

Capítulo 5: Proyecciones

Una proyección es una manera de tomar un objeto y crear una sombra de éste en un espacio dimensional inferior [Zilli 03]. En la vida diaria quizá sin darnos cuenta, se esta en contacto con las proyecciones, por ejemplo, en un día soleado se observan sombras de objetos tridimensionales proyectadas en el piso, o en lugares donde se ven imágenes tridimensionales plasmadas en un plano como las pantallas de las computadoras y las fotografías. Estos son ejemplos de proyecciones de objetos tridimensionales en un espacio bidimensional.

5.1 Observando la Tercera Dimensión

En las proyecciones 3D, la información de la tercera dimensión (también llamada profundidad) no puede ser representada, esto es, que si el observador se aleja o acerca de la imagen, ésta no cambiará. Sin embargo se puede entender claramente la representación de la profundidad en este tipo de imágenes, con información indirecta contenida en las imágenes observadas [Eusebeia 06].

La retina del ojo humano es un dispositivo de recepción en dos dimensiones, sin embargo el cerebro percibe sin problemas la forma de los objetos tridimensionales, utilizando la información indirecta contenida en los objetos como son: la perspectiva, la sombra, etc. Básicamente el sistema de visión tridimensional de los humanos tiene como tarea, proyectar una escena 3D en un plano [Hollasch 91] (ver Figura 5.1).

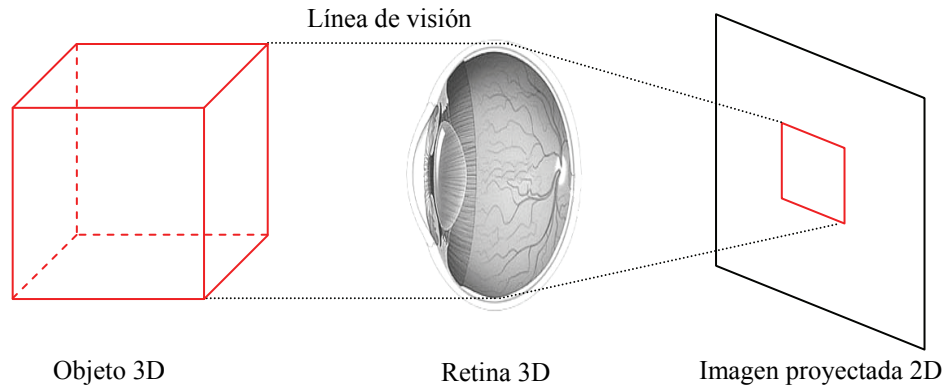


Figura 5.1 Sistema básico de visión 3D.

5.2 Observando Dimensiones Superiores

De acuerdo a lo anterior, para poder ver los objetos 4D, estos deben ser proyectados matemáticamente al espacio 3D, y en su momento realizar nuevamente una proyección al espacio 2D para poder visualizarlos en un plano, como el monitor de la computadora.

Una analogía que se plantea, es que la retina de un ser de la cuarta dimensión sería un dispositivo de recepción en tres dimensiones, este ser, percibiría la forma de objetos 4D utilizando información indirecta contenida en las imágenes que recibe, comprendiendo análogamente, una profundidad tetradimensional.

De esta forma, el sistema de visión de un ser 4D tendrá como tarea, proyectar una escena 4D a una región 3D (ver Figura 5.1), la cuál puede ser en su momento, proyectada a un plano 2D para poder ser visualizada por un ser 3D.

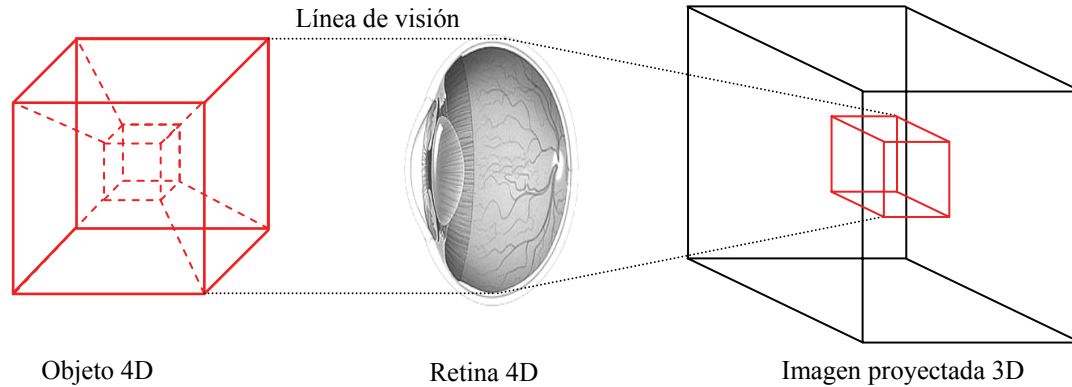


Figura 5.2 Sistema básico de visión 4D.

