobre la respuesta *y*.
- Determinar cuál es el ajuste de las x que tiene mayor influencia para que y esté casi siempre cerca del valor nominal deseado.
- Determinar cuál es el ajuste de las x que tiene mayor influencia para que la variabilidad de y sea reducida.
- Determinar cuál es el ajuste de las x que tiene mayor influencia para que los efectos de las variables no controlables $Z_1\ Z_2\ .\ .\ .\ .\ .\ \ Z_q$ sean mínimos (Montgomery,2003).

Existen varias estrategias para la experimentación. Estas pueden aplicarse a cualquier producto o proceso:

El más sencillo de los enfoques experimentales es el de un solo factor. Este evalúa el efecto de un parámetro mientras lo demás se mantiene constante. El tamaño de muestra adecuado es de ocho pruebas para cada nivel con el objetivo de detectar una diferencia en el desempeño entre los niveles (Ross, 1996).

El enfoque de la mejor conjetura. Cuando se cambia un nivel de un factor y los demás niveles se mantienen en las mismas condiciones. La combinación se determina de manera arbitraria y se hacen las pruebas. Para utilizar este enfoque se requiere de amplios conocimientos técnicos sobre lo que se va a analizar además de tener experiencia práctica. Aunque tiene sus desventajas, una es que primero se determina una combinación, y si no resulta, se cambia por otra según la experiencia. Esto puede continuar por mucho tiempo hasta llegar a una solución. La otra desventaja es que al obtener un resultado con beneficio en la primera prueba, ya no se realicen más pruebas para buscar una solución que dé mejores resultados (Montgomery, 2003).

El enfoque de varios factores, uno a la vez. Consiste en seleccionar un punto de partida de cada factor, es decir, una base de los niveles de cada factor. Luego, se va moviendo el nivel de un solo factor, manteniendo los demás fijos. Posteriormente se mueve el nivel del siguiente factor y sucesivamente se va cambiando el nivel de cada factor. La desventaja de un factor a la vez es que no se pueden observar interacciones entre factores (Montgomery, 2003). Esta estrategia tiene límites en el momento de evaluar la información de los efectos de los factores. De 10 datos sólo dos se usan para comparar con los otros dos. Si se intenta usar todos los datos, entonces el experimento no será ortogonal. Ortogonalidad significa que los factores pueden ser evaluados independientemente, es decir, el efecto de un factor no influye en la estimación del efecto de otro factor (Ross, 1996). Hay interacción cuando uno de los factores no produce el mismo efecto en la respuesta con niveles diferentes de otro factor (Montgomery, 2003).

Existe otro enfoque para trabajar con varios factores por medio de experimentación factorial. Esta estrategia consiste en variar los factores en conjunto, en lugar de uno a la vez. En el diseño se usan todas las combinaciones de los niveles de los factores. Por ejemplo, un diseño factorial 2^2 es un diseño de dos factores, cada uno con dos niveles (Montgomery,2003) . En un diseño experimental se pueden realizar una o más réplicas para dar más seguridad al estudio. Un diseño de este tipo permite analizar los efectos principales o efectos individuales. En general, si hay *k* factores, cada uno con dos niveles, el diseño factorial requeriría 2^k corridas. Cuando el número de factores aumenta, también aumenta el número de corridas (Montgomery, 2003). Se deben tomar en cuenta el tiempo y los recursos para diseñar un experimento porque un diseño con varios factores podría repercutir en el costo. Con este enfoque se pueden observar los factores y sus interacciones. Este tipo de experimentos estima los efectos principales y todas las interacciones posibles, todas ortogonales entre una y otra (Ross, 1996).

Una forma de hacer un experimento con cinco o más factores es utilizar el diseño factorial fraccionado, el cual utiliza un subconjunto de corridas y el experimento se va realizando por partes. Con realizar una de las partes, por ejemplo la mitad, ya se puede tener una idea de algunas interacciones de los factores y estimar efectos principales (Montgomery, 2003). Se puede realizar 1/16 del diseño de un experimento, sin embargo, la reducción del diseño factorial completa se reduce demasiado.

Taguchi ha desarrollado una familia de matrices de diseño experimental fraccionado que pueden utilizarse en diferentes situaciones. En esta situación una posible matriz es la de 8-réplicas OA (Orthogonal Array), la cual se nombra como matriz L8 con dos niveles (Ross, 1996) Ver figura 2-4.

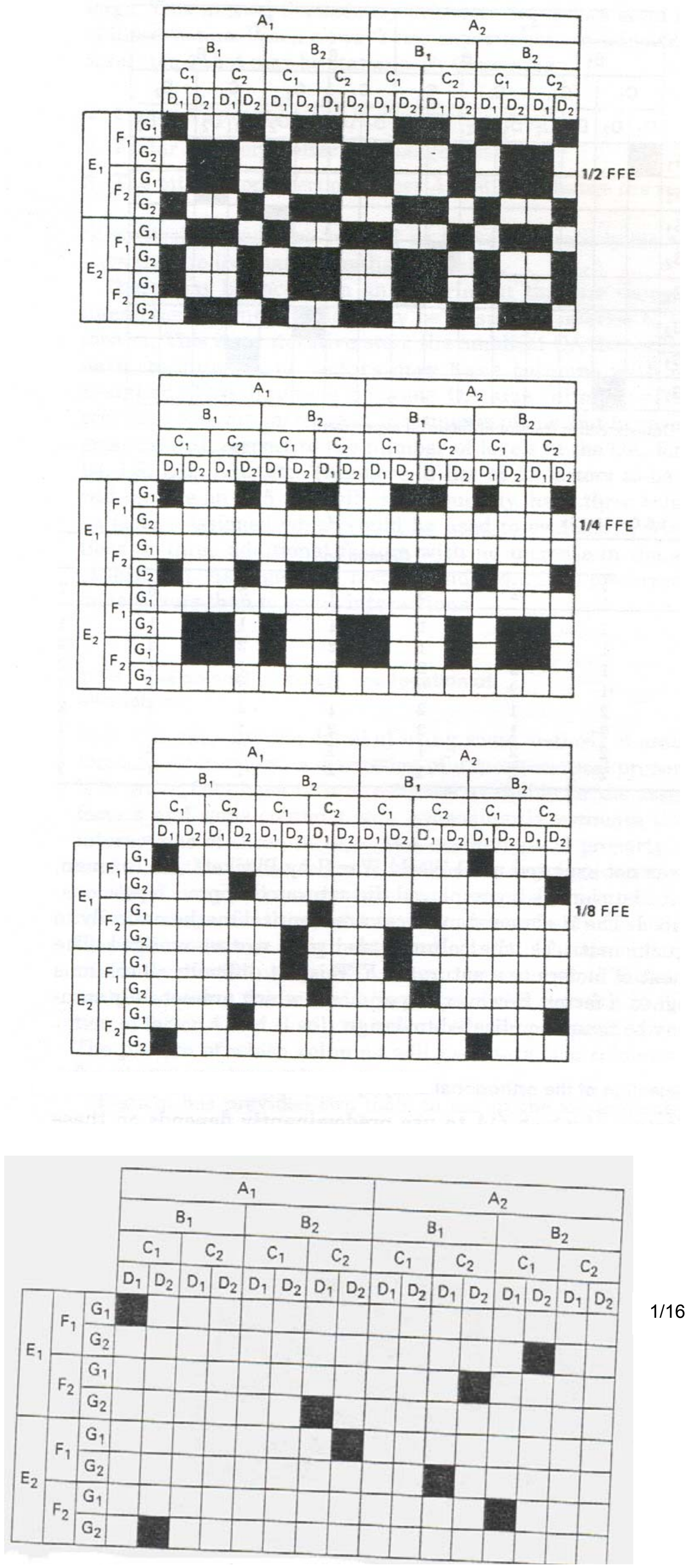


Figura 2-4 Cuadros de resultados de Taguchi.

Realmente, este arreglo es equivalente al 1/16 FFE (Fractional factorial experiment) que tiene sólo 8 de las 128 combinaciones. Los niveles pueden ser 1 y 2. Uno puede observar siete columnas en este arreglo, de forma similar al enfoque de varios factores uno a la vez, en las que se asigna un factor para cada columna. Cuando todas las columnas se les asignan un factor se llama diseño saturado. Cuando los factores A al G de una bomba de agua son asignados a las columnas 1 al 7, hay 8 diferentes formas de ensamblar las bombas descritas por las diferentes pruebas. Las 8 pruebas concuerdan con las i descripciones de 1/16 FFE. Estas son dos diferentes maneras de describir el mismo experimento. Sin embargo, con las aproximaciones OA es más fácil de determinar las combinaciones apropiadas ortogonales y desarrollar el análisis. (Ross, 1996).

Es fácil visualizar la ortogonalidad entre todas las columnas ya que las columnas contienen 4 pruebas en el nivel 1 y 4 pruebas en el nivel 2. El potencial real de los OA está en evaluar varios factores con un mínimo de pruebas.

2.5 Método Taguchi.

Genichi Taguchi nació en Japón en 1924. Se graduó en el Colegio Tecnológico de Kyruo y en 1962 obtuvo el doctorado en ciencias en la Universidad de Kyushu. Su mayor contribución ha sido la combinación que ha hecho de la ingeniería y de métodos estadísticos con el propósito de lograr bajar los costos y aumentar la calidad mediante la optimización del diseño de los productos y del proceso de manufactura. A él se deben los conceptos de “función pérdida” de calidad y “razón señal a ruido” que desde el principio nos indican en qué situación se está con respecto al desarrollo del producto y, cuando todavía es tiempo, qué mejoras hay que hacer en la forma más económica posible.

Las características cuantificables pueden ser clasificadas en tres tipos:

- Nominal es mejor. Es una característica con un valor objetivo.

- Menor es mejor. Es una característica cuyo mejor valor es cero.
- Mayor es mejor. Es una característica cuyo mejor valor es infinito.

El método Taguchi, además de enseñar cómo mejorar en forma rápida el diseño de los productos y de los procesos, proporciona un enfoque y un lenguaje comunes que propician la integración del diseño del producto y de los procesos de manufactura.

Taguchi recomienda el uso de arreglos ortogonales para hacer matrices que contengan los factores de control y los factores de ruido en el diseño de experimentos. Ha simplificado el uso de este tipo de diseño al incorporar arreglos ortogonales y gráficas lineales. Finalmente, en contraste con los enfoques tradicionales, ve las interacciones como equivalentes del ruido: mientras las interacciones sean relativamente suaves, el análisis de los efectos principales nos proporcionará las condiciones óptimas y una buena reproducibilidad en un experimento (Centro de Calidad ITESM, 1989).

