Apéndice A. Teoría wavelet

Funciones Escalamiento

Una función $f(x)$ puede ser aproximada mediante la suma de versiones escaladas y trasladadas de una función básica. Estas funciones manejan dos parámetros básicos: un parámetro de escala r y un parámetro de traslación s, ambos números enteros.

El conjunto de estas funciones escaladas y trasladadas se relacionan por medio de la siguiente ecuación [MIS07]:

$$\phi_{r,s} = 2^{r/2}\phi(2^r x - s) \tag{A. 1}$$

si tomamos en cuenta los valores para $r = 0, s = 0$ entonces la ecuación anterior se transforma en:

$$\phi_{0,0} = 2^{0/2}\phi(2^0 x - 0) \tag{A. 2}$$

$$\phi_{0,0} = \phi(x)$$

lo que representa la wavelet madre.

En general estas funciones son llamadas funciones de escalamiento y si se incluyen todos los valores posibles de r y s entonces cubrimos el espacio $L^2(R)$. Las funciones de escalamiento son representadas por la siguiente ecuación:

$$\phi(x) = \sum_n h_\phi(n)\sqrt{2}\phi(2x - n) \tag{A. 3}$$

donde n representa el parámetro de traslación. Si establecemos el parámetro de escalamiento a un valor fijo r_0 y variamos el parámetro de traslación entonces podemos generar conjuntos de funciones que cubren distintos subespacios. Existen relaciones entre estos subespacios con los conjuntos definidos por las funciones de escalamiento.

Por ejemplo el conjunto de funciones $\{\phi_{1,s}(x)\}$ guarda una relación con el conjunto $\{\phi_{0,0}(x)\}$ debido a que el primero cubre el subespacio definido como V_1 y este subespacio incluye a V_0. Entonces cada subespacio definido por los conjuntos de funciones de escalamiento con un parámetro de escalamiento fijo es incluido dentro del subespacio inmediato superior definido por el conjunto de funciones de escalamiento con un valor de r más alto.

$$V_{-\infty} \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_\infty \qquad \text{(A. 4)}$$

Entonces podemos aproximar una función $\phi(x)$ por medio de versiones trasladadas y escaladas pertenecientes al subespacio superior de funciones. Es decir que si una función está definida en el subespacio V_0 entonces es posible aproximar la función con el conjunto de funciones de escalamiento $\{\phi_{1,s}\}$.

Funciones Wavelet

Debido a la característica de inclusión entre subespacios definidos por funciones de escalamiento, podemos definir la operación de diferencia entre subespacios para obtener solamente un subespacio W_0 en específico sin tomar en cuenta los subespacios de orden inferior, es decir la diferencia entre dos subespacios contiguos.

Sea el subespacio de funciones V_1 sabemos que con este subespacio podemos cubrir V_0 de manera que

$$V_1 - V_0 = W_0 \qquad \text{(A. 5)}$$

Si definimos la operación de unión por medio del operador $\oplus$ tenemos:

$$V_1 = V_0 \oplus W_0$$

$$V_2 = V_1 \oplus W_1$$

$$V_2 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1$$

$$V_3 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$$

de manera general:

$$V_n = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \ldots \oplus W_{n-1} \qquad \text{(A. 6)}$$

Para llevar a cabo estas diferencias W_n utilizamos funciones del tipo

$$\psi_{r,s} = 2^{r/2} \psi(2^r x - s) \qquad \text{(A. 7)}$$

Aunque estas funciones son parecidas a las de escalamiento, se requiere que las funciones de diferencia sean ortogonales entre sí. El conjunto de las funciones de diferencia se conocen como funciones wavelet.

$$\{\psi_{r,s}(x)\} \qquad \text{(A. 8)}$$

Es decir que si quiero cubrir V_2 solamente entonces se puede efectuar mediante la diferencia entre $V_2 - V_1$:

$$\psi(x) = \sum_n h_\psi(n)\sqrt{2}\,\phi(2x - n) \tag{A. 9}$$

Ya habiendo definido los distintos tipos de conjuntos de funciones entonces establecemos que utilizando los conjuntos $\{\phi_{ro,s}\}$ y $\{\psi_{r,s}(x)\}$ con $r \geqq r_0$ es posible aproximar cualquier función.

Series Wavelet

Sea una función $f(x) \in L^2(R)$

$$f(x) = \sum_s a_{r0,s}\phi_{r0,s}(x) + \sum_{r=r0}^{\infty} \sum_s b_{r,s}\,\psi_{r,s}(x) \tag{A. 10}$$

los coeficientes a y b se calculan de la siguiente manera:

$$a_{r0,s} = \int f(x)\phi_{r0,s}(x)dx \tag{A. 11}$$

$$b_{r,s} = \int f(x)\,\psi_{r,s}(x)dx$$

Filtros

Antes de definir las señales de aproximación y detalle por medio de filtros, es necesario conocer dos operaciones que ayudan a la reconstrucción correcta de la señal original. La operación de sub muestreo toma los valores con índices pares de la señal de entrada, lo que resulta en la reducción en el tamaño de la señal en una mitad. La operación contraria es llamada sobre muestreo y consiste en el alargamiento de la señal de entrada usualmente insertando valores de cero entre cada par de muestras sucesivas.