Las matemáticas detrás de la proyección del espacio 3D pueden ser generalizadas a cualquier número de dimensiones, de esta forma, un objeto nD puede ser matemáticamente proyectado a un espacio $(n-1)D$. Dicha proyección puede ser aplicada repetitivamente hasta que finalmente obtener un objeto tridimensional o bidimensional, representando la proyección sucesiva de un objeto nD [Noll 67].

Entonces, es posible observar sombras de objetos, no solo tridimensionales, sino también de dimensiones superiores, por ejemplo, en Capítulos anteriores se han presentado imágenes que representan objetos 4D y 5D plasmados en este documento (un plano), y aunque no se construyeron con el objetivo de explicar las proyecciones, son sin embargo, una proyección sucesiva de nD a 2D.

Desafortunadamente, las proyecciones tienen el problema de perder información al llevar la información de una dimensión n a una inferior, esto hace difícil entender lo que se está mostrando [Zilli 03]. Sin embargo estas proyecciones pueden ser manipuladas y examinadas mediante técnicas de graficación por computadora, donde se pueden hacer rotar los objetos y manipular los parámetros de proyección.

5.3 Tipos de Proyección

En general, las proyecciones transforman puntos de un sistema de coordenadas de dimensión n hacia puntos de otro sistema de dimensión menor a n [Foley 92]. La proyección 3D→2D de un objeto se produce por rayos de proyección en línea recta (llamados *proyectores*) que salen del *centro de proyección* pasando a través de cada punto del objeto, e intersectando un *plano de proyección*, lugar donde se forma la proyección.

Las proyecciones geométricas, se dividen en dos clases: *paralelas* y *perspectivas* [Anand 93]. En la proyección paralela, las coordenadas de un objeto son llevadas al plano de proyección por medio de líneas paralelas, esto se logra colocando el centro de proyección a una distancia infinita como se muestra en la Figura 5.3. En la proyección perspectiva (Figura 5.4), las coordenadas del objeto son llevadas al plano de proyección por medio de líneas que salen de un centro de proyección colocado a una distancia finita [Foley 92].

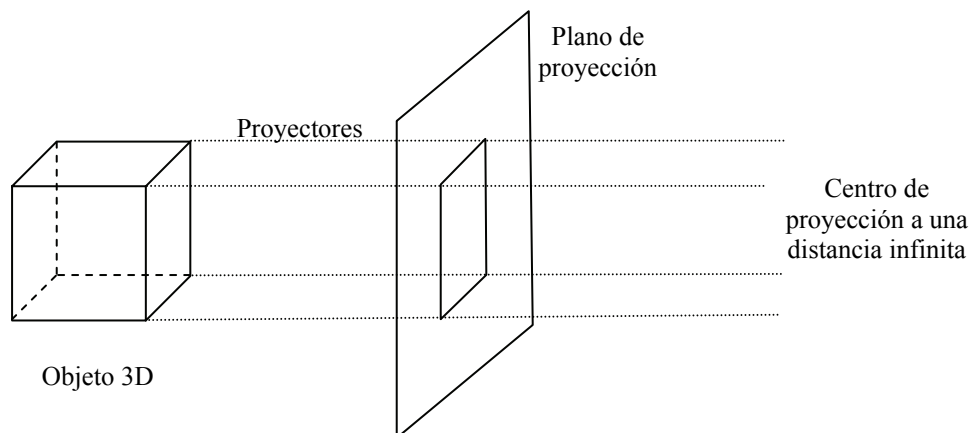


Figura 5.3 Proyección paralela.

Las proyecciones paralelas preservan proporciones relativas de los objetos, se obtienen vistas exactas de diversas caras de los objetos, pero esto no da una representación

realista del objeto proyectado. Por ejemplo, en la Figura 5.3, las caras del cubo paralelas al plano de proyección, se colapsan al ser proyectadas.

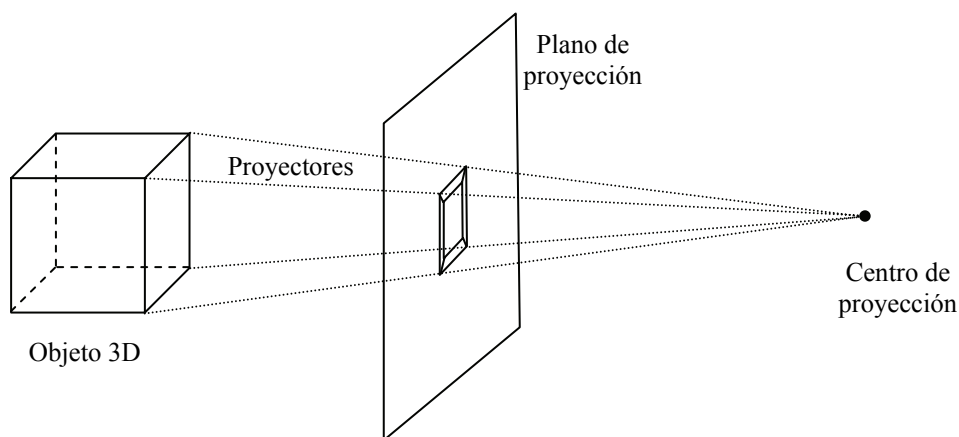


Figura 5.4 Proyección perspectiva.