2.5.1 Arreglos ortogonales.

Los AO son una metodología para el diseño de un experimento, que permiten acomodar una gran cantidad de situaciones. Su objetivo es determinar la combinación de factores de control y sus niveles con los factores de ruido que producirán menos variación en el producto. Examina simultáneamente muchos factores a bajo costo.

Los AO son herramientas que permiten al ingeniero evaluar qué tan robustos son los diseños del proceso y del producto con respecto a los factores de ruido. La metodología propuesta por Taguchi en el Diseño de Experimentos ha sido usada con gran éxito en la práctica. Específicamente el uso de AO ha llevado a recomendaciones acertadas ya que disminuyen la variabilidad de las observaciones y por consiguiente han originado ahorros considerables.

Para seleccionar un arreglo ortogonal se tiene que tomar en cuenta lo siguiente:

1. El número de factores e interacciones de interés.

2. El número de niveles para los factores de interés.

3. La resolución deseada en el experimento o limitaciones de costo.

Los primeros dos elementos determinan el más pequeño de los arreglos ortogonales que se puede usar, pero esto da como resultado la resolución más baja y el costo más bajo. El experimentador puede escoger un arreglo ortogonal más grande que le puede dar más resolución pero puede resultar más costoso (Ross, 1996).

Un AO es una tabla de combinaciones de niveles de los factores y resultados ordenados ortogonalmente.

Convención para designar los OA es La (b^c)

Donde: a= número de corridas experimentales

b= numero de niveles para cada factor

c= número de columnas en el AO

L= indica que se trata de un AO

Por ejemplo la notación L8(2^7) indica que se trata de un AO con 8 tratamientos o corridas experimentales, con siete grados de libertad o columnas para el arreglo y 2 niveles.

Existen dos tipos de OAs que se pueden ver en el apéndice de Ross (1996). Arreglos de dos niveles en el apéndice B de Ross (1996): L4 L8 L12 L16 L32. Arreglos de tres niveles en el apéndice C de Ross (1996): L9 L18 L27.

El número designado al arreglo indica el número de pruebas (diferentes combinaciones posibles) en el arreglo. Un L8 tiene 8 pruebas por ejemplo. Un factor debe ser asignado a todas las columnas del OA. Los 1s, 2s o 3s designan los niveles del factor asignado (Ross, 1996).

Selección del OA.

El número de niveles utilizados en los factores se usan para seleccionar dos niveles o tres. Si los factores son de dos niveles se escoge el arreglo del apéndice B de Ross (1996). Si son de tres niveles se escoge del apéndice C de Ross (1996). Si algunos factores tienen dos niveles y otros factores tres niveles entonces la mayor cantidad de factores con cierto nivel definen el arreglo. El apéndice D de Ross (1996) contiene tablas donde se pueden seleccionar diferentes opciones tomando en cuenta el número de factores, los posibles AO que se pueden utilizar con sus resoluciones. Normalmente se empieza a experimentar con el arreglo más sencillo (baja resolución o fracción factorial pequeño). Posteriormente se puede aumentar la resolución a un diseño factorial completo. Esta estrategia disminuye el número total de pruebas y resulta menos costoso. Una vez seleccionado el arreglo apropiado, los factores pueden ser asignados a las columnas del arreglo y ubicar las interacciones (Ross, 1996).

Ortogonalidad.

Un diseño ortogonal permite comparar, con la misma eficiencia, los niveles de los factores bajo varias condiciones. La característica principal en un diseño de experimentos debe ser la reproducibilidad de los resultados. El propósito de los arreglos ortogonales es comparar los niveles de los factores bajo diferentes condiciones de la manera más eficiente. Cada par de columnas en el arreglo es ortogonal, es decir, contiene el mismo número de 1s y 2s (Centro de Calidad ITESM, 1989).

Grados de libertad.

Los grados de libertad son una medida de la cantidad de información que puede obtenerse. Si tenemos más grados de libertad, mayor será la información. Hablamos de grados de libertad en relación con un factor. Cuando se investiga el efecto de un factor dado en un experimento, se compara el desempeño del producto o proceso considerando el factor mencionado en varios niveles. Por ejemplo, supongamos que el factor B tiene tres niveles, B1, B2 y B3 y se busca cuál de ellos tiene el mejor desempeño. Las comparaciones pueden ser las siguientes:

1. B2 con B1,
2. B3 con B1.

Como se hacen dos comparaciones entonces tiene 2 grados de libertad. Los grados de libertad son el número de comparaciones que es necesario hacer entre los niveles, sin ser redundantes. Matemáticamente, los grados de libertad de un factor son el número de experimentos menos 1. Un L8 tiene 7 grados de libertad, un L4 tiene 3 grados de libertad. Esto representa el número de afirmaciones independientes que pueden hacerse sobre un factor (Centro de Calidad ITESM, 1989).

Efecto de interacción de factores.

Hay pares de factores que tienen interacción entre ellos y proporcionan una sinergia en el efecto. Supongamos que tenemos dos factores con dos niveles cada uno, A1, A2, B1 y B2. De estos factores resulta que B2 se incrementa considerablemente en el nivel de A2. Pero el nivel B1 se mantiene estable en los dos niveles de A, ver figura 2-5.

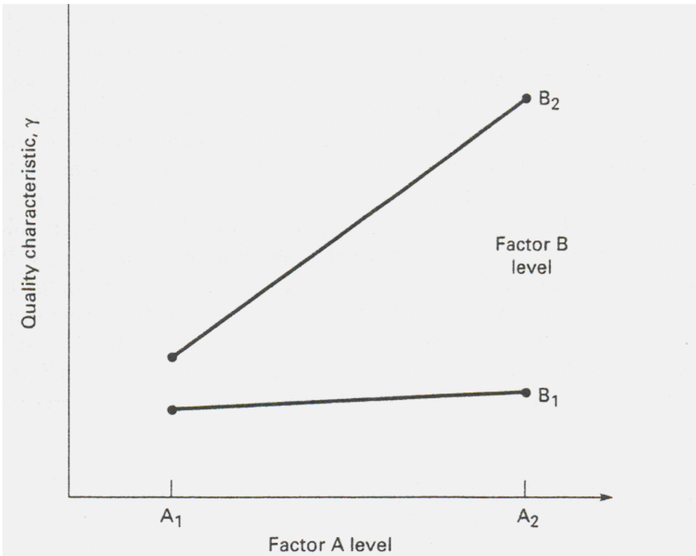


Figura 2-5. Gráfica de interacción.

Cuando se realiza un experimento con dos factores se tienen que estimar estadísticamente tres elementos:

1. Efecto del factor A para cambiar el resultado.

2. Efecto del factor B para cambiar el resultado.

3. El efecto de interacción entre A y B para cambiar el resultado.

Estos tres puntos se analizan estadísticamente por separado.

El OA más pequeño para estos casos puede dejar columnas sin factores, por ejemplo, una lista de 12 factores puede ser analizado en un L15 y quedarían libres tres columnas. Estas columnas se pueden utilizar para analizar interacciones específicas o para agregar más factores. Es preferible agregar más factores al estudio que estudiar las interacciones (Ross, 1996).

Asignación de factores y ubicación de interacciones.

La propiedad matemática de los OA funciona de la siguiente manera:

Si un factor es asignado a una columna particular en un arreglo para dos niveles y un segundo factor se asigna a otra columna, la tercera columna será automáticamente para la interacción. Taguchi ha proporcionado dos herramientas para la asignación de factores y la ubicación de las interacciones en los arreglos:

1. Tablas de interacción.

2. Gráficas lineales.

Cada OA tiene una tabla de interacción y una configuración particular en las gráficas lineales. Las tablas de interacción contienen todas las posibles interacciones entre los factores (columnas). Las gráficas lineales indican varias columnas donde los factores pueden ser asignados y las columnas que subsecuentemente evalúan las interacciones de esos factores. En un L4 se puede asignar el factor A a la columna 3 y el factor B a la columna 1, entonces la interacción se da en la columna 2 según la tabla de interacciones, ver figura 2-6.

Column	2	3
1	3	2
2		1

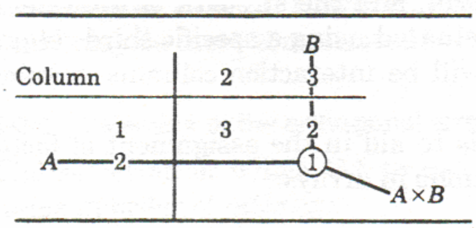


Figura 2-6. Tabla de columnas para un L4 con interacciones.

El L4 tiene una gráfica lineal como se ve en la figura anterior. Cualquier asignación resulta equivalente. La gráfica lineal representa que el factor A puede ser asignado a la columna 1, el factor B a la columna 2 y la interacción a la columna 3. Los puntos representan una columna y la línea representa la columna que evalúa la interacción de esos puntos (Ross, 1996).

Otra forma de seleccionar el OA es utilizar los grados de libertad. Se comienza definiendo los grados de libertad requeridos dependiendo del número de factores, el número de niveles para cada factor y las interacciones que se desean investigar. Por ejemplo, se desea investigar 5 factores A, B, C, D y E con dos niveles y las interacciones AXB y BXC. Primero se definen los grados de libertad requeridos:

Cada factor de dos niveles tiene 2-1=1g.l.

Cada interacción tiene 1X1=1g.l.

Total de g.l.=(5 factores X 1g.l.) + (2 interacciones X 1 g.l.) = 7 g.l.

Por lo tanto, se requieren 7 g.l. para obtener la información deseada. El arreglo L8 es un diseño de dos niveles con 7 g.l. exactamente. Por lo tanto, el L8 debe funcionar para esta situación (Centro de Calidad ITESM, 1989).

El concepto de gráficas lineales y sus modificaciones ha resultado confuso para personas técnicas, por eso, las tablas que llegan hasta un L32 comprenden la mayor parte de las situaciones tomando en cuenta la resolución del experimento (Ross, 1996).

Resolución del experimento.

