

Capítulo 7: Conclusiones y Trabajo a Futuro.

Lo más bello que podemos experimentar es el misterio de las cosas

– *Albert Einstein*

7.1 Conclusiones: Resumen de Resultados Obtenidos

Los algoritmos y ecuaciones presentados en esta investigación, más allá de tener una aplicación directa, pretenden aportar una base matemática, que pueda ser utilizada en cualquier proyecto a futuro que requiera de transformaciones geométricas n -dimensionales, principalmente donde se requiera realizar rotaciones. A continuación se mencionan los resultados sobresalientes en cada una de las etapas de esta investigación.

7.1.1 Politopos

En el Capítulo 2, se analizaron los aspectos geométricos de los politopos regulares nD (hipercubo, simplex y politopo cruz) y las características que deben cumplir para considerarse regulares. Se presentaron las analogías para la creación de politopos de mayor dimensionalidad, manteniendo un esquema homogéneo para la representación de los vértices. Y gracias a esto fue posible generalizar su representación, y se facilitó el desarrollo de algoritmos para la generación automática de las coordenadas de los vértices y el orden en que tienen que ser unidos para crear las aristas.

7.1.2 Rotaciones

En el Capítulo 3, se hizo un repaso de transformaciones geométricas: translación, escalamiento y rotación, generalizadas a cualquier dimensión, donde en particular la translación es utilizada dentro del proceso para realizar las rotaciones multidimensionales generales. Se analizó la evolución de las rotaciones, partiendo de 2D a cualquier dimensión,

concluyendo que, una forma de realizar las rotaciones en un espacio n -dimensional en general, es necesario proporcionar $n-1$ puntos no cohiperplanares, cuyo hiperplano de soporte $(n-2)$ -dimensional define el eje de rotación alrededor del cual se desea realizar el giro.

Otra forma de realizar las rotaciones multidimensionales fue presentada en el Capítulo 4, donde se muestra que es posible llevar a cabo una rotación, cuando se proporciona un plano de rotación definido por dos vectores ortonormales y su punto de aplicación.

Ambos enfoques presentados son válidos por las propiedades matemáticas que se utilizaron en su formulación, pero dependen de la información con la que se cuenta para realizar los giros. Aunque se presentó la demostración de equivalencia de ambos enfoques, para mostrar que se obtienen los mismos resultados para el caso de las rotaciones principales, esto no es tan trivial para el caso las rotaciones generales. Sin embargo, se demostró, que es posible determinar el plano de rotación a partir del eje $(n-2)$ -dimensional de rotación y viceversa, y de esta forma poder unificarlos.

Los resultados de esta unificación fueron validados con la publicación de un artículo en el Encuentro de Estudiantes de Ciencias de la Computación (E2C2) del Centro de Investigación en Computación del IPN [Cruz-Matías 2007].

7.1.3 Visualización de las Rotaciones Multidimensionales Generales

En el Capítulo 5, se presentó un análisis de las proyecciones geométricas, donde se obtuvieron las matrices de proyección $nD \rightarrow (n-1)D$ paralela y perspectiva, con esto es posible llevar la información de un espacio n -dimensional a un espacio menor, como el caso del monitor de la computadora, donde son mostrados los resultados de las rotaciones multidimensionales. Además, se demostró que, cuando se comparten los valores para las

direcciones (proyección paralela) o centros de proyección (proyección perspectiva) la proyección de nD a $2D$, puede realizarse en un solo paso, proponiendo una sola matriz de proyección general $nD \rightarrow 2D$ paralela o perspectiva, respectivamente.

Para mostrar gráficamente los resultados del trabajo obtenidos en esta investigación, se desarrolló un visualizador de rotaciones multidimensionales, mediante el cual, es posible visualizar los fenómenos de las rotaciones en un hiperespacio, proyectados en el monitor de la computadora.

Gracias a este visualizador, es posible observar de manera gráfica, que los dos métodos de rotaciones multidimensionales generales presentados en este trabajo, tienen un mismo comportamiento. Esto además refuerza la validez de los procesos propuestos para la unificación de ambos métodos.

7.2 Trabajo a Futuro

En esta sección se describen algunas líneas de investigación futuras identificadas durante el desarrollo de este trabajo.

7.2.1 Visualización

Aunque los algoritmos propuestos en la sección 2.3 , generan correctamente los vértices y aristas de los polítopos regulares nD , se puede optimizar la representación de ellos, para obtener la lista menor de puntos que represente al mismo polítopo, de esta forma se puede reducir el número de comandos necesarios para realizar el trazo en la computadora.