La proyección perspectiva, produce vistas realistas, pero no preserva la forma y dimensiones exactas del objeto, en esta proyección, los objetos distantes se ven más pequeños que los objetos del mismo tamaño que están más cerca al plano de proyección. Por ejemplo, en la Figura 5.4, de las caras del cubo paralelas al plano de proyección, al ser proyectadas, es mayor aquella que está más cercana al plano que la más lejana.

5.4 Ecuación Paramétrica de la Recta

En 3D, la ecuación paramétrica de la recta que pasa por un punto $p = (x_1, x_2, x_3)$ dado un vector director $d = (d_1, d_2, d_3)$ está dada por: $p' = p + t \cdot d$, donde para cada valor de t , se puede determinar un punto $p' = (x_1', x_2', x_3')$ sobre la recta. En general esta ecuación en nD , se puede reescribir como:

$$p' = p + t \cdot d$$

$$(x_1', x_2', x_3', \dots, x_n') = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + t \cdot (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n), \text{ o bien:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1 + t \cdot d_1 \\ x_2' = x_2 + t \cdot d_2 \\ x_3' = x_3 + t \cdot d_3 \\ \vdots \\ x_n' = x_n + t \cdot d_n \end{array} \right.$$

Ecuación 5.1: Ecuación paramétrica de la recta en nD .

5.5 Proyección Paralela

La proyección paralela se puede especificar como un *vector de proyección* que define la dirección de las líneas de proyección. Cuando la proyección es ortogonal al plano de proyección (en 3D), se crea una *proyección paralela ortográfica*, en otro caso, se tiene una *proyección paralela oblicua* [Anand 93].

5.5.1 Proyección Paralela 3D→2D

Las ecuaciones para la proyección paralela son simples, si el plano de proyección es el plano X_1X_2 . De esta forma, la proyección paralela de un punto $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3$ a uno $p' = (x_1', x_2') \in \mathfrak{R}^2$, está dado por [Hearn 95]:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \\ x_2' &= x_2 \end{aligned}$$

Esta es la proyección paralela más simple, donde se ignora la tercera componente, esto es, $x_3=0$. De forma matricial y en coordenadas homogéneas se puede escribir como:

$$[x_1' \quad x_2' \quad 0 \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.2: Expresión matricial para la proyección paralela simple 3D→2D.

En la proyección paralela, a los rayos proyectores se les puede asignar una dirección, siempre y cuando no sea paralela al plano de proyección. Si la dirección de proyección está dada por el vector $d = (d_1, d_2, d_3)$ y el plano de proyección es el plano principal X_1X_2 , esto implica que $d_3 \neq 0$ para que los rayos no sean paralelos al plano de proyección.

Entonces sea $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3$, un punto cuya proyección en plano X_1X_2 es $p' = (x_1', x_2', 0)$, los valores de x_1' y x_2' se pueden calcular haciendo uso de la ecuación paramétrica de la recta (ver Sección 5.4) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + t \cdot d_1 \\x_2' &= x_2 + t \cdot d_2 \\0 &= x_3 + t \cdot d_3\end{aligned}$$

La última ecuación asegura que p' está en el plano X_1X_2 , y de aquí se puede despejar el parámetro t como $t = -x_3 / d_3$, substituyendo este valor en el resto de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases}x_1' = x_1 - \frac{x_3}{d_3} d_1 = x_1 - \frac{d_1}{d_3} x_3 \\x_2' = x_2 - \frac{x_3}{d_3} d_2 = x_2 - \frac{d_2}{d_3} x_3\end{cases}$$

Ecuación 5.3: Fórmulas para la proyección paralela 3D→2D [Aguilera 07].

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial y utilizando coordenadas homogéneas de la siguiente manera:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -d_1/d_3 & -d_2/d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta ecuación produce $x_3'=0$, es decir, el plano de proyección es exactamente el plano X_1X_2 . Se pueden crear fórmulas similares para planos paralelos al plano X_1X_2 , o a los planos X_1X_3 y X_2X_3 , pero estos casos no serán tratados en esta investigación.

De esta forma, se tiene que en coordenadas homogéneas, el punto p' está dado por

$$p' = \left(x_1 - \frac{d_1}{d_3} x_3 \quad x_2 - \frac{d_2}{d_3} x_3 \quad 0 \quad 1 \right)$$

Una de las ventajas de utilizar coordenadas homogéneas, es que se pueden tener varias representaciones que sean múltiplos una de la otra. Entonces se pueden eliminar los denominadores multiplicando toda la matriz por la constante d_3 , y de esta forma se tiene que $p' = (d_3x_1 - d_1x_3 \quad d_3x_2 - d_2x_3 \quad 0 \quad d_3)$, y la expresión matricial de la proyección se puede reescribir como:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.4: Expresión matricial para la proyección paralela 3D→2D.