La resolución es una medida de la cantidad de confusión entre factores en una columna. La resolución disminuye cuando se agregan más factores al arreglo. Por ejemplo, en un L8 con tres factores tiene una resolución de 4, la más alta (diseño factorial completo), ya que las columnas sobrantes son la interacción entre los factores. Si se agrega un factor más, ese factor se confunde con la interacción de los otros tres factores. Cada vez que se agrega un factor, la resolución disminuye y el número de columnas que se confunde es mayor (Ross, 1996).

2.5.2 Análisis de resultados.

Una vez realizadas las corridas, de acuerdo al diseño seleccionado se procede a efectuar el análisis de los datos e interpretar los resultados, que es la fase final del DDE. Además se deben tomar decisiones sobre qué parámetros afectan el desempeño del producto o proceso en estudio. Estas decisiones pueden ser hechas a través de alguno de los métodos siguientes:

1. Método de observación.
2. Método de rangos.
3. Método de efectos de columna.
4. Método de gráficas.
5. Análisis de varianza.

Algunos de estos métodos son de naturaleza subjetiva. El análisis de varianza (ANOVA) es el método estadístico predominantemente usado para el análisis y toma de decisiones puesto que es el más objetivo. Los otros métodos deben usarse como métodos de soporte o técnicas de reforzamiento.

Debe notarse que la determinación de factores con influencia y sus relativas fuerzas dependen de los niveles que se eligen. A pesar del método analítico, cualquier factor tiende a verse menos importante si los niveles elegidos están muy cerrados y cualquier factor tiende a verse más importante cuando sus niveles están más separados. Para ilustrar los siguientes métodos usaremos un ejemplo escrito por Ross (1996).

Ejemplo de bomba de agua. Un nuevo diseño tiene fugas en una bomba de agua en casi todos los ensambles iniciales en el cuerpo de la bomba. Las fugas se observan en la prueba del ensamble final. Los rangos de fuga van desde no-fuga hasta fuga severa, esta última con muchas gotas por minuto después de haber sido estabilizado en su temperatura de operación. El grado de fuga se clasifica con 0 cuando no existe y como 5 la fuga más severa. Los factores que influyen en la fuga son diseño de junta, diseño de tapa, torque de tortillería, secuencia del torque de tortillería, sello de junta, y acabado de la tapa de la bomba. El problema tiene 7 factores y dos niveles como se muestra en la tabla 2-1 y los resultados se muestran en la tabla 2-2.

	Factors	Level 1	Level 2
Water pump leak experiment	A cover design	Production	New
	B gasket design	Production	New
	C front bolt torque	LSL	USL
	D sealant	No	Yes
	E pump finish	Rough	Smooth
	F back bolt torque	LSL	USL
	G torque sequence	Front-back	Back-front
Die-cast piston experiment	A copper %	LSL	USL
	B magnesium %	LSL	USL
	C zinc %	LSL	USL
	D die cooling	On	Off
	E air cooling	On	Off
	Z piston position	Dome	Skirt

Tabla 2-1 Tabla de factores y niveles.

	Factors							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	
	Column no.							
Trial no.	1	2	3	4	5	6	7	Data leak rating
1	1	1	1	1	1	1	1	4
2	1	1	1	2	2	2	2	3
3	1	2	2	1	1	2	2	1
4	1	2	2	2	2	1	1	0
5	2	1	2	1	2	1	2	2
6	2	1	2	2	1	2	1	4
7	2	2	1	1	2	2	1	0
8	2	2	1	2	1	1	2	1

Tabla 2-2 Arreglo ortogonal Taguchi L8 con respuestas.

Método de observación.

Éste es un método preliminar de interpretación que puede usarse cuando la variable de respuesta o característica de calidad es del tipo nominal es mejor, pero trabaja mejor los casos cuando es menor es mejor o mayor es mejor. Este método es el más simple y el más fácil de interpretar para los experimentos con estructura de AO. Consiste en observar aquellas corridas con resultados muy parecidos y tienen cierto valor técnico. Cuando se ha identificado el grupo de resultados más deseable y consistente, entonces los niveles de los factores más importantes serán comunes para ese grupo de corridas. Normalmente, la porción de pruebas que tienen resultados similares será de ½ del experimento (un factor fuerte), ¼ del experimento con dos factores fuertes, 1/8 del experimento (tres factores fuertes), etc., cuando se usan OA de dos niveles. Los resultados caerán en grupos de 1/3 del experimento (un factor fuerte), 1/9 del experimento (dos factores fuertes), etc., cuando se usan arreglos con tres niveles. En las pruebas 4 y 7 se encuentran los resultados más favorables con 0 como clasificación de fuga. La característica de este experimento es menor es mejor. Cuando observamos la columna 1, en el factor A, se puede ver que el nivel de A en la prueba 4 es 1 y el nivel de la prueba 7 es 2. Este factor no contribuye nada significativo a los resultados exitosos. Columnas 2, 5 y 7 tienen niveles comunes para las pruebas 4 y 7 (B2 nuevo diseño de junta, E2 acabado suave, G1 secuencia de torque de frente a atrás). Es probable que estos factores a estos niveles contribuyan a los buenos resultados. Así que en lugar de controlar 7 factores, con 3 es suficiente. Sin embargo, como 2 pruebas de 8 contribuyen a ¼ del experimento, quiere decir que 2 factores tienen influencia en reducir las fugas de agua. La pregunta es ¿Cuáles serían los 2 factores de los 3 que influyen más en los resultados? (Ross, 1996).

Método de rangos

Es un método que funciona como extensión del método de observación. Consiste en ordenar las corridas en orden descendente: de la mejor a la peor. Es de interés aquel factor en el cual todas las corridas con los mejores resultados son consistentes, es decir, caen en un nivel particular y todos los malos en el otro extremo del nivel.

Cuando se trata de AO de dos niveles se deben formar números de grupos pares y cuando se trata de AO de tres niveles deben formarse números de grupos impares. Si no es así, entonces seguramente existe algún factor, que está introduciendo variación al experimento y que no se consideró en el estudio. En el ejemplo de la bomba de agua, se clasifican desde mejor hasta peor a los correspondientes niveles de las pruebas. En este experimento existe una relación muy fuerte en el factor B, diseño de junta. Todo el nivel en B2 tiene buenos resultados en la fuga y todo el nivel B1 tiene malos resultados en la fuga. El factor E tiene una influencia moderada ya que dos 2s están en el lado bueno de la escala y dos 1s están en el lado malo. Debe notarse que la relación del factor E permanece intacta, dentro de los niveles de B, indicando influencia secundaria con el factor B. El nuevo diseño de junta, junto con un acabado suave debe dar el mejor resultado (Ross, 1996). Ver tabla 2-3.

	Factors							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	
	Column no.							
Trial no.	1	2	3	4	5	6	7	Data leak rating
4	1	2	2	2	2	1	1	0
7	2	2	1	1	2	2	1	0
3	1	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2	1
5	2	1	2	1	2	1	2	2
2	1	1	1	2	2	2	2	3
1	1	1	1	1	1	1	1	4
6	2	1	2	2	1	2	1	4
		1st			2nd			

Tabla 2-3. Tabla de rangos.

Método de efectos de columna.

Esta aproximación usada por Taguchi es una simplificación del ANOVA para identificar qué columnas (factores) tienen mayor significancia en la variable de respuesta. El método consiste en restar la suma de todos los datos asociados con el nivel 2 a la suma de los datos asociados con el nivel 1. De este modo además de identificar los factores de mayor influencia, también se puede apreciar su importancia relativa entre los factores y los niveles más recomendables de estos factores. Los factores con mayor influencia corresponderán a las diferencias más grandes. El signo negativo o positivo indica el tipo de correlación positiva o negativa.

Continuando con el ejemplo de la bomba de agua, se observa una diferencia entre renglones en el factor B donde tiene un efecto de (-11), el factor E es el segundo efecto más grande (-5) mientras que los demás son efectos débiles. El método de observación mostró que los factores más importantes eran B, E y G, mientras que en el de rangos sólo fueron el B y E. El método de observación usó poca proporción de la información, mientras que el método de rangos y el de efectos de columna utilizan toda la información. Un solo factor resalta como factor de influencia al considerar toda la información. Estos métodos no utilizan criterio de decisión estadística. Deben aplicarse en conjunto con ANOVA para una evaluación comprensiva (Ross, 1996). Ver tabla 2-4.

	Factors							
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	
	Column no.							
Trial no.	1	2	3	4	5	6	7	Data leak rating
1	1	1	1	1	1	1	1	4
2	1	1	1	2	2	2	2	3
3	1	2	2	1	1	2	2	1
4	1	2	2	2	2	1	1	0
5	2	1	2	1	2	1	2	2
6	2	1	2	2	1	2	1	4
7	2	2	1	1	2	2	1	0
8	2	2	1	2	1	1	2	1
Sum_1	8	13	8	7	10	7	8	
Sum_2	7	2	7	8	5	8	7	
Difference	−1	−11	−1	1	−5	1	−1	

Tabla 2-4. Tabla de efectos de columna.

Método de gráficas.

Con este método se realizan gráficas de los resultados obtenidos en el experimento y éstas pueden ser:

a) Por niveles de los factores.

b) Por niveles de las interacciones de los factores significativos para observar la influencia de la interacción.

Los efectos de columna y el ANOVA indican los valores que se grafican. Se divide la suma del efecto (de cada nivel) entre el número de corridas del nivel para obtener el resultado promedio. Se deben graficar con la misma escala en ambos ejes, aunque en gráficas individuales. Mientras mayor sea la pendiente de la línea, más fuerte es el efecto. Los dos factores que influyen son el diseño de junta B y el acabado E. Utilizando las sumas de los niveles 1 y 2 se sacan los promedios al dividirlos entre 4. Luego se procede a hacer la gráfica de efectos. Por lo que B1 obtiene el valor de 3.25 y B2 0.5. El promedio de fuga para el nivel E1 es 2.5 y de E2 es 1.25 (Ross, 1996). Ver figura 2-7.

