Capítulo 4: Rotaciones Multidimensionales con Operaciones Vectoriales

Como se vio en el capítulo anterior, se puede hacer rotar un objeto en el espacio *n*D, proporcionando *n*-1 puntos no cohiperplanares, es decir, se proporciona el eje de rotación, el cual es la representación de un simplex (*n*-2)D.

En este capítulo se analiza y extiende el proceso planteado en [Teoh 05], para las rotaciones multidimensionales en base a operaciones vectoriales, en donde, en lugar de proporcionar el eje (*n*-2)-dimensional de rotación, se proporciona el plano de rotación, el cuál puede estar formado por cualesquiera dos vectores unitarios y ortogonales entre si.

4.1 Introducción

Trabajando con propiedades vectoriales, se propone una fórmula para la rotación de un punto representado por un vector $x \in \Re^n$ en un plano arbitrario, la cual pueda ser aplicable para cualquier dimensión *n*D donde *n*>2.

La forma más intuitiva de describir una rotación, requiere dos elementos: el eje, y el ángulo de rotación. La rotación en si misma ocurre en un plano perpendicular al eje de rotación. En 2D y 3D para llevar a cabo una rotación, puede ser más cómodo especificar los puntos que forman al eje de rotación, sin embargo, para dimensiones superiores se torna un poco más complicado, ya que se tienen que proporcionar *n*-1 puntos no cohiperplanares para definir al eje (*n*-2)-dimensional de rotación, de esta forma, podría ser más cómodo, especificar el plano de rotación.

La matriz para la rotación 2D alrededor del origen es ya conocida, y está dada por la (Ecuación 3.9). Esta fórmula se llevo a su forma general en el Capítulo 3, la cual es aplicable cuando se proporciona el eje de rotación. En este capítulo se busca nuevamente, generalizar una fórmula para rotaciones generales para cualquier dimensión nD para $n \geq 2$, pero desarrollando una formulación en términos de operaciones vectoriales, evitando trabajar con coordenadas cartesianas, y en este caso, la fórmula será aplicable cuando se proporcione el plano de rotación.

4.2 Suposiciones

Sea $x \in \Re^n$ un vector, el cual representa un punto en un plano P. Se denota la rotación de x en un plano P dado un ángulo θ, como $rot_{P,\theta}(x)$. Y sin perdida de generalidad se hacen las siguientes suposiciones:

1. El plano actual de rotación P es paralelo al plano P_0 que pasa por el origen. Dos planos P y P_0 son paralelos si sus vectores normales n_P y n_{P_0} también lo son [Grossman 88] La Figura 4.1 muestra dos planos paralelos en un espacio 3D.

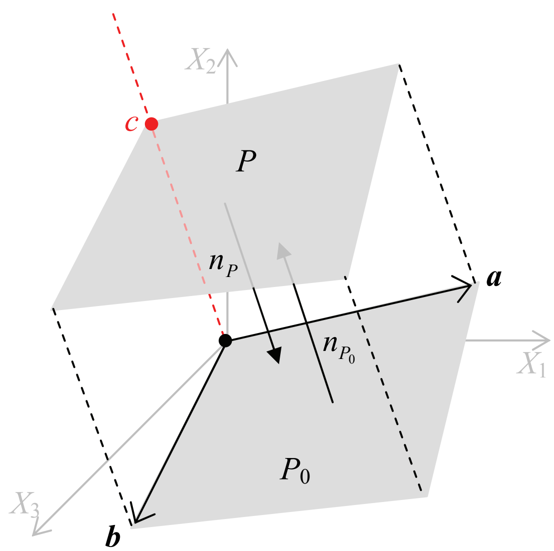

Figura 4.1: Un plano *P* paralelo a un plano *P*$_0$ que pasa por el origen.