Puede verificarse que la Ecuación 5.2, donde simplemente se ignora a la tercera componente, es un caso particular de la Ecuación 5.3 para $d = (0,0,1)$.

5.5.2 Proyección Paralela 4D→3D

En 4D los rayos proyectores también pueden tener asignada una dirección, cualquiera que no sea paralela al volumen de proyección. Si la dirección de proyección está dada por el vector $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ y el volumen de proyección es el volumen principal $X_1X_2X_3$, esto implica que $d_4 \neq 0$ para que los rayos no sean paralelos al volumen de proyección.

Entonces sea $p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathfrak{R}^4$, un punto cuya proyección en el volumen $X_1X_2X_3$ es $p' = (x_1', x_2', x_3', 0)$, los valores de x_1' , x_2' y x_3' se pueden calcular haciendo uso de la ecuación paramétrica de la recta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + t \cdot d_1 \\x_2' &= x_2 + t \cdot d_2 \\x_3' &= x_3 + t \cdot d_3 \\0 &= x_4 + t \cdot d_4\end{aligned}$$

La última ecuación asegura que p' está en el volumen $X_1X_2X_3$, y de aquí se puede despejar el parámetro t como $t = -x_4 / d_4$, substituyendo este valor en el resto de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases}x_1' = x_1 - \frac{x_4}{d_4} d_1 = x_1 - \frac{d_1}{d_4} x_4 \\x_2' = x_2 - \frac{x_4}{d_4} d_2 = x_2 - \frac{d_2}{d_4} x_4 \\x_3' = x_3 - \frac{x_4}{d_4} d_3 = x_3 - \frac{d_3}{d_4} x_4\end{cases}$$

Ecuación 5.5: Fórmulas para la proyección paralela 4D→3D.

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial, utilizando coordenadas homogéneas y eliminando los denominadores de la siguiente manera:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad x_4' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.6: Expresión matricial para la proyección paralela 4D→3D.

Esta ecuación produce un punto de la forma:

$$p' = (d_4 x_1 - d_1 x_4 \quad d_4 x_2 - d_2 x_4 \quad d_4 x_3 - d_3 x_4 \quad 0 \quad d_4).$$

5.5.3 Proyección Paralela $nD \rightarrow (n-1)D$

En general, en nD los rayos proyectores pueden tener asignada una dirección, cualquiera que no sea paralela al hiperplano $(n-1)$ -dimensional de proyección. Si la dirección de proyección está dada por el vector $d = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ y el hiperplano de proyección es el hiperplano principal $X_1X_2X_3 \dots X_{n-1}$, esto implica que $d_n \neq 0$ para que los rayos no sean paralelos al hiperplano de proyección.

Entonces sea $p = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$, un punto cuya proyección en el hiperplano $X_1X_2X_3 \dots X_{n-1}$ es $p' = (x_1', x_2', x_3', \dots, x_{n-1}', 0)$, los valores para x_k' para $1 \leq k \leq n-1$ se pueden calcular haciendo uso de la ecuación paramétrica de la recta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + t \cdot d_1 \\ x_2' &= x_2 + t \cdot d_2 \\ x_3' &= x_3 + t \cdot d_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_{n-1} + t \cdot d_{n-1} \\ 0 &= x_n + t \cdot d_n \end{aligned}$$

La última ecuación asegura que p' está en el hiperplano $X_1X_2X_3 \dots X_{n-1}$, y de aquí se puede despejar el parámetro t como $t = -x_n / d_n$, substituyendo este valor en el resto de ecuaciones se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1' &= x_1 - \frac{x_n}{d_n} d_1 = x_1 - \frac{d_1}{d_n} x_n \\ x_2' &= x_2 - \frac{x_n}{d_n} d_2 = x_2 - \frac{d_2}{d_n} x_n \\ x_3' &= x_3 - \frac{x_n}{d_n} d_3 = x_3 - \frac{d_3}{d_n} x_n \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_{n-1} - \frac{x_n}{d_n} d_{n-1} = x_{n-1} - \frac{d_{n-1}}{d_n} x_n \end{aligned} \right.$$

Ecuación 5.7: Fórmulas para la proyección paralela $nD \rightarrow (n-1)D$.

Estas ecuaciones se pueden escribir en forma matricial, utilizando coordenadas homogéneas y eliminando los denominadores de la siguiente manera:

$$[x_1' \ x_2' \ \dots \ x_n' \ 1] = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ 1] \cdot \begin{bmatrix} d_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & d_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & \dots & -d_{n-2} & -d_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.8: Expresión matricial para la proyección paralela $nD \rightarrow (n-1)D$.