La transformada wavelet puede representarse por medio de filtros, el proceso de filtrado en su nivel básico contempla el paso de la señal original s a través de dos filtros complementarios, uno de paso bajo y otro de paso alto. De las salidas de estos filtros emergen dos subseñales cA y cD, cada una de estas subseñales tiene una longitud de la mitad de la señal original (si se considera unidades de submuestreo). Por medio de este esquema se obtienen los coeficientes de la transformada discreta wavelet [WEE06].

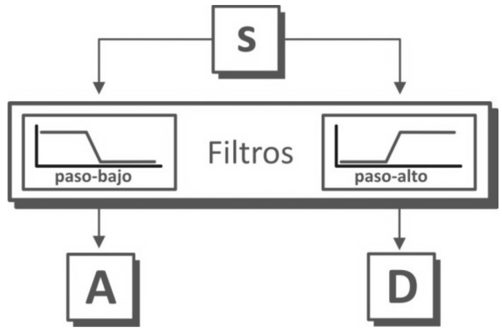

Figura A1. 1: Filtros paso alto y paso bajo

Múltiples Niveles de Descomposición

El proceso de descomposición de una señal puede contemplar distintos niveles, es decir, descomponer las subseñales de aproximación obtenidas sucesivamente formando un árbol de descomposición wavelet. Como el que se muestra en la siguiente figura [MIS07]:

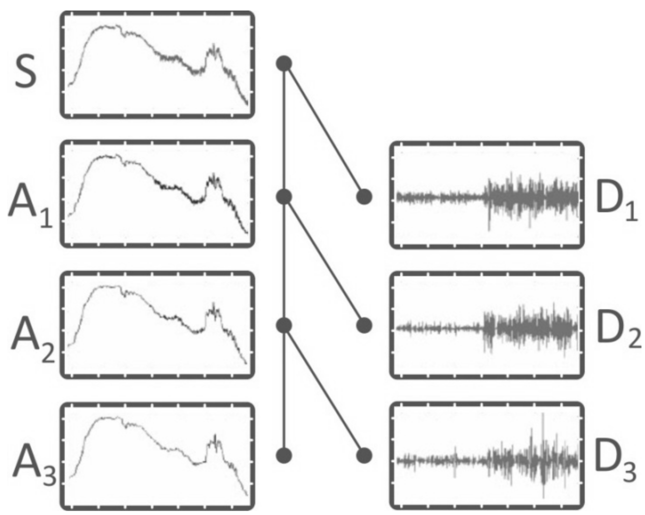

Figura A1. 2: Niveles de descomposición

donde se definen las señales de aproximación y de detalle Aj y Dj como:

$$D_j(t) = \sum_k \alpha_{jk}\, \psi_{jk}\,(t) \tag{A. 12}$$

$$A_j(t) = \sum_k \beta_{jk}\, \phi_{jk}(t) \tag{A. 13}$$

$$\alpha_{jk} = \int s(t)\psi_{jk}(t)dt \tag{A. 14}$$

$$\beta_{jk} = \int s(t)\beta_{jk}(t)dt \tag{A. 15}$$

Síntesis Wavelet

El proceso de descomposición wavelet permite efectuar un análisis de las características de la señal original, el proceso inverso requiere ensamblar los componentes obtenidos para recuperar la señal original. El proceso de reconstrucción recibe el nombre de síntesis o transformada inversa.

Para señales de energía finita, existen dos fórmulas que definen a la transformada inversa [MIS07]:

Síntesis Discreta

$$s(t) = \sum_j \sum_n C(j,n)\psi_{j,n}(t) \quad \text{(A. 16)}$$

La señal original $s(t)$ puede expresarse como la suma de dos señales, primera señal de promediado y primera señal de detalle ($A_1\ y\ D_1$). Cada una de estas señales es el resultado del proceso de reconstrucción de cA y cD respectivamente.

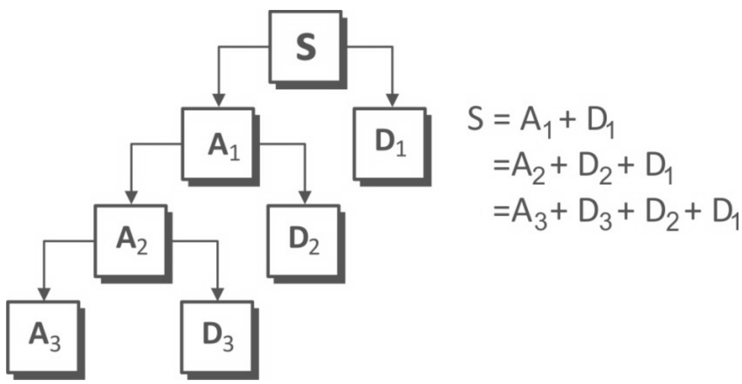

Figura A1. 3: Equivalencia análisis multinivel

Extendiendo a análisis multinivel, encontramos equivalencias entre las señales reconstruidas para formar la señal original [MIS07]:

$$s = A_J + \sum_{j \leq J} D_j \quad \text{(A. 17)}$$

$$A_{j-1} = A_j + D_j \quad \text{(A. 18)}$$