2. El centro de rotación c está en el hiperplano (n-2)-dimensional que intersecta al plano P_0 en el origen. Esto significa que la rotación deseada en P alrededor de c, es isomorfa mediante una translación a una rotación en el plano P_0 alrededor del origen.
3. El plano P_0 está formado por dos vectores ortonormales (ortogonales y unitarios): $a, b \in \Re^n$. Y dado que en las rotaciones, los planos de rotación son siempre en 2D, es suficiente con los vectores a y b para representar al plano P_0.
4. Para tener una dirección de giro positivo, se define la rotación del vector a hacia el vector b, esto es, que se cumple que: $rot_{P_0,\pi/2}(a) = b$

4.3 Rotación en el Plano *P* en Función de la Rotación en *P₀*

Sea θ el ángulo por el cual se desea rotar x. Se obtiene la rotación deseada rotando la proyección ortogonal de x en P_0, y después llevar el resultado de regreso al plano P, en el cual se encuentra x (ver Figura 4.2).

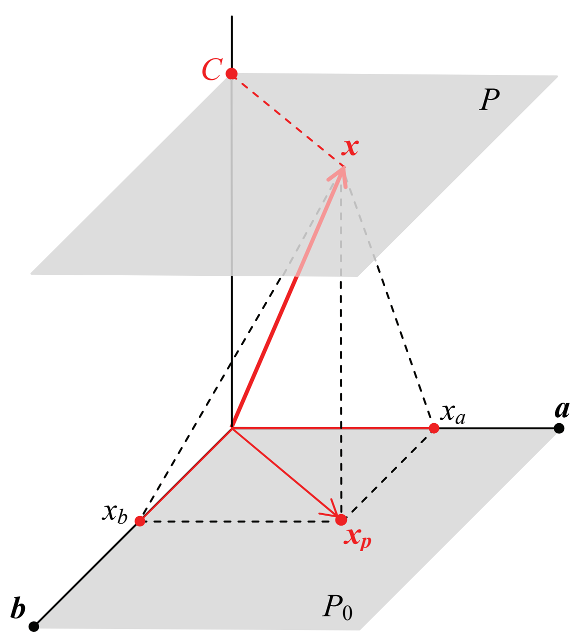

Figura 4.2: Proyección de x sobre el plano P_0.

4.3.1 Proyección de *x* Sobre el Plano P_0

Sean *u* y *v* dos vectores distintos de cero, la proyección ortogonal de *u* sobre *v*, es un vector que se define por [Grossman 88]:

$$proy_v u = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v$$

La proyección ortogonal de un vector *u* sobre un plano 2D, es la suma de las proyecciones sobre dos vectores (mutuamente ortogonales) que definan al plano. Entonces, la proyección de *x* sobre el plano P_0 denotada como x_p, será la suma de las proyecciones ortogonales sobre los vectores *a* y *b* (ver Figura 4.2).

$x_p = proy_a x + proy_b x$

$= \frac{x \cdot a}{|a|^2} a + \frac{x \cdot b}{|b|^2} b$, pero dado que *a* y *b* son vectores unitarios, se tiene que:

$$x_p = (x \cdot a)a + (x \cdot b)b$$

Ecuación 4.1: Proyección de *x* sobre el plano P_0.

4.3.2 Llevar el Resultado de la Rotación en P_0 a *P*

Si se tiene una componente ortogonal al plano *P*, se cumple que está componente también es ortogonal al plano P_0, lo que significa que al estar fuera del plano de rotación, no se ve afectada por el giro.

Teorema: (x- x_p) es la componente de *x* ortogonal al plano P_0, cuya suma al resultado de $rot_{P_0}(x_p)$, es suficiente para obtener el resultado de la rotación $rot_{P,\theta}(x)$ deseada.