Esta ecuación produce un punto de la forma:

$$p' = (d_n x_1 - d_1 x_n \quad d_n x_2 - d_2 x_n \quad \dots \quad d_n x_{n-1} - d_{n-1} x_n \quad 0 \quad d_n).$$

5.6 Proyección Perspectiva

En la proyección perspectiva a diferencia de la proyección paralela, los rayos proyectores tienen una dirección diferente para cada punto del objeto a proyectar.

5.6.1 Proyección Perspectiva $3D \rightarrow 2D$

En 3D, la proyección perspectiva se obtiene de la siguiente forma. Sea $c = (c_1, c_2, c_3)$ el centro de proyección, $X_1 X_2$ el plano de proyección y $p = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3$, un punto cuya proyección en el plano $X_1 X_2$ es $p' = (x_1', x_2', 0)$ (Ver Figura 5.5).

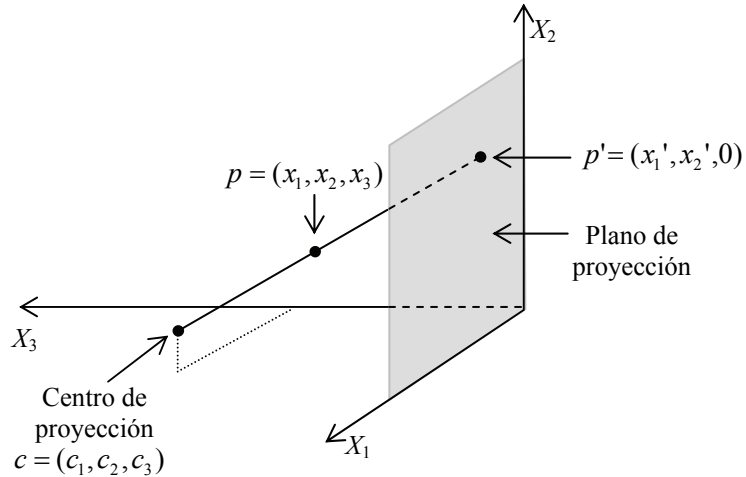


Figura 5.5 Proyección perspectiva de un punto p en el plano X_1X_2 .

Los valores de x_1' y x_2' se pueden calcular haciendo uso de la ecuación paramétrica de la recta (ver Sección 5.4) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + t \cdot (x_1 - c_1) \\ x_2' &= x_2 + t \cdot (x_2 - c_2) \\ 0 &= x_3 + t \cdot (x_3 - c_3) \end{aligned}$$

La última ecuación asegura que p' está en el plano X_1X_2 , y de aquí se puede despejar el parámetro t como $t = x_3 / (c_3 - x_3)$, substituyendo este valor en el resto de ecuaciones se tiene:

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + \frac{x_3}{c_3 - x_3} (x_1 - c_1) = \frac{x_1(c_3 - x_3) + x_1x_3 - c_1x_3}{c_3 - x_3} = \frac{c_3x_1 - c_1x_3}{c_3 - x_3} \\ x_2' = x_2 + \frac{x_3}{c_3 - x_3} (x_2 - c_2) = \frac{x_2(c_3 - x_3) + x_2x_3 - c_2x_3}{c_3 - x_3} = \frac{c_3x_2 - c_2x_3}{c_3 - x_3} \end{cases}$$

Ecuación 5.9: Fórmulas para la proyección perspectiva 3D→2D [Aguilera 07].

De esta forma, se tiene que en coordenadas homogéneas el punto p' está dado por

$$p' = \begin{pmatrix} \frac{c_3x_1 - c_1x_3}{c_3 - x_3} & \frac{c_3x_2 - c_2x_3}{c_3 - x_3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por $(c_3 - x_3)$ se elimina el denominador, y de esta forma, nuevamente en coordenadas homogéneas se tiene que:

$$p' = (c_3x_1 - c_1x_3 \quad c_3x_2 - c_2x_3 \quad 0 \quad c_3 - x_3)$$

Entonces, en forma matricial utilizando coordenadas homogéneas se tiene:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.10: Expresión matricial para la proyección perspectiva 3D→2D.

5.6.2 Proyección Perspectiva 4D→3D

En 4D, la proyección perspectiva se puede obtener de la siguiente forma. Sea $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ el centro de proyección, $X_1X_2X_3$ el volumen de proyección y $p = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathfrak{R}^4$, un punto cuya proyección en el volumen $X_1X_2X_3$ es $p' = (x_1', x_2', x_3', 0)$.