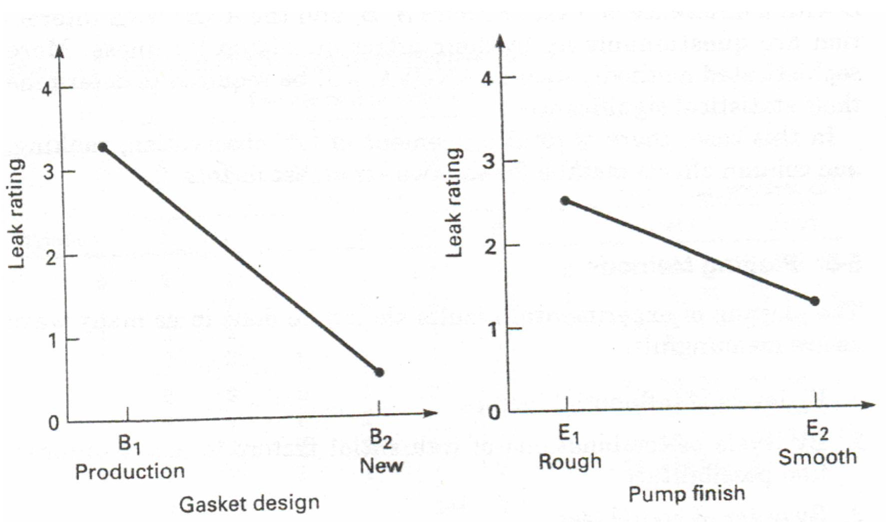


Figura 2-7. Gráfica de efectos.

Método de análisis de varianza.

Este método fue desarrollado por Fisher (1930). El ANOVA es una herramienta estadística que tiene como objetivo ayudar en la toma de decisiones para detectar diferencias en el desempeño promedio de grupos de productos estudiados. La decisión toma en cuenta la variación. Los resultados de un análisis de varianza (ANOVA) se suelen representar en una tabla como a continuación se mostrará. En este caso para dos factores principales, a dos niveles, y una interacción. La suma de cuadrados (SC) total estima la varianza σ^2 en el supuesto de que todas las muestras provengan de una única población; la SC de cada factor (y del error) estiman o miden variabilidad de los datos debida exclusivamente a ese factor (o al error). Dependiendo de la magnitud del valor del estadístico de prueba respecto al estadístico de tablas, se concluye si un factor es significativo o no para el proceso en estudio. En esta tabla a representa el número de niveles del factor, igual que b. El número de réplicas es n (Ross, 1996). En los últimos ejemplos de este capítulo se pueden observar los análisis de varianza.

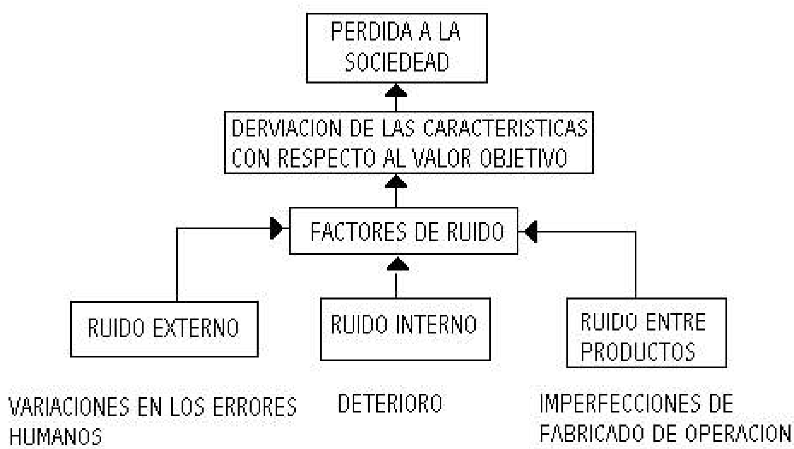
Factor	SC	gl	CM	Fcalc	Valor p
A	SC_A	a-1	CM_A	CM_A / CM_E	P(Ftablas > Fcalc)
B	SC_B	b-1	CM_B	CM_B / CM_E	P(Ftablas > Fcalc)
AB	SC_{AB}	(a-1)(b-1)	CM_{AB}	CM_{AB} / CM_E	P(Ftablas > Fcalc)
Error	SC_E	ab(n-1)	CM_E		
Total	SC_T	abn-1			

ANOVA

2.5.3 Diseño de parámetros.

Un experimento con diseño de parámetros implica dos tipos de factores: los factores de control y los factores de ruido. Un factor de control es aquel cuyos niveles se pueden fijar y mantener. Un factor de ruido es aquel cuyos niveles no se pueden fijar ni mantener, aun cuando afecte el rendimiento de una característica funcional.

Los factores que causan que una característica funcional, como por ejemplo, la eficiencia del combustible, los cambios de presión, la maniobrabilidad, etc., se desvíe de su valor objetivo, se llaman factores de ruido. Los factores de ruido causan variación y pérdida de calidad. Durante su larga experiencia, Taguchi ha observado que esta pérdida de calidad, en términos de tiempo y dinero, tiene impacto tanto en los consumidores como en los fabricantes, y en último término en la sociedad. En la siguiente gráfica se muestran los diferentes tipos de ruido que desvían la característica de su valor objetivo. (Centro de Calidad ITESM, 1989).



La temperatura, altura, y nivel de combustible, son considerados factores externos de ruido porque ocurren fuera del producto. Otros dos tipos de factores que existen son los internos (ej.: partes críticas de la maquinaria se deterioran) y los factores entre productos cuando por ejemplo hay variabilidad de pieza a pieza en los componentes fabricados del carro.

Mucha gente cree que las interacciones no son consideradas en los Métodos Taguchi; sin embargo, esto no es cierto. De hecho, Taguchi considera las interacciones como uno de los puntos más importantes de su enfoque. Una diferencia clave de los Métodos Taguchi es el énfasis en medir las cosas correctas para la recolección de información. En lugar de medir síntomas causados por la variabilidad de la función, como la tasa de defectos o fallas, medimos una respuesta relacionada con la energía.

Cualquier sistema usa energía para transformar y cumplir una función deseada. Reducir la variabilidad de las transformaciones de energía minimizará o eliminará los síntomas. Cuando tenemos ruido, nos lleva a crear un producto o proceso robusto que es aquel que es menos sensible al ruido. (Centro de Calidad ITESM, 1989).

El diseño de parámetros tiene como propósito determinar los parámetros dentro de los que un producto o proceso es funcional, tiene un alto nivel de rendimiento y es menos sensible a los factores de ruido.

El diseño de parámetros examina las interacciones entre los factores de control y los de ruido, con el fin de robustecer un producto o proceso. Busca los niveles de parámetros en los que la característica de calidad es estable, a pesar del uso de componentes y materiales baratos y de las condiciones ambientales. Los factores de control y ruido deben ser asignados en diferentes grupos para el estudio de la robustidad, el cual es significativamente diferente del enfoque tradicional, donde no hay distinciones entre los factores de ruido y control.

La medida estadística del rendimiento que se usa para evaluar la calidad del producto es la denominada relación señal/ruido. La relación señal/ruido mide el rendimiento y el efecto de los factores de ruido en dicho rendimiento. La proporción señal - ruido es un índice de robustidad de calidad, y muestra la magnitud de la interacción entre factores de control y factores de ruido.

La relación señal/ruido está ligada directamente con la función de pérdida. Es una evaluación de la estabilidad del rendimiento de una característica de calidad. La función pérdida permite evaluar el efecto de dicha estabilidad en términos monetarios. Cuanto mayor sea esta relación implica menor pérdida, medida con su correspondiente función de pérdida.

También, esta relación es una medida objetiva, ya que toma en cuenta la media y la variación. Al igual que en la función de pérdida, los 3 tipos estándar de relación s/r son:

- Menor es mejor.
- Mayor es mejor.
- Nominal es mejor.

Arreglos para el diseño de parámetros.

El primer paso en el diseño de parámetros consiste en separar los factores de control de los de ruido, pues en el diseño de parámetros se trata de seleccionar factores de control con las mínimas interacciones, con el fin de estudiar la interacción entre los factores de control y los de ruido. Ver tabla 2-5.

	Factores de control							Factores de ruido	
	A	B	C	D	E	F	G		
Ls	1	2	3	4	5	6	7	N1	N2
11	1	1	1	1	1	1			
21	1	1	2	2	2	2			
31	2	2	1	1	2	2			
41	2	2	2	2	1	1			
52	1	2	1	2	1	2			
62	1	2	2	1	2	1			
72	2	1	1	2	2	1			
82	2	1	2	1	1	2			

	Factores de control							Factores de ruido				
	A	B	C	D	E	F	G	1	1	2	2	M
L8	1	2	3	4	5	6	7	1	2	1	2	N
1	1	1	1	1	1	1	1					
2	1	1	1	2	2	2	2					
3	1	2	2	1	1	2	2					
4	1	2	2	2	2	1	1					
5	2	1	2	1	2	1	2					
6	2	1	2	2	1	2	1					
7	2	2	1	1	2	2	1					
8	2	2	1	2	1	1	2					

Tabla 2-5. Arreglos L8 con un factor de ruido y con dos factores de ruido.

Estrategia para seleccionar los factores de ruido.

Es demasiado costoso el experimento que involucra un mayor número de factores de ruido. Si seleccionamos cuidadosamente los factores de ruido, el tamaño de nuestro experimento estará dentro de límites manejables.

Para evitar un experimento demasiado grande, podemos reunir varios ruidos dentro de 1, 2, ó 3 factores de ruido. Si no estamos seguros de cómo reunirlos, se colocan los ruidos dentro de un arreglo ortogonal y se seleccionan entonces aquéllos cuyo efecto sea mayor en el rendimiento del proceso.

Se seleccionan los ruidos más importantes. La experiencia ha demostrado que si un diseño robusto es robusto contra un ruido importante, es muy probable que lo sea incluso contra otros ruidos. Ver tabla 2-6.

	Arreglo interno							Arreglo externo			
Número	A 1	B 2	C 3	D 4	E 5	F 6	G 7	M 1, N 1, O 1	M 1, N 2, O 2	M 2, N 2, O 1	M 2, N 1, O 2
1	1	1	1	1	1	1	1				
2	1	1	1	2	2	2	2				
3	1	2	2	1	1	2	2				
4	1	2	2	2	2	1	1				
5	2	1	2	1	2	1	2				
6	2	1	2	2	1	2	1				
7	2	2	1	1	2	2	1				
8	2	2	1	2	1	1	2				

Tabla 2-6. Arreglo interno y externo.

Relación señal/ruido para el tipo menor es mejor.

Cuando la característica de calidad puede clasificarse como menor es mejor, la relación estándar señal/ruido es como sigue:

Con n observaciones, $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$

MSD = Medida de la desviación cuadrada

$$MSD = \frac{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + \cdots + Y_n^2}{n}$$

S/R = -10 log (MSD) = $-10\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$

Para ilustrar un experimento de diseño de parámetros del tipo menor es mejor se presenta el siguiente ejemplo tomado de Centro de Calidad ITESM, (1989).