Quizá el trabajar con el modelo de alambres resulta insatisfactorio al momento de querer analizar las rotaciones. Por tanto, se puede definir un proceso que permita obtener

los vértices y aristas del conjunto de celdas $(n-1)$ -dimensionales paralelas, para poder visualizar su transformación durante las rotaciones. Esta idea se puede extender, para poder visualizar las diferentes celdas $(n-1)$ -dimensionales durante las rotaciones, pudiendo intercambiar interactivamente entre ellas, sombreándolas con un color semi-transparente. Una representación de esta idea se muestra en la siguiente imagen, de un hipercubo 4D.

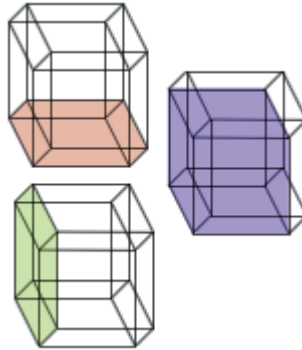


Figura 7.1 Celdas $(n-1)$ -dimensionales de un hipercubo 4D sombreadas.

Un trabajo en cuanto a la representación gráfica, es mejorar el visualizador multidimensional en cuanto al diseño de la interfaz con controles más amigables. También se puede complementar para crear un navegador multidimensional, dotándolo de funciones adicionales, como la inclusión de la visión de una cámara virtual n -dimensional, que permita generar una escena como si fuera vista desde una cámara, es decir, la cámara colocada en un punto *From*, estará apuntando hacia un punto *At*. Inicialmente se plantea la existencia de una cámara virtual para cada espacio, por tanto, para generar una escena de un espacio nD y mostrarla en un espacio $2D$, será necesario manipular independientemente cada una de las cámaras virtuales, de otra forma, mucha de la información se puede colapsar al momento de generar la escena.

7.2.2 Determinación de la Dirección de Giros Positivos en nD

Una dificultad matemática que se encontró durante esta investigación, es determinar la dirección del giro positivo en dimensiones superiores a 3D. Ya que para el caso 3D conocido, de acuerdo a la regla de la mano derecha, se tiene que si se coloca el dedo pulgar derecho en la dirección positiva del eje de rotación, el giro natural del resto de los dedos indica la dirección del giro positivo alrededor de dicho eje. Sin embargo no se cuentan con “reglas de la mano derecha” para el espacio 4D y superiores. Por tanto un trabajo interesante, es el determinar la dirección de los giros positivos alrededor de un hiperplano $(n-2)$ -dimensional de rotación.

El método propuesto en el Capítulo 4 para obtener el plano de rotación a partir del hiperplano $(n-2)$ -dimensional de rotación y viceversa, garantiza que tanto el plano como el eje de rotación son ortogonales entre sí, y que las rotaciones tienen el mismo comportamiento, sin embargo en las primeras etapas del desarrollo de este proceso, en algunas dimensiones, las rotaciones cambiaban de sentido, es decir el giro positivo en un enfoque correspondían al giro negativo en el otro. El proceso final presentado en este documento preserva el sentido de los giros en cualquier dimensión, sin embargo, queda pendiente la demostración matemática que lo compruebe.

7.2.3 Ortonormalizar dos Vectores en un Espacio n -dimensional

En la sección 4.6 se presenta el método para llevar a cabo una rotación en un plano definido por dos vectores, cuya restricción es que sean ortonormales. Sin embargo, si no se cuenta con los vectores con tales características, y solo se tiene dos vectores x e y que sean linealmente independientes (condición suficiente para definir un plano), debe ser posible

obtener dos vectores ortonormales que definan exactamente al mismo plano. A continuación se presentan las primeras aproximaciones para los casos 2D y 3D.

En 2D, no es necesario realizar proceso alguno, porque únicamente se tiene un posible plano de rotación, que puede ser sin problemas representado por los vectores de las bases canónicas e_1 y e_2 , los cuales por definición son ortonormales.

En 3D, dados dos vectores $x, y \in \mathfrak{R}^3$ linealmente independientes, se puede calcular los vectores \hat{a} y \hat{b} ortonormales con los siguientes pasos:

1. El primer paso es calcular un vector $b = (x \times y) \times x$. El vector resultante de $x \times y$ es un vector ortogonal al plano definido por x e y , entonces b será un vector que se encuentra en el mismo plano definido por x e y , pero que es ortogonal al vector x .
2. Normalizar el vector x para obtener el vector normal \hat{a} .
3. Normalizar el vector b para obtener el vector \hat{b} .

Entonces, \hat{a} y \hat{b} definen el mismo plano que x e y , salvo que los primeros son ortonormales.

En 4D, si se piensa en utilizar una técnica similar al caso 3D, se necesitará de un vector adicional para poder trabajar con el producto cruz 4D. Y en general en n D se necesitarán de $n-3$ vectores adicionales.