Los valores de x_1' , x_2' y x_3' se pueden calcular haciendo uso de la ecuación paramétrica de la recta, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + t \cdot (x_1 - c_1) \\ x_2' &= x_2 + t \cdot (x_2 - c_2) \\ x_3' &= x_3 + t \cdot (x_3 - c_3) \\ 0 &= x_4 + t \cdot (x_4 - c_4) \end{aligned}$$

La última ecuación asegura que p' está en el volumen $X_1X_2X_3$, y de aquí se puede despejar el parámetro t como $t = x_4 / (c_4 - x_4)$, substituyendo este valor en el resto de ecuaciones se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = x_1 + \frac{x_4}{c_4 - x_4} (x_1 - c_1) = \frac{x_1(c_4 - x_4) + x_1x_4 - c_1x_4}{c_4 - x_4} = \frac{c_4x_1 - c_1x_4}{c_4 - x_4} \\ x_2' = x_2 + \frac{x_4}{c_4 - x_4} (x_2 - c_2) = \frac{x_2(c_4 - x_4) + x_2x_4 - c_2x_4}{c_4 - x_4} = \frac{c_4x_2 - c_2x_4}{c_4 - x_4} \\ x_3' = x_3 + \frac{x_4}{c_4 - x_4} (x_3 - c_3) = \frac{x_3(c_4 - x_4) + x_3x_4 - c_3x_4}{c_4 - x_4} = \frac{c_4x_3 - c_3x_4}{c_4 - x_4} \end{array} \right.$$

Ecuación 5.11: Fórmulas para la proyección perspectiva 4D→3D.

De esta forma, se tiene que en coordenadas homogéneas el punto p' está dado por

$$p' = \begin{pmatrix} \frac{c_4x_1 - c_1x_4}{c_4 - x_4} & \frac{c_4x_2 - c_2x_4}{c_4 - x_4} & \frac{c_4x_3 - c_3x_4}{c_4 - x_4} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por $(c_4 - x_4)$ se elimina el denominador, y de esta forma, nuevamente en coordenadas homogéneas se tiene que:

$$p' = (c_4x_1 - c_1x_4 \quad c_4x_2 - c_2x_4 \quad c_4x_3 - c_3x_4 \quad 0 \quad c_4 - x_4)$$

Entonces, en forma matricial utilizando coordenadas homogéneas se tiene:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad x_4' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.12: Expresión matricial para la proyección perspectiva 4D→3D.

5.6.3 Proyección Perspectiva $nD \rightarrow (n-1)D$

En general, en nD , la proyección perspectiva se puede obtener de la siguiente forma.

Sea $c = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$ el centro de proyección, $X_1X_2X_3 \dots X_{n-1}$ el hiperplano $(n-1)$ -dimensional de proyección y $p = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n$, un punto cuya proyección en el hiperplano $X_1X_2X_3 \dots X_{n-1}$ es $p' = (x_1', x_2', \dots, x_{n-1}', 0)$.

Los valores de x_1' , x_2' y x_3' se pueden calcular haciendo uso de la ecuación paramétrica de la recta, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 + t \cdot (x_1 - c_1) \\ x_2' &= x_2 + t \cdot (x_2 - c_2) \\ x_3' &= x_3 + t \cdot (x_3 - c_3) \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_{n-1} + t \cdot (x_{n-1} - c_{n-1}) \\ 0 &= x_n + t \cdot (x_n - c_n) \end{aligned}$$

La última ecuación asegura que p' está en el hiperplano $X_1X_2X_3\dots X_{n-1}$, y de aquí se puede despejar el parámetro t como $t = x_n / (c_n - x_n)$, substituyendo este valor en el resto de ecuaciones se tiene:

$$\left\{ \begin{aligned} x_1' &= x_1 + \frac{x_n}{c_n - x_n} (x_1 - c_1) = \frac{x_1(c_n - x_n) + x_1x_n - c_1x_n}{c_n - x_n} = \frac{c_nx_1 - c_1x_n}{c_n - x_n} \\ x_2' &= x_2 + \frac{x_n}{c_n - x_n} (x_2 - c_2) = \frac{x_2(c_n - x_n) + x_2x_n - c_2x_n}{c_n - x_n} = \frac{c_nx_2 - c_2x_n}{c_n - x_n} \\ x_3' &= x_3 + \frac{x_n}{c_n - x_n} (x_3 - c_3) = \frac{x_3(c_n - x_n) + x_3x_n - c_3x_n}{c_n - x_n} = \frac{c_nx_3 - c_3x_n}{c_n - x_n} \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_{n-1} + \frac{x_n}{c_n - x_n} (x_{n-1} - c_{n-1}) = \frac{x_{n-1}(c_n - x_n) + x_{n-1}x_n - c_{n-1}x_n}{c_n - x_n} = \frac{c_nx_{n-1} - c_{n-1}x_n}{c_n - x_n} \end{aligned} \right.$$

Ecuación 5.13: Fórmulas para la proyección perspectiva $nD \rightarrow (n-1)D$.