Ejemplo 1.

Factores de control.

A: Tiempo de ciclo – 2 niveles.

B: Temperatura de molde – 2 niveles.

C: Grosor de la cavidad – 2 niveles.

D: Presión de sostenimiento – 2 niveles.

E: Velocidad de la hélice – 2niveles.

F: Tiempo de sostenimiento – 2 niveles.

G: Tamaño de la entrada – 2 niveles.

Factores de ruido.

H: % Repulverización – 2 niveles.

I: Contenido de humedad – 2 niveles.

J: Temperatura del ambiente – 2 niveles.

Respuesta: % de encogimiento.

Empleamos un arreglo L8 para el arreglo interior y un L4 para el exterior. Ver tabla 2-7.

	Arreglo interno							Arreglo externo				
								H I J: 111	122	221	212	
	A	B	C	D	E	F	G					
Numero	1	2	3	4	5	6	7					S/R
1	1	1	1	1	1	1	1	2.2	2.1	2.3	2.3	-6.95
2	1	1	1	2	2	2	2	0.3	2.5	2.7	0.3	-5.35
3	1	2	2	1	1	2	2	0.5	3.1	0.4	2.8	-6.50
4	1	2	2	2	2	1	1	2.0	1.9	1.8	2.0	-5.70
5	2	1	2	1	2	1	2	3.0	3.1	3.0	3.0	-9.62
6	2	1	2	2	1	2	1	2.1	4.2	1.0	3.1	-9.12
7	2	2	1	1	2	2	1	4.0	1.9	4.6	2.2	-10.57
8	2	2	1	2	1	1	2	2.0	1.9	1.9	1.8	-5.58

Tabla 2-7. Arreglo L8 con índices s/r.

Una vez calculadas las relaciones s/r, se procede a elaborar la tabla de respuesta, luego las gráficas y por último la tabla de ANOVA para elegir la mejor combinación. Ver tabla 2-8, figura 2-8 y tabla 2-9.

Response Table for Signal to Noise Ratios
Smaller is better

Level	A	B	C	D	E	F	G
1	-6.125	-7.760	-7.114	-8.409	-7.038	-6.961	-8.085
2	-8.722	-7.086	-7.732	-6.438	-7.809	-7.885	-6.762
Delta	2.596	0.674	0.618	1.971	0.771	0.924	1.323
Rank	1	6	7	2	5	4	3

Tabla 2-8 Respuesta para los índices s/r.

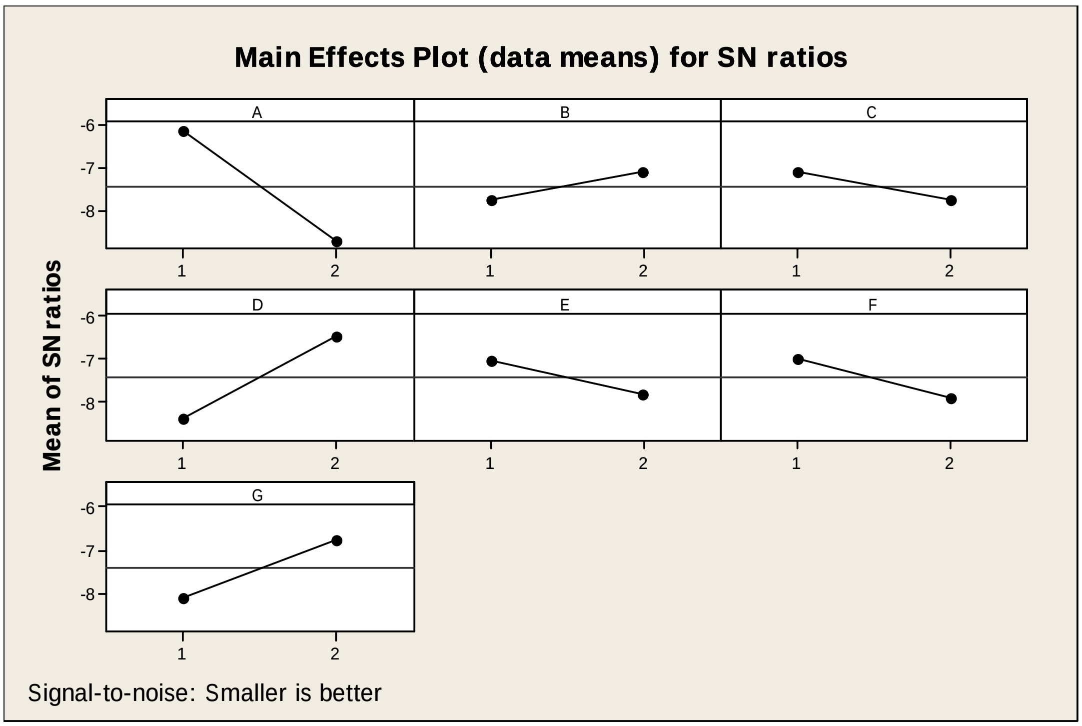


Figura 2-8 Gráficas de efectos principales de índices s/r.

Analysis of Variance for SN ratios

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	13.4826	13.4826	13.4826	*	*
B	1	0.9076	0.9076	0.9076	*	*
C	1	0.7646	0.7646	0.7646	*	*
D	1	7.7736	7.7736	7.7736	*	*
E	1	1.1885	1.1885	1.1885	*	*
F	1	1.7066	1.7066	1.7066	*	*
G	1	3.4996	3.4996	3.4996	*	*
Residual Error	0	*	*	*		
Total	7	29.3231				

Tabla 2-9 Análisis de varianza para los índices s/r.

Se debe fijar el factor A al nivel 1. Con esto se disminuirá la variabilidad en el proceso. Este factor ya no se usa para ajustar la media, aunque sí aparezca en la tabla de análisis de varianza. Se realiza el mismo procedimiento que se utilizó para los índice s/r pero ahora para las medias. Se hace la tabla de respuesta, las gráficas y la tabla de análisis de varianza para las medias. Ver tabla 2-10, figura 2-9 y tabla 2-11.

Response Table for Means

Level	A	B	C	D	E	F	G
1	1.825	2.325	2.188	2.531	2.106	2.269	2.481
2	2.675	2.175	2.313	1.969	2.394	2.231	2.019
Delta	0.850	0.150	0.125	0.563	0.288	0.037	0.463
Rank	1	5	6	2	4	7	3

Tabla 2-10 Respuesta para las medias.

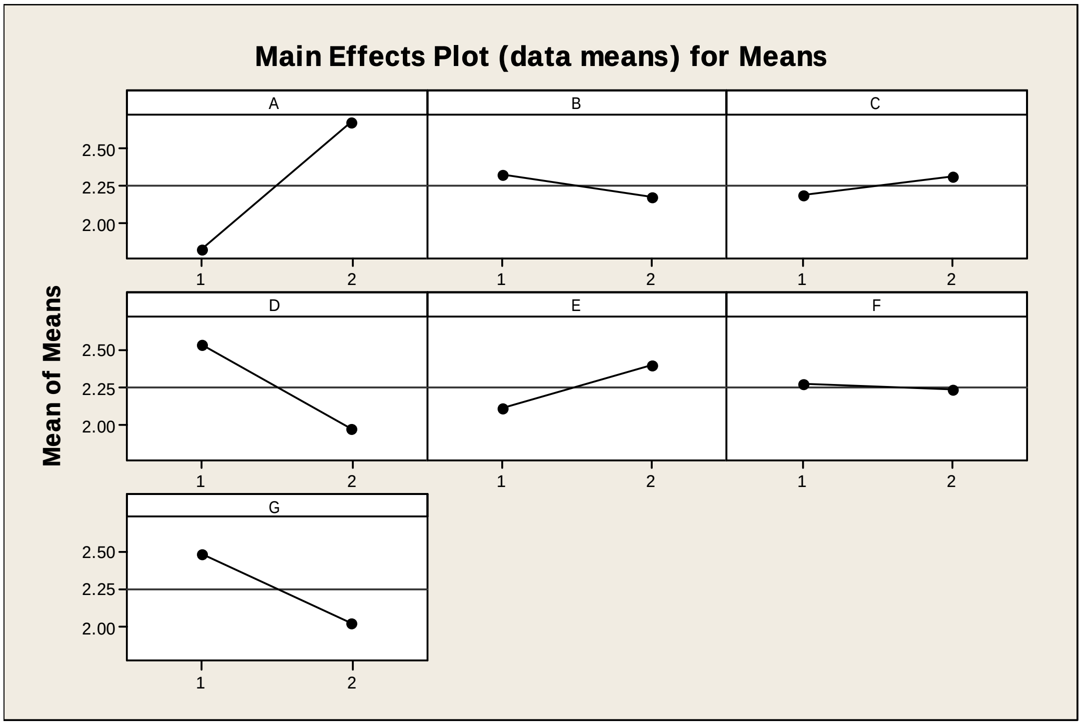


Figura 2-9 Gráficas de efectos principales de las medias.

```
Analysis of Variance for Means

Source          DF   Seq SS   Adj SS   Adj MS  F  P
A                1  1.44500  1.44500  1.44500  *  *
B                1  0.04500  0.04500  0.04500  *  *
C                1  0.03125  0.03125  0.03125  *  *
D                1  0.63281  0.63281  0.63281  *  *
E                1  0.16531  0.16531  0.16531  *  *
F                1  0.00281  0.00281  0.00281  *  *
G                1  0.42781  0.42781  0.42781  *  *
Residual Error   0        *        *        *
Total            7  2.75000
```

Tabla 2-11 Análisis de varianza para las medias.

El factor más significativo es el factor D y debe fijarse en el nivel 2 para que adquiera el valor de 1.969. Los demás factores pueden quedar al valor más económico o puede tomarse la mejor combinación que es A1, B2, C1, D2, E1, F1, G2, según convenga.

Relación señal/ruido para el tipo mayor es mejor.

Mayor es mejor. Cuando la característica de calidad es del tipo mayor es mejor, la relación estándar de s/r es como sigue:

$$MSD = \frac{\left(\frac{1}{Y_1^2} + \frac{1}{Y_2^2} + \frac{1}{Y_3^2} + \ldots + \frac{1}{Y_n^2}\right)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{Y_i^2}$$

s/r = -10 log MSD

A continuación se ilustra con un ejemplo tomado de Centro de Calidad ITESM, (1989).

Ejemplo 2.