Demostración: Se demuestra que (x- x_p) es ortogonal a los vectores *a* y *b*. Considerando que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es igual a cero, se tiene que:

$(x - x_p) \cdot a = x \cdot a - x_p \cdot a$

$$= x \cdot a - \big((x \cdot a)a + (x \cdot b) \cdot b\big) \cdot a$$

$$= x \cdot a - \big((x \cdot a)(a \cdot a) + (x \cdot b) \cdot (b \cdot a)\big)$$

Pero dado que a y b son vectores unitarios y ortogonales entre si, por la definición del producto escalar se tiene que:

$a \cdot a = |a||a| \cos(0) = |a|^2 = 1$

$a \cdot b = |a||b| \cos(\pi / 2) = 0$, por lo tanto:

$$(x - x_p) \cdot a = x \cdot a - \big((x \cdot a)|a|^2 + 0\big)$$

$$= x \cdot a - x \cdot a$$

$$= 0$$

De forma similar:

$$(x - x_p) \cdot b = x \cdot b - x_p \cdot b$$

$$= x \cdot b - \big((x \cdot a)a + (x \cdot b) \cdot b\big) \cdot b$$

$$= x \cdot b - \big((x \cdot a)(a \cdot b) + (x \cdot b) \cdot (b \cdot b)\big)$$

$$= x \cdot b - \big(0 + (x \cdot b)|b|^2\big)$$

$$= x \cdot b - x \cdot b$$

$$= 0$$

Con esto se demuestra que $(x- x_p)$ es la componente de x que es ortogonal al plano P_0. Entonces, la rotación de x en el plano P dado un ángulo θ es igual a la rotación de x_p en el plano P_0 con el mismo ángulo θ, más la suma de la componente $(x- x_p)$. Es decir:

$$rot_{P,\theta}(x) = rot_{P_0,\theta}(x_P) + (x - x_P)$$

Ecuación 4.2: Fórmula inicial para la rotación de *x* en el plano *P*.

Entonces, resta obtener la ecuación para la rotación de x_p en el plano P_0 con el ángulo θ para obtener el resultado deseado.

4.4 Rotación en el Plano P_0

En base a la Ecuación 4.1 que obtiene la proyección de x en P_0, se tiene que las coordenadas de x_p en P_0 con respecto a los vectores a y b son: $x \cdot a$ y $x \cdot b$ respectivamente.

Sea ϕ el ángulo entre x_p y a, se tiene que (ver Figura 3.5):

$$x \cdot a = |x_p| \cos\phi$$
$$x \cdot b = |x_P| \sin\phi$$

Ecuación 4.3: Fórmulas para obtener las coordenadas de x_p en el plano P_0.

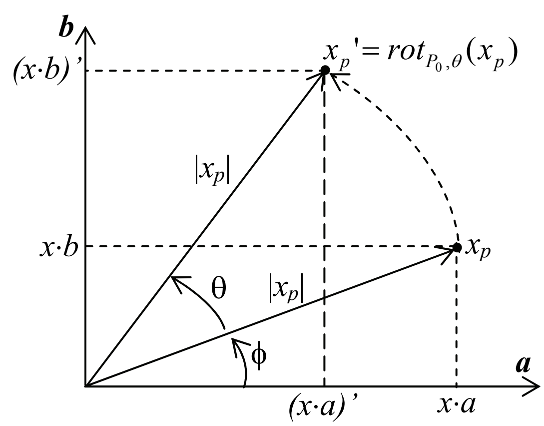

Figura 4.3: Rotación de x_p en el plano P_0.

Entonces, el vector resultante x_p' después de rotar x_p por el ángulo deseado θ, será equivalente a la rotación de la proyección de x_p desde a por un ángulo de $(\phi + \theta)$ (ver Figura 3.5). Por lo tanto se tiene que las coordenadas del vector x_p' son:

$$(x \cdot a)' = |x_p| \cos(\phi + \theta)$$

$$(x \cdot b)' = |x_p| \sin(\phi + \theta)$$

Y dado que x_p' corresponde a la proyección del vector rotado x' en el plano P, entonces por la fórmula de la proyección se tiene que:

$$rot_{P_0,\theta}(x_p) = x_p' = (x \cdot a)'a + (x \cdot b)'b$$

$$= \left|x_p\right|\cos(\phi+\theta)a + \left|x_p\right|\sin(\phi+\theta)b$$

De aquí, utilizando algunas identidades trigonométricas:

$$\left|x_p\right|\cos(\phi+\theta) = \left|x_p\right|(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta)$$