De esta forma, se tiene que en coordenadas homogéneas el punto p' está dado por

$$p' = \begin{pmatrix} \frac{c_nx_1 - c_1x_n}{c_n - x_n} & \frac{c_nx_2 - c_2x_n}{c_n - x_n} & \dots & \frac{c_nx_{n-1} - c_{n-1}x_n}{c_n - x_n} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por $(c_n - x_n)$ se elimina el denominador, y de esta forma, nuevamente en coordenadas homogéneas se tiene que:

$$p' = (c_nx_1 - c_1x_n \quad c_nx_2 - c_2x_n \quad \dots \quad c_nx_{n-1} - c_{n-1}x_n \quad 0 \quad c_n - x_n)$$

Entonces, en forma matricial utilizando coordenadas homogéneas se tiene:

$$[x_1' \ x_2' \ \dots \ x_n' \ 1] = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \ 1] \cdot \begin{bmatrix} c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_n & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & \dots & -c_{n-2} & -c_{n-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_n \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.14: Expresión matricial para la proyección perspectiva $nD \rightarrow (n-1)D$.

5.7 Proyecciones Sucesivas

Se han analizado las proyecciones para llevar la información de un espacio nD al espacio inmediato inferior $(n-1)D$, pero si se desea obtener una proyección $nD \rightarrow kD$ para $2 \leq k \leq n-1$, se tiene que calcular las proyecciones sucesivas, es decir, primero se calcula la proyección $nD \rightarrow (n-1)D$, enseguida la proyección $(n-1)D \rightarrow (n-2)D$ y así sucesivamente hasta obtener la proyección deseada. En el caso particular de la visualización de un espacio nD en una pantalla de computadora se necesita una proyección sucesiva de nD a $2D$.

En [Hollasch 91] se menciona que es posible combinar las proyecciones de $4D \rightarrow 3D$ y $4D \rightarrow 2D$ en un simple paso, es decir una proyección $4D \rightarrow 2D$. Con esta idea, se puede pensar en tener una proyección $nD \rightarrow 2D$ también en un solo paso, sin embargo, esta estimación tiene las siguientes desventajas.

- No se pueden especificar independientemente los parámetros de visión para cada proyección sucesiva.
- No se puede observar la proyección desde diferentes ángulos en los espacios intermedios.

5.8 Proyección Directa $nD \rightarrow 2D$

A continuación se deducen las fórmulas para crear las matrices de proyección directa, tanto paralelas como perspectiva $nD \rightarrow 2D$.

5.8.1 Proyección Paralela $nD \rightarrow 2D$

Sea $P_{3,2}$ la matriz de proyección paralela $3D \rightarrow 2D$ y $P_{4,3}$ la matriz de proyección paralela $4D \rightarrow 3D$. Es posible obtener en un solo paso la matriz de proyección paralela $4D \rightarrow 2D$ ($P_{4,2}$), multiplicando las matrices de proyección $P_{4,3} \cdot P_{3,2}$, si en ambas proyecciones se consideran los mismos parámetros en cada dimensión para crear los vectores de dirección, es decir, $d = (d_1, d_2, d_3)$ en $3D$ y $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ en $4D$, de esta forma:

$$P_{4,2} = \begin{bmatrix} d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_3 d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 d_4 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 d_4 & -d_2 d_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 d_4 \end{bmatrix}$$

Con esto, se puede calcular la matriz de proyección paralela $P_{5,2}$, multiplicando la matriz $P_{5,4}$ con la matriz $P_{4,2}$ anteriormente calculada, si nuevamente se consideran los mismos parámetros en cada dimensión para el crear los vectores de dirección, esto es que $d = (d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ en $5D$. De esta forma:

$$P_{5,2} = \begin{bmatrix} d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & -d_3 & -d_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_3 d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 d_4 & -d_2 d_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 d_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d_3 d_4 d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 d_4 d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d_1 d_4 d_5 & -d_2 d_4 d_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 d_4 d_5 \end{bmatrix}$$

Por tanto, en general, se deduce que, si se consideran los mismos parámetros en cada dimensión para crear los vectores de dirección, $d = (d_1, d_2, d_3, \dots, d_n)$ para todas las dimensiones, la matriz de proyección paralela directa $nD \rightarrow 2D$, denotada por $P_{n,2}$, está dada por:

$$P_{n,2} = \begin{bmatrix} d_3 d_4 d_5 \dots d_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_3 d_4 d_5 \dots d_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -d_1 d_4 d_5 \dots d_n & -d_2 d_4 d_5 \dots d_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 d_4 d_5 \dots d_n \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.15: Matriz de proyección paralela directa $nD \rightarrow 2D$.

Su comprobación es sencilla por inducción. Se asume que la matriz $P_{n,2}$ es válida para cualquier n , entonces se prueba para $n+1$. De esta forma, se debe cumplir que la matriz $P_{n+1,2}$ es igual a $P_{n+1,n} \cdot P_{n,2}$.

