Apéndice B. Definición de derivadas SRWNN

En este apéndice se reporta el desarrollo de cada una de las derivadas necesarias en el algoritmo de entrenamiento para la arquitectura SRWNN, estas derivadas son: $\frac{\partial \boldsymbol{y^{obt}(n)}}{\partial \boldsymbol{a_{k(n)}}}$, $\frac{\partial \boldsymbol{y^{obt}(n)}}{\partial \boldsymbol{m_{jk}(n)}}$, $\frac{\partial \boldsymbol{y^{obt}(n)}}{\partial \boldsymbol{d_{jk}(n)}}$, $\frac{\partial \boldsymbol{y^{obt}(n)}}{\partial \boldsymbol{\theta_{jk}(n)}}$, $\frac{\partial \boldsymbol{y^{obt}(n)}}{\partial \boldsymbol{w_j(n)}}$.

$\frac{\partial \boldsymbol{y^{obt}(n)}}{\partial \boldsymbol{a_{k(n)}}}$

El cálculo de $\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial a_{k(n)}}$ se efectúa de la siguiente manera:

habiendo definido la salida del sistema como:

$$y(n) = \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{K=1}^{Ni} a_k x_k$$

entonces

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial a_{k(n)}} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{K=1}^{Ni} a_k x_k}{\partial a_{k(n)}}$$

como los pesos entre las últimas dos capas y la salida de las unidades multidimensionales no dependen de $a_{k(n)}$, entonces la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial a_{k(n)}} = \frac{\partial \sum_{K=1}^{Ni} a_k x_k}{\partial a_{k(n)}}$$

derivando finalmente tenemos:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial a_{k(n)}} = x_k \tag{B. 1}$$

$\frac{\partial \boldsymbol{y^{obt}(n)}}{\partial \boldsymbol{m_{jk}(n)}}$

Para obtener $\Delta m_{jk}(n)$ es necesario definir:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial m_{jk}(n)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{K=1}^{Ni} a_k x_k}{\partial m_{jk}(n)}$$

de esta ecuación el segundo término de la suma no depende de los parámetros de traslación de las unidades de la capa wavelet, por lo que se convierte en:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial m_{jk}(n)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial m_{jk}(n)}$$

ahora para calcular esta derivada podemos definir a:

$$z_{jk} = \frac{u_{jk} - m_{jk}}{d_{jk}}$$

por medio de la regla de la cadena reescribimos:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial m_{jk}(n)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial m_{jk}(n)} = w_j \frac{\partial \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial z_{jk}} \frac{\partial z_{jk}}{\partial m_{jk}(n)}$$

lo cual da como resultado:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial m_{jk}(n)} = -\frac{w_j}{d_{jk}} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}} \tag{B. 2}$$

$\boldsymbol{\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial d_{jk}(n)}}$

De manera similar, establecemos:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial d_{jk}(n)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial d_{jk}(n)}$$

con z_{jk} definida como en la ecuación anterior, obtenemos por medio de la regla de la cadena:

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial d_{jk}(n)} = w_j \frac{\partial \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial z_{jk}} \frac{\partial z_{jk}}{\partial d_{jk}(n)}$$

lo que nos da como resultado:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial d_{jk}(n)} = -\frac{w_j}{d_{jk}} z_{jk} \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}} \tag{B. 3}$$

$$\frac{\boldsymbol{\partial y^{obt}(n)}}{\boldsymbol{\partial \theta_{jk}(n)}}$$

Estableciendo

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial \theta_{jk}(n)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial \theta_{jk}(n)}$$

aplicamos de manera similar la regla de la cadena, obteniendo

$$\frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial \theta_{jk}(n)} = w_j \frac{\partial \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial z_{jk}} \frac{\partial z_{jk}}{\partial \theta_{jk}(n)}$$

al derivar nos da como resultado:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial \theta_{jk}(n)} = -\frac{w_j}{d_{jk}} \psi_{jk}(n-1) \frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}} \tag{B. 4}$$

Ahora, como en las secciones anteriores se hizo uso de la regla de la cadena a través del término z_{jk}, definimos a $\frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}}$ como:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}} = \frac{\partial \prod_{k=1}^{Ni} \psi(z_{jk})}{\partial z_{jk}}$$

es decir, la derivada de la pitatoria que representa la salida de cada unidad en la capa de producto, respecto a z_{jk}. Como estamos derivando la multiplicación de varias funciones, consideradas como constantes, a excepción de la función que tenga como argumento el mismo valor de que z_{jk}. En ese caso podemos derivar la función respecto a su argumento, obteniendo:

$$\frac{\partial \Phi_j}{\partial z_{jk}} = \frac{\partial \prod_{k=1}^{Ni} \psi(z_{jk})}{\partial z_{jk}} = \frac{\partial \psi(z_{j1}) \ldots \partial \psi(z_{jk}) \ldots \partial \psi(z_{jNi})}{\partial z_{jk}} \tag{B. 5}$$

$$= \psi(z_{j1}) \ldots \phi(z_{jk}) \ldots \psi(z_{jNi})$$

$$= \phi(z_{jk}) = \phi^{|}(z_{jk})$$

$$\boldsymbol{\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial w_j(n)}}$$

Empezamos definiendo el valor de :

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial w_j(n)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \, \Phi_j(\boldsymbol{x}) + \sum_{K=1}^{Ni} a_k x_k}{\partial w_j(n)}$$

ahora podemos calcular las derivadas parciales como:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial w_j(n)} = \frac{\partial \sum_{j=1}^{Nw} w_j \, \Phi_j(\boldsymbol{x})}{\partial w_j(n)}$$

derivando respecto a $w_j(n)$ tenemos:

$$\frac{\partial y^{obt}(n)}{\partial w_j(n)} = \Phi_j(\boldsymbol{x}) \qquad \text{(B. 6)}$$