$$= \left(\left|x_p\right|\cos\varphi\right)\cos\theta - \left(\left|x_p\right|\sin\varphi\right)\sin\theta \text{ , y substituyendo la Ecuación 4.3}$$

$$= (x \cdot a)\cos\theta - (x \cdot b)\sin\theta$$

De forma similar:

$$\left|x_p\right|\sin(\phi+\theta) = \left|x_p\right|(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta)$$

$$= \left(\left|x_p\right|\sin\varphi\right)\cos\theta + \left(\left|x_p\right|\cos\varphi\right)\sin\theta$$

$$= (x \cdot b)\cos\theta + (x \cdot a)\sin\theta$$

Por tanto la rotación de x_p dado un ángulo θ en el plano P_0 está dada por:

$$rot_{P_0,\theta}(x_p) = \left((x \cdot a)\cos\theta - (x \cdot b)\sin\theta\right)a + \left((x \cdot b)\cos\theta + (x \cdot a)\sin\theta\right)b$$

Ecuación 4.4: Fórmula para la rotación de x_p en el plano P_0.

4.5 Rotación en el Plano *P*

Finalmente, para obtener la rotación de x por el ángulo deseado θ en el plano P, se substituyen la Ecuación 4.1 y la Ecuación 4.4 en la Ecuación 4.2, y con esto se obtiene una ecuación en términos de los vectores conocidos x, a y b:

$$rot_{P,\theta}(x) = \left((x \cdot a)\cos\theta - (x \cdot b)\sin\theta\right)a + \left((x \cdot b)\cos\theta + (x \cdot a)\sin\theta\right)b \\ + x - ((x \cdot a)a + (x \cdot b)b)$$

Ecuación 4.5: Fórmula para la rotación de x en el plano P.

Esta fórmula puede ser aplicada a cualquier dimensión nD, con n>2, dado que está escrita completamente en términos de operaciones vectoriales involucrando los vectores arbitrarios $x, a, b \in \Re^n$. Se puede reescribir esta fórmula en forma matricial, factorizando algunos elementos.

$$
\begin{aligned}
rot_{P,\theta}(x) &= x + \big((x \cdot a)\cos\theta - (x \cdot b)\sin\theta - (x \cdot a)\big)a + \big((x \cdot b)\cos\theta + (x \cdot a)\sin\theta - (x \cdot b)\big)b \\
&= x + \big((x \cdot a)(\cos\theta - 1) - (x \cdot b)\sin\theta\big)a + \big((x \cdot a)\sin\theta + (x \cdot b)(\cos\theta - 1)\big)b
\end{aligned}
$$

De esta forma, la rotación de un vector x dado un ángulo θ en el plano P se puede expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$
\begin{cases}
r = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot a & x \cdot b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \\
\\
rot_{P,\theta}(x) = x + r_1\, a + r_2\, b
\end{cases}
$$

Ecuación 4.6: Ecuaciones matriciales para la rotación de *x* en el plano *P*.

En la expresión de la matriz r, puede verse un parecido a la ya conocida matriz de rotación 2D.

4.6 Rotación en un Plano Arbitrario

La fórmula de rotación anterior es equivalente a la presentada en [Teoh 05], y es aplicable para poder rotar un vector x en cualquier dimensión, siempre y cuando el plano de rotación formado por los vectores ortonormales a y b pase por el origen. El caso general es cuando el plano de rotación no necesariamente pasa por el origen.

Entonces, sea f un punto en el espacio $\Re^n$ que define el punto de aplicación de los vectores a_f y b_f, los cuales son una representante de los vectores a y b respectivamente, si se obtiene la componente de a_f y b_f desde el origen, se tiene que están definidos por

$a_f = a + f$ y $b_f = b + f$. Con esto, basta restarles f a los vectores a_f y b_f para obtener los vectores ortonormales a y b (Figura 4.4).