Respuesta: Oposición al desgarre del plástico.

Factores de control.

	Nivel 1	Nivel 2
A: Peso molecular	Bajo	Alto
B: Tipo de alumínio	I	II
C: Material de limpieza	Existente	Nuevo
D: Porcentaje de catalizador	Bajo	Alto
E: Presión de molido	Baja	Alta
F: Tiempo de reposo	Bajo	Alto
G: Temperatura de reposo	Baja	Alta
H: Tiempo luego del reposo	Bajo	Alto
I: Temperatura luego del reposo	Baja	Alta

Factores de ruido.

M: Tipo de superficie	Rugosa	Lisa
N: Proveedor del plástico	I	II
O: Temperatura inicial del metal	Baja	Alta

	Arreglo interno											Arreglo externo				
											M N O	111	122	212	221	
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	e	e					
Numero	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11					S/R
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	32.5	45.0	35.0	50.0	31.78
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	62.5	67.5	55.0	80.0	36.19
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	20.0	30.0	30.0	37.5	28.67
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	20.0	27.5	27.5	50.0	28.58
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	42.5	55.0	32.5	60.0	32.78
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1	22.5	45.0	47.5	50.0	30.82
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	60.0	80.0	45.0	62.5	35.29
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2	45.0	47.5	27.5	55.0	31.89
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	47.5	62.5	75.0	80.0	35.88
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	55.0	62.5	55.0	47.5	34.68
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	60.0	45.0	40.0	42.5	33.12
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	45.0	35.0	20.0	30.0	29.10

Tabla 2-12 Arreglo interior L12 (2^{11}) y arreglo exterior L4.

Response Table for Signal to Noise Ratios
Larger is better

Level	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	31.47	33.28	32.44	32.74	33.65	31.35	32.82	30.90	32.24
2	33.33	31.51	32.35	32.06	31.15	33.45	31.98	33.90	32.56
Delta	1.86	1.77	0.09	0.68	2.50	2.10	0.84	3.00	0.32
Rank	4	5	9	7	2	3	6	1	8

Tabla 2-13 Respuesta para los índices s/r.

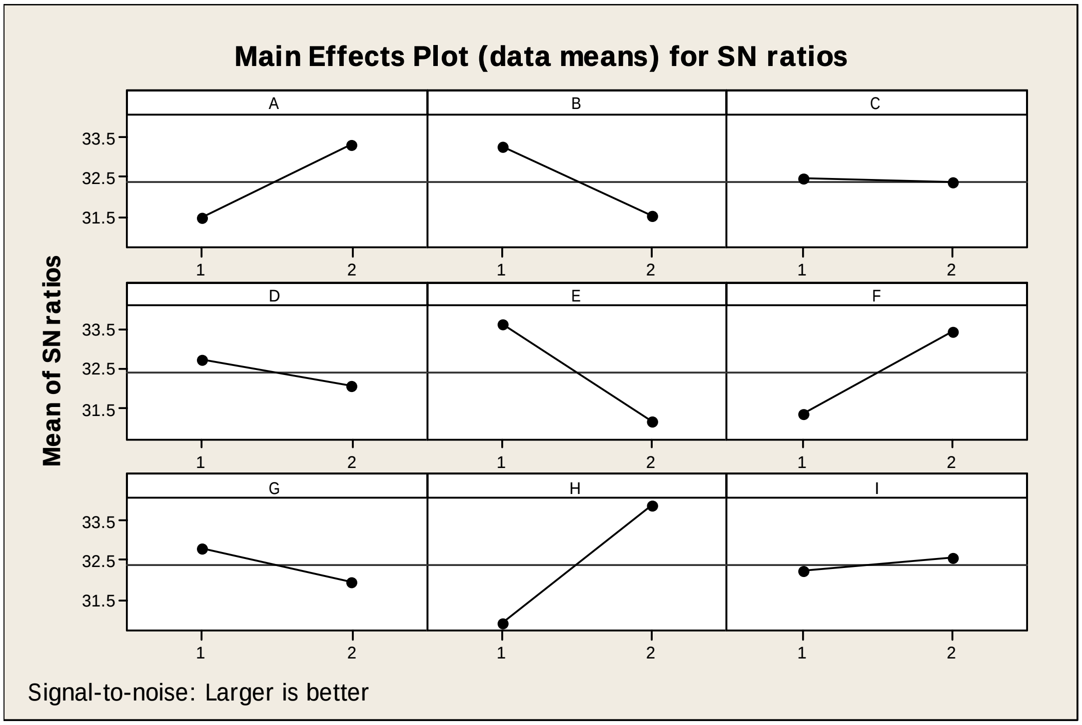


Figura 2-10 Gráfica de efectos para los índices s/r.

Analysis of Variance for SN ratios

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	10.3449	10.3449	10.3449	28.84	0.033
B	1	9.3688	9.3688	9.3688	26.12	0.036
C	1	0.0221	0.0221	0.0221	0.06	0.827
D	1	1.3732	1.3732	1.3732	3.83	0.190
E	1	18.6915	18.6915	18.6915	52.11	0.019
F	1	13.1733	13.1733	13.1733	36.72	0.026
G	1	2.1216	2.1216	2.1216	5.91	0.136
H	1	27.0800	27.0800	27.0800	75.49	0.013
I	1	0.3024	0.3024	0.3024	0.84	0.455
Residual Error	2	0.7174	0.7174	0.3587		
Total	11	83.1953				

Tabla 2-14 Tabla de análisis de varianza para los índices s/r.

El factor más significativo es H y se fijaría en el nivel 2 para controlar la variabilidad en el proceso.

Response Table for Means

Level	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	42.71	51.35	47.29	47.60	51.98	41.77	47.60	39.06	45.31
2	51.04	42.40	46.46	46.15	41.77	51.98	46.15	54.69	48.44
Delta	8.33	8.96	0.83	1.46	10.21	10.21	1.46	15.63	3.13
Rank	5	4	9	7.5	2.5	2.5	7.5	1	6

Tabla 2-15 Respuesta para las medias.

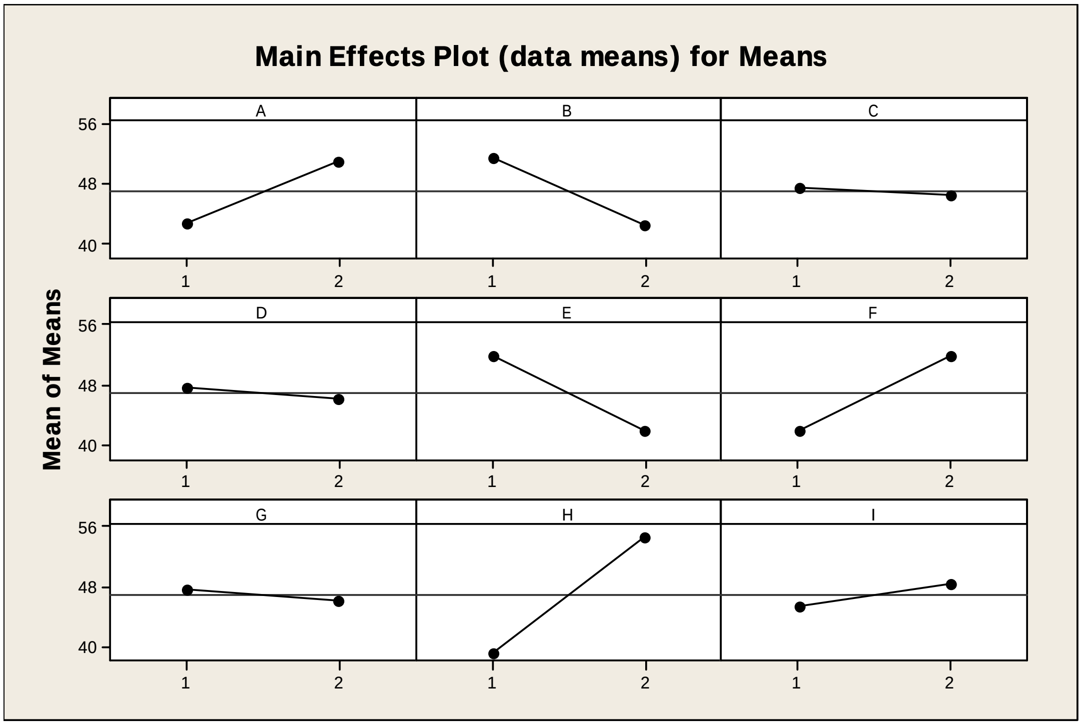


Figura 2-11 Gráficas de efectos principales para las medias.

Analysis of Variance for Means

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	208.33	208.333	208.333	14.48	0.063
B	1	240.76	240.755	240.755	16.73	0.055
C	1	2.08	2.083	2.083	0.14	0.740
D	1	6.38	6.380	6.380	0.44	0.574
E	1	312.63	312.630	312.630	21.73	0.043
F	1	312.63	312.630	312.630	21.73	0.043
G	1	6.38	6.380	6.380	0.44	0.574
H	1	732.42	732.422	732.422	50.90	0.019
I	1	29.30	29.297	29.297	2.04	0.290
Residual Error	2	28.78	28.776	14.388		
Total	11	1879.69				

Tabla 2-16 Análisis de varianza para las medias.

En el análisis de varianza de medias, se fijaría el factor E en nivel 1 para controlar la media y tome el valor de 51.98. Los demás factores pueden fijarse al valor más económico o utilizar la mejor combinación que es: A2, B1, C1, D1, E1, F2, G1, H2, I2, según convenga.

Relación señal/ruido para el tipo nominal es mejor.

Nominal es mejor. Se utiliza cuando se necesita determinar un valor específico. Para este caso las fórmulas principales son las siguientes:

$$Sm = \frac{T^2}{n}$$

$$Ve = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \bar{y}\right)^2}{n-1}$$

$$\eta = \frac{1}{n} \frac{\left(Sm - Ve\right)}{Ve}$$

Donde Sm es la sensibilidad cuando se le aplica 10 log, T es el total de los datos, Ve es la varianza de la muestra y η mide la variación en relación con la media.

El diseño del experimento consiste en dos arreglos, uno interno para los factores de control y otro externo para los factores de ruido. Las respuestas se obtienen a través de todas las combinaciones de los niveles de los factores de los dos arreglos.

Las ventajas de la relación señal ruido son las siguientes:

- Considera tanto el promedio como la variación.
- Es la transformación de la información que nos da una medida de rendimiento en relación con el ruido.
- Está relacionado con costo.