$P_{n+1,2}$ se escribe como:

$$\begin{bmatrix} d_3 d_4 d_5 \dots d_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_3 d_4 d_5 \dots d_{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -d_1 d_4 d_5 \dots d_{n+1} & -d_2 d_4 d_5 \dots d_{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 d_4 d_5 \dots d_{n+1} \end{bmatrix}$$

y es claro ver que esta matriz se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} d_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & d_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_{n+1} & 0 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & \dots & d_{n-1} & d_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & d_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_3 d_4 d_5 \dots d_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_3 d_4 d_5 \dots d_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -d_1 d_4 d_5 \dots d_n & -d_2 d_4 d_5 \dots d_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 d_4 d_5 \dots d_n \end{bmatrix}$$

Lo que es equivalente a $P_{n+1,n} \cdot P_{n,2}$.

5.8.2 Proyección Perspectiva $nD \rightarrow 2D$

Sea $Q_{3,2}$ la matriz de proyección perspectiva $3D \rightarrow 2D$ y $Q_{4,3}$ la matriz de proyección perspectiva $4D \rightarrow 3D$. Si en ambas proyecciones se considera los mismos parámetros en cada dimensión para crear los centros de proyección (es decir, $c = (c_1, c_2, c_3)$ en $3D$ y $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ en $4D$), es posible obtener en un solo paso, la matriz de proyección perspectiva $4D \rightarrow 2D$ ($Q_{4,2}$), multiplicando las matrices de proyección $Q_{4,3} \cdot Q_{3,2}$, de esta forma:

$$\begin{aligned}
Q_{4,2} &= \begin{bmatrix} c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_3c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3c_4 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1c_4 & -c_2c_4 & 0 & 0 & -c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_3c_4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Con esto, se puede calcular la matriz de proyección perspectiva $Q_{5,2}$, multiplicando la matriz $Q_{5,4}$ con la matriz $Q_{4,2}$ anteriormente calculada, si nuevamente se consideran los mismos parámetros en cada dimensión para el crear los centros de proyección, esto es que $c = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ en 5D. De esta forma:

$$\begin{aligned}
Q_{5,2} &= \begin{bmatrix} c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1c_4 & -c_2c_4 & 0 & 0 & 0 & -c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3c_4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} c_3c_4c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3c_4c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_1c_4c_5 & -c_2c_4c_5 & 0 & 0 & 0 & -c_4c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3c_4c_5 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Por tanto, en general, se deduce que, si se consideran los mismos parámetros en cada dimensión para crear los centros de proyección, $c = (c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)$ para todas las dimensiones, la matriz de proyección perspectiva directa $nD \rightarrow 2D$, denotada por $Q_{n,2}$ está dada por:

$$Q_{n,2} = \begin{bmatrix} c_3c_4c_5 \dots c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3c_4c_5 \dots c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1c_4c_5 \dots c_n & -c_2c_4c_5 \dots c_n & 0 & \dots & 0 & -c_4c_5 \dots c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3c_4c_5 \dots c_n \end{bmatrix}$$

Ecuación 5.16: Matriz de proyección perspectiva directa $nD \rightarrow 2D$.

Nuevamente se realiza la comprobación por inducción. Se asume que la matriz $Q_{n,2}$ es válida para cualquier n , entonces se prueba para $n+1$. De esta forma, se debe cumplir que la matriz $Q_{n+1,2}$ es igual a $Q_{n+1,n} \cdot Q_{n,2}$.

$Q_{n+1,2}$ se escribe como:

$$\begin{bmatrix} c_3c_4c_5 \dots c_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3c_4c_5 \dots c_{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1c_4c_5 \dots c_{n+1} & -c_2c_4c_5 \dots c_{n+1} & 0 & \dots & 0 & -c_4c_5 \dots c_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3c_4c_5 \dots c_{n+1} \end{bmatrix}$$

y es claro ver que esta matriz se puede reescribir como:

$$\begin{bmatrix} c_{n+1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & c_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n+1} & 0 & 0 \\ -c_1 & -c_2 & \dots & c_{n-1} & c_n & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_3c_4c_5 \dots c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3c_4c_5 \dots c_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_1c_4c_5 \dots c_n & -c_2c_4c_5 \dots c_n & 0 & \dots & 0 & -c_4c_5 \dots c_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3c_4c_5 \dots c_n \end{bmatrix}$$

Lo que es equivalente a $Q_{n+1,n} \cdot Q_{n,2}$.

5.9 Resumen

En este capítulo se ha presentado una generalización de las matrices de proyección $nD \rightarrow (n-1)D$ paralela y perspectiva, basándose en la ecuación paramétrica de la recta. Se sabe que para obtener una proyección de un espacio nD a $2D$, se necesitan de proyecciones sucesivas, entonces se pueden definir diferentes parámetros de proyección (direcciones de proyección para la proyección paralela y centros de proyección para la proyección perspectiva) para cada dimensión, y con esto se pueden obtener proyecciones desde diferentes ángulos de visión.

Para el caso cuando se comparten los valores para los parámetros de proyección en cada proyección sucesiva, se demostró que la proyección de nD a $2D$, puede realizarse en un solo paso, cuando se utilizan todas como proyecciones paralelas o perspectivas, pero no ambas.