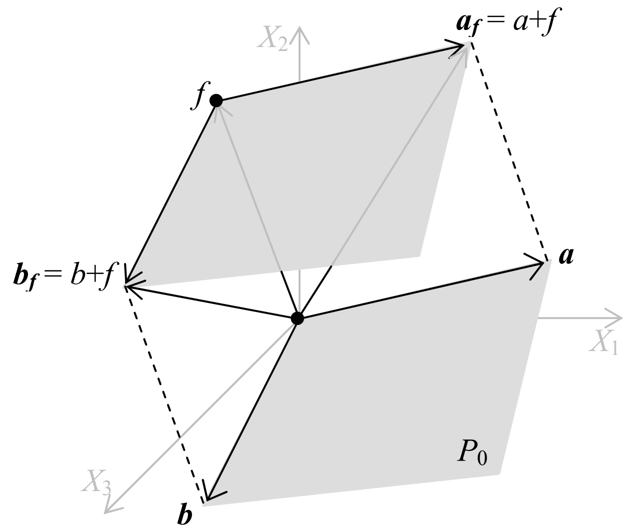

Figura 4.4: Llevar un plano de rotación arbitrario hacia uno que pase por el origen.

De esta forma, para realizar la rotación de un vector x en un plano arbitrario, donde f, es el punto de aplicación de los vectores que definen dicho plano, se realizan 3 pasos:

1. Llevar el vector x al plano que pasa por el origen, esto es: $x_f = x - f$.
2. Aplicar la rotación $rot_{P,\theta}(x_f)$.
3. Regresar el resultado del giro al plano original de rotación. $rot_{P,\theta}(x) = rot_{P,\theta}(x_f) + f$

Así, la rotación general de un vector x en un plano arbitrario en nD, esta dado por:

$$rotg_{P,\theta}(x) = rot_{P,\theta}(x - f) + f$$

Ecuación 4.7: Fórmula para la rotación general de un vector *x* en *n*D.

4.7 Vectores Ortonormales a un Hiperplano (*n*-2)-dimensional

Como se observa, basta con proporcionar los vectores a y b que definen el plano de rotación y el punto de aplicación de ambos vectores, para llevar a cabo cualquier rotación en nD. Sin embargo, en el enfoque analizado en el Capítulo 3, se deseaba llevar a cabo la rotación alrededor de un eje (n-2)-dimensional (un simplex (n-2)D), proporcionando n-1 puntos no cohiperplanares.

Para poder llevar a cabo la rotación alrededor de un hiperplano (n-2)-dimensional con éste enfoque vectorial, se necesita un proceso para obtener el plano bidimensional de rotación a partir del hiperplano dado.

Entonces, se denota la rotación de un vector x alrededor de un hiperplano H (n-2)-dimensional como $rot_{H,\theta}(x)$.

4.7.1 Caso 2D

En 2D no hay mayor problema, ya que solo existe un posible plano de rotación, en este caso el eje de rotación es un punto fijo (hiperplano 0D) que se puede representar por el vector $V_1 \in \Re^2$. De está forma, solamente se lleva V_1 al origen, y se pueden definir sin ningún problema los vectores con las bases canónicas 2D: $a = e_1 = (1,0)$ y $a = e_2 = (0,1)$. Y por tanto, la rotación positiva 2D de un vector x alrededor de un punto fijo está dada por la Ecuación 4.7, considerando como punto f al vector V_1.

$$rot_{H,\theta}(x) = rot_{P,\theta}(x - V_1) + V_1$$

4.7.2 Base Canónica en $\Re^n$

En el espacio vectorial $\Re^n$, existen los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1,0,0,\ldots,0) \\
e_2 &= (0,1,0,\ldots,0) \\
&\vdots \\
e_n &= (0,0,0,\ldots,1)
\end{aligned}$$

A los vectores e_1, e_2, …, e_n se les conoce como *base canónica del espacio vectorial* $\Re^n$, y son linealmente independientes, unitarios y ortogonales entre si. Estos vectores apuntan en la dirección de los ejes principales del espacio nD, es decir que el vector e_i cae completamente sobre el eje Xi para $1 \leq i \leq n$.

Observación 4.1:

En $\Re^3$ se tienen los vectores e_1, e_2, e_3, *los cuales, son comúnmente denotados por las letras i,j y k.*

4.7.3 Producto Vectorial en *n*D

Se introduce el tema de producto vectorial o producto cruz en $\Re^n$, ya que será de utilidad en las generalizaciones siguientes.

El producto vectorial está definido normalmente para vectores tridimensionales como una operación binaria. Sin embargo, si en lugar de pensar que el producto vectorial es una operación binaria, se piensa como una operación (n-1)-aria, donde n es la dimensión del espacio, la generalización del productor vectorial nD para $n \geq 1$, es fácil de visualizar [Murray-Lasso 04].

El producto vectorial $u \times v$ en 3D, de los vectores $u = (u_1, u_2, u_3)$ y $v = (v_1, v_2, v_3)$, utilizando coordenadas cartesianas, está dado por:

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) e_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) e_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) e_3$$

Ecuación 4.8: Producto vectorial 3D.

Nota: De acuerdo a la Observación 4.1 se tiene que:

$$u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

El vector resultado de $u \times v$ es un vector tridimensional ortogonal a los vectores u y v.

Sin embargo, hay un problema para definir el producto vectorial de dos vectores en cualquier otra dimensión, esto es porque la definición del producto vectorial indica que el vector resultante es ortogonal a los factores. Entonces en 2D no existe un vector ortogonal a otros dos vectores no colineales. En 4D y dimensiones superiores, existe un número infinito de vectores que son ortogonales a un par de vectores dados.

Entonces, si se entiende el producto vectorial como el uso de *n*-1 factores para el espacio *n*D, la generalización se vuelve muy simple y es directa por analogía [Murray-Lasso 04]. Si en 3D el producto vectorial de *n*-1=2 vectores está dado por la Ecuación 4.8, entonces en 4D la definición del producto vectorial de *n*-1=3 vectores, $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$, $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, y $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ será:

$$u \times v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{vmatrix}$$

Ecuación 4.9: Producto vectorial 4D.

Este producto tiene como resultado un vector tetradimensional ortogonal a los vectores *u*, *v* y *w*.

Entonces, en general, sean los *n*-1 factores definidos por los vectores $\{V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}\} \in \Re^n$, y $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \in \Re^n$ los vectores unitarios ortogonales entre si que definen la base del espacio *n*D, el producto vectorial *n*D está dado por:

$$V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & \cdots & e_n \\ V_{1,1} & V_{1,2} & V_{1,3} & \cdots & V_{1,n} \\ V_{2,1} & V_{2,2} & V_{2,3} & \cdots & V_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{n-1,1} & V_{n-1,2} & V_{n-1,3} & \cdots & V_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

Ecuación 4.10: Producto vectorial *n*D.

El resultado del producto vectorial *n*D, es un vector *n*-dimensional ortogonal a todos los factores $\{V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}\}$.

4.7.4 Caso 3D

En 3D y dimensiones superiores existen un número infinito de planos de rotación arbitrarios. En este espacio, el eje de rotación es un segmento de recta $\overline{V_1V_2}$, representado por dos vectores no coincidentes $\{V_1, V_2\} \in \Re^3$. Aquí se propone una serie de 5 pasos:

1. Llevar el eje lineal de rotación al origen. Esto se logra restándole a ambos vectores el vector V_1, de está forma el segmento de recta quedará representado por el vector $w = V_2 - V_1$.
2. Obtener un vector *a* ortogonal a *w*. Esto se puede obtener utilizando la generalización del producto vectorial de la siguiente manera:

   Se tiene el vector $w = (w_1, w_2, w_3) \in \Re^3$ que representa al segmento de recta, si se ignora una componente, por ejemplo, la que corresponde al eje X_3, y se define un vector $w' = (w_1, w_2) \in \Re^2$, entonces aplicando la Ecuación 4.10 con *n*=2, se tiene el producto vectorial como una operación unaria:

   $$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} = w_2 e_1 - w_1 e_2$$

Entonces se crea un vector $a \in \Re^3$, constituido con los valores de las componentes que arroja este producto vectorial 2D, y un cero en la posición de la componente que se ignoró, esto