A continuación se muestra el siguiente ejemplo tomado de Burguete (2000) donde un fabricante de piezas metálicas tiene como objetivo obtener el valor de 2mm/ pulg como valor nominal en la planicidad. Esta planicidad está medida en milésimas de pulgada (Burguete, 2000). En este caso se analizarán 4 factores que influyen en el proceso y 2 factores de ruido. El ejemplo se realiza excluyendo las interacciones.

Ejemplo 3.

Respuesta: Planicidad en milésismas de pulgada.

Factores de control.

Asignación	Factor	Niveles
A	Temperatura	1500 y 1600 °F
B	Presión	200 y 220 psi
C	Tiempo	8 y 12 segs.
D	Velocidad	80 y 100 gal/min
G	Modelo	Chico y Grande
H	Templabilidad	25 y 30 RC

								Arreglo externo						
							G H	11	12	21	22			
	A	B		C			D	Corrida 1	2	3	4			
Corrida	1	2	3	4	5	6	7					Total	Media	SN
1	1	1	1	1	1	1	1	1.1	1.2	1.3	1.1	4.7	1.20000	21.5836
2	1	1	1	2	2	2	2	1.2	1.3	1.2	1.3	5.0	1.23333	26.5928
3	1	2	2	1	1	2	2	2.0	2.1	2.2	2.1	8.4	2.10000	26.4444
4	1	2	2	2	2	1	1	2.1	2.2	2.1	2.0	8.4	2.13333	31.3524
5	2	1	2	1	2	1	2	1.0	1.4	1.2	1.3	4.9	1.20000	15.5630
6	2	1	2	2	1	2	1	1.2	1.3	1.5	1.0	5.0	1.33333	18.8190
7	2	2	1	1	2	2	1	1.6	2.1	2.4	2.0	8.1	2.03333	14.0334
8	2	2	1	2	1	1	2	1.9	2.0	2.3	2.5	8.7	2.06667	19.9372

Tabla 2-17 Arreglo interior L8 (2^7) y arreglo exterior L4.

```
Response Table for Signal to Noise Ratios
Nominal is best (10*Log(Ybar**2/s**2))

Level       A       B       C       D
1       26.49   20.64   19.41   21.45
2       17.09   22.94   24.18   22.13
Delta    9.41    2.30    4.77    0.69
Rank        1       3       2       4
```

Tabla 2-18 Respuesta para los índices s/r.

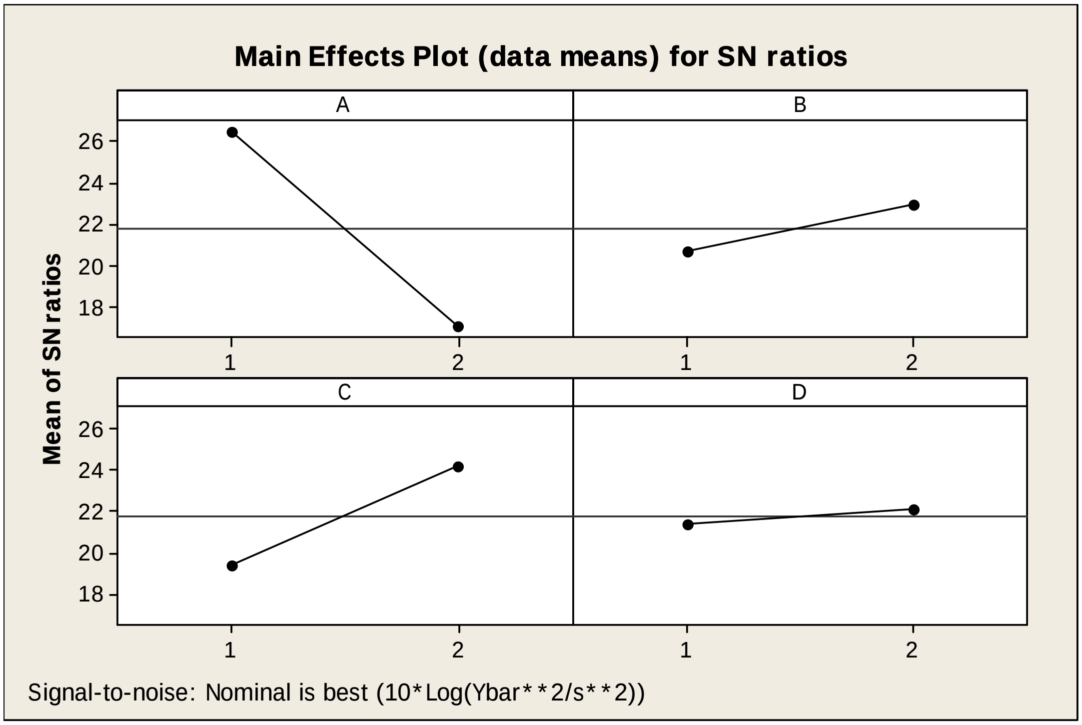


Figura 2-12 Gráfica de efectos principales para los índices s/r.

Analysis of Variance for SN ratios

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	176.913	176.913	176.913	39.43	0.008
B	1	10.600	10.600	10.600	2.36	0.222
C	1	45.491	45.491	45.491	10.14	0.050
D	1	0.945	0.945	0.945	0.21	0.678
Residual Error	3	13.462	13.462	4.487		
Total	7	247.412				

Tabla 2-19 Análisis de varianza para los índices s/r.

El factor A es el más significativo y se fija en el nivel 1 para controlar la variabilidad.

Response Table for Means

Level	A	B	C	D
1	1.667	1.242	1.633	1.675
2	1.658	2.083	1.692	1.650
Delta	0.008	0.842	0.058	0.025
Rank	4	1	2	3

Tabla 2-20 Respuesta para las medias.

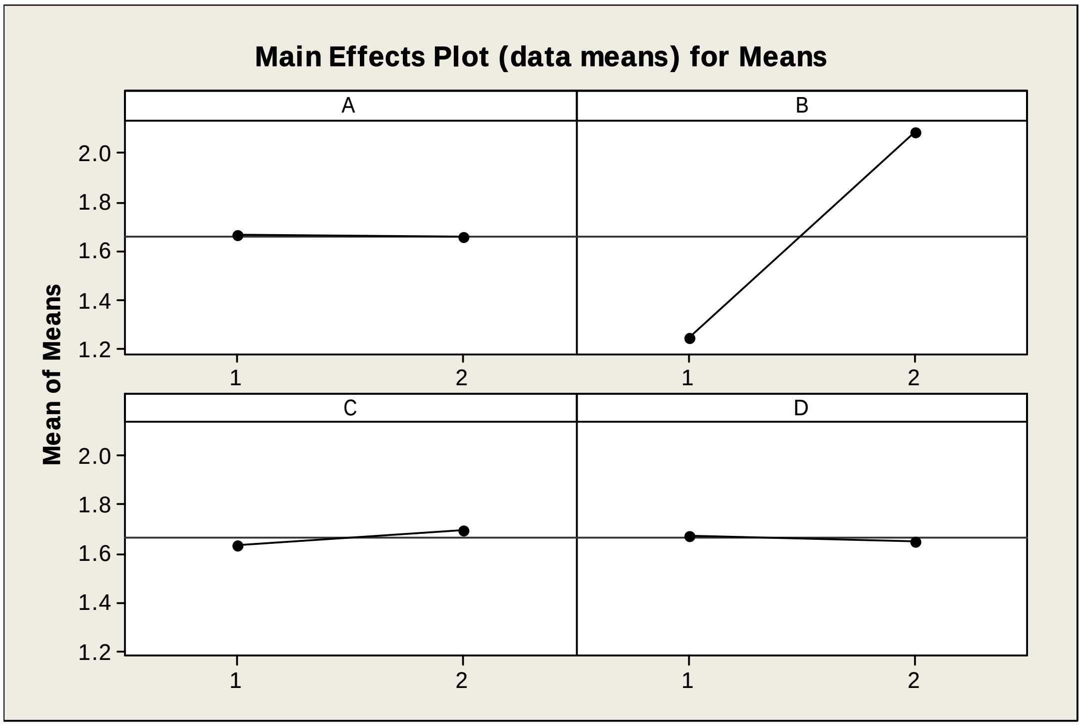


Figura 2-13 Gráfica de efectos principales para las medias.

Analysis of Variance for Means

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
A	1	0.00014	0.00014	0.00014	0.04	0.846
B	1	1.41681	1.41681	1.41681	456.76	0.000
C	1	0.00681	0.00681	0.00681	2.19	0.235
D	1	0.00125	0.00125	0.00125	0.40	0.571
Residual Error	3	0.00931	0.00931	0.00310		
Total	7	1.43431				

Tabla 2-21 Análisis de varianza para las medias.

Para controlar la media se escoge el factor B en el nivel 2 para obtener el valor de 2.0833 mm/pulg, el cual es muy parecido al valor objetivo de 2 mm/pulg. La mejor combinación es A1, B2, C2, D2. Este ejemplo se utilizará para correr el programa y obtener los resultados.

2.6 La transformación integral.

Para presentar una metodología con un programa de computadora se toma un enfoque basado en la idea de *simular* el experimento que da origen a la variable aleatoria Y. Entonces usamos la frecuencia relativa como una aproximación a la probabilidad buscada. Si esta frecuencia se basa en un número de observaciones suficientemente grande, la ley de los grandes números justifica nuestro procedimiento. (Meyer, 1986). Específicamente, supóngase que tenemos una muestra aleatoria de la variable aleatoria anterior, cuya distribución está completamente especificada, $X_1,\dots, X_n$. Para cada X_i definimos la variable aleatoria $Y_i = e^{-x_i} \operatorname{sen} X_i$. Luego, evaluamos la frecuencia relativa n_A/n, en donde n_A es igual al número de valores Y_i, sean y_i, que satisfacen $0 \le y_i \le \frac{1}{2}$. Luego n_A/n es la frecuencia relativa $0 \le Y \le \frac{1}{2}$, y si n es grande, esta frecuencia relativa estará "próxima" a $P\left[0 \le Y \le \frac{1}{2}\right]$ según la ley de los grandes números.

Para aplicar el procedimiento anterior, debemos encontrar un medio de "generar" una muestra aleatoria $X_1,\dots, X_n$ de la variable aleatoria cuya distribución es N(0,1). Antes de indicar cómo se hace esto, expongamos brevemente una distribución para la cual este trabajo ya se ha realizado debido a la disponibilidad de tablas. Supóngase que X está distribuida uniformemente en el intervalo [0,1]. A fin de obtener una muestra aleatoria para tal variable aleatoria, sólo necesitamos ver una tabla de números aleatorios en el apéndice de Meyer (1986).

Teorema. Sea X una variable aleatoria con fdp *f* y fda F. [Se supone que $f(x) = 0, x \notin (a,b)$]. Sea Y la variable aleatoria definida por Y = F(X). Luego Y está distribuida uniformemente en [0,1] (Y se designa como la *transformación integral de* X).

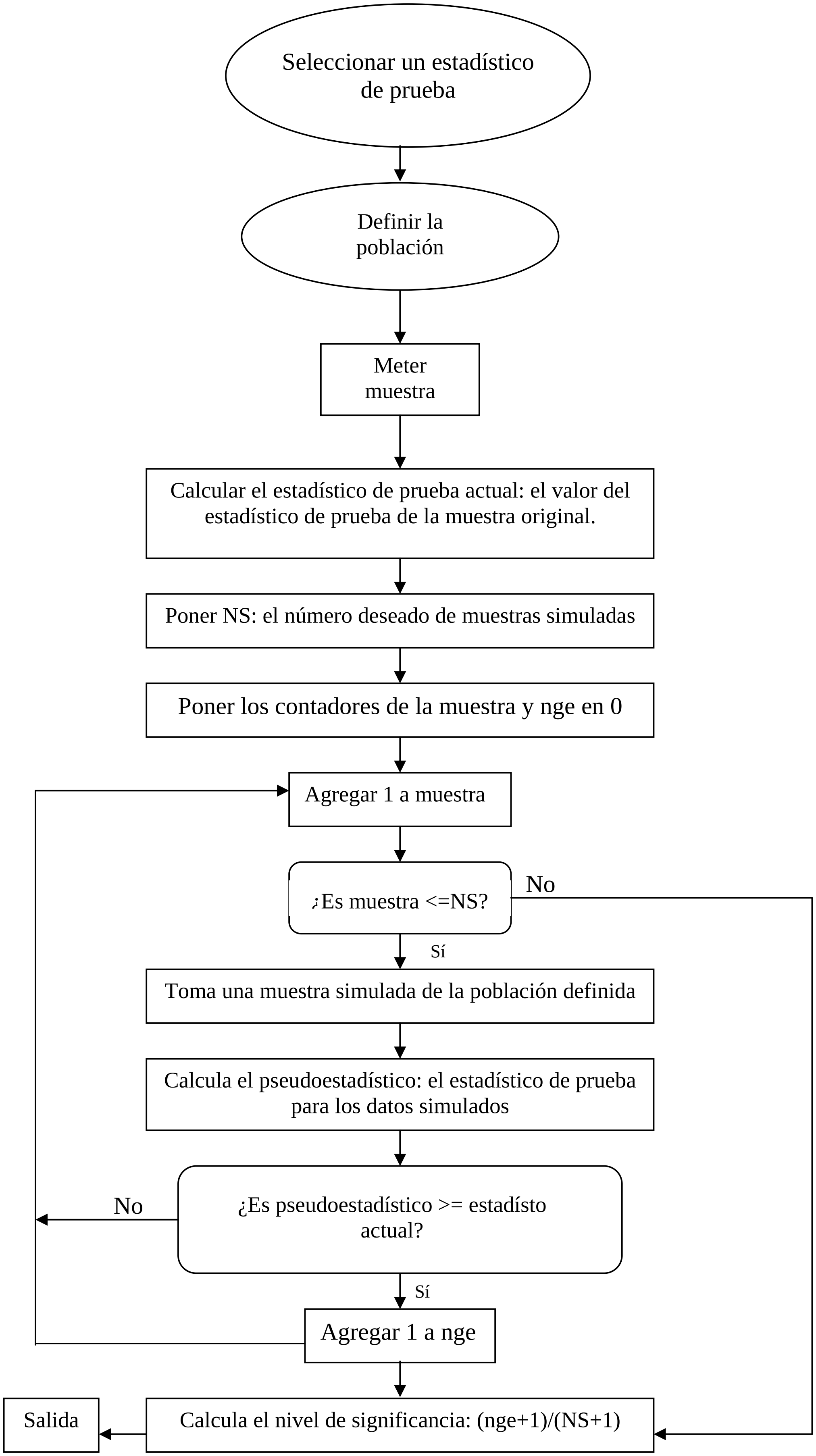
2.7 Muestreo Monte Carlo.

Es utilizado para probar la hipótesis nula de que una muestra fue tomada aleatoriamente de una población especificada. La prueba se conduce simulando el proceso de toma aleatoria de muestras de la población. Los valores del estadístico de prueba para las muestras aleatorias simuladas son comparados con el valor del estadístico de prueba de la muestra real. Si el valor del estadístico de prueba de la muestra real es no-usual relativamente comparando con las muestras aleatorias simuladas, entonces la hipótesis nula es rechazada. (Noreen, 1989).

El método de Monte Carlo de calcular la significancia de un estadístico de prueba, es utilizado para probar la hipótesis de que los datos son una muestra aleatoria de una población especificada. Esto es perfeccionado tomando muestras simuladas de una población especificada y comparando los valores del estadístico de prueba para las muestras simuladas con el valor del estadístico de prueba para la muestra real. El método Monte Carlo tiene un valor particular en situaciones donde la distribución de la población es conocida, pero la distribución de la muestra del estadístico de prueba no ha sido originada. (Noreen, 1989).

Cuando el método Monte Carlo es utilizado, la población de donde se toman las muestras simuladas debe ser definida. La prueba se construye tomando muestras aleatorias simuladas de una población especificada. El estadístico de prueba se calcula para cada muestra aleatoria simulada y la hipótesis nula es rechazada si el valor del estadístico de prueba de la muestra actual es mayor a los valores del estadístico de prueba de las muestras simuladas. El nivel de significancia es (nge+1)/(NS+1) donde nge es por lo menos tan grande como el estadístico de prueba de la muestra real. NS es el número de muestras simuladas generadas de la población especificada. (Noreen, 1989).

Está demostrado que la prueba de hipótesis basado en el nivel de significancia (nge+1)/(NS+1) es válido. Esto es, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera, es no mayor que el nivel de rechazo seleccionado para la prueba. La hipótesis nula en este caso es que los datos son una muestra aleatoria tomada de una población especificada. (Noreen, 1989).


Seleccionar un estadístico de prueba
Definir la población
Meter muestra
Calcular el estadístico de prueba actual: el valor del estadístico de prueba de la muestra original.
Poner NS: el número deseado de muestras simuladas
Poner los contadores de la muestra y nge en 0
Agregar 1 a muestra
¿Es muestra <=NS?
No
Sí
Toma una muestra simulada de la población definida
Calcula el pseudoestadístico: el estadístico de prueba para los datos simulados
¿Es pseudoestadístico >= estadísto actual?
No
Sí
Agregar 1 a nge
Salida
Calcula el nivel de significancia: (nge+1)/(NS+1)

Ejemplo de muestreo uniforme sin reemplazo.

Una empresa que fabrica bocinas de alta fidelidad recibió su primer embarque de 1000 unidades de un componente. Se tomó una muestra aleatoria de 100 y 4 resultaron defectuosos (4%). El proveedor asegura que 98% de los componentes no tienen defectos.

El estadístico de prueba en este caso es el número de defectuosos en una muestra de 100. El valor del estadístico de prueba es 4 para la muestra original. La población de 1000 unidades supone que contiene no más del 2% de defectuosos. La prueba procede para construir la representación matemática de la población con 20 defectuosos con unos y 980 ceros. (Noreen, 1989).

La muestra artificial es de 100 y es tomada de este modelo de población, teniendo cuidado en imitar exactamente el modo de seleccionar la muestra real que fuera tomada de la población real. El estadístico de prueba es calculado para la muestra artificial y comparado con el valor del estadístico de prueba de la muestra real.

La significancia del estadístico de prueba está dado por la razón (nge+1)/(NS+1), donde NS es el número de muestras artificiales tomadas de la población, y nge es el número de muestras artificiales donde el valor del estadístico de prueba es igual o mayor que el valor del estadístico de prueba para la muestra real.

Resultado: la probabilidad de obtener 4 ó más defectuosos en un tamaño de muestra de 100 es 0.119. Esto es, hubo 4 ó más defectuosos en 118 de las 999 muestras construidas artificialmente. (Noreen, 1989).

Desde que las pruebas Monte Carlo son válidas y la aleatorización de las pruebas aproximadas son pruebas Monte Carlo, la aleatorización aproximada de pruebas también son válidas.

Conclusión.

La clave en el método de muestreo Monte Carlo es que la población es especificada en la hipótesis nula. Bootstrap toma una aproximación para la especificación de la población para ser utilizado en generar datos artificiales. Sin embargo, el muestreo exacto de la distribución no son conocidos para todos los estadísticos de prueba posibles, ni siquiera cuando el muestreo viene de una población estándar Normal. (Noreen, 1989).

En general, se puede calcular un válido Monte Carlo nivel de significancia para cualquier estadístico de prueba que es una función de los datos tomados de cualquier población especificada. La población puede ser enteramente arbitraria. El único requerimiento es que las frecuencias relativas de dos elementos distintos deben ser especificadas de cualquier manera. (Noreen, 1989).

Validación de cálculo-intensivo de pruebas de hipótesis.

La probabilidad de rechazar falsamente la hipótesis nula no debe ser mayor que el nivel de rechazo de la prueba. Si el nivel de rechazo es de 0.10, la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando ésta es verdadera no debe ser mayor que 0.10. Idealmente, la probabilidad de rechazar falsamente la hipótesis nula sería exactamente 0.10. (Noreen, 1989).

Una prueba es válida si la probabilidad de rechazar la hipótesis nula, cuando ésta es verdadera, es menor o igual que el nivel de rechazo de la prueba. Una prueba es exactamente válida si la probabilidad de rechazar falsamente la prueba de hipótesis es igual al nivel de rechazo de la prueba. Una prueba de hipótesis Monte Carlo es válida para cualquier nivel de rechazo y es, bajo muchas circunstancias, exactamente válido para propósitos prácticos también. En el libro de Noreen (1989) en el apéndice 3A se describe y se muestra el procedimiento de la demostración del método Monte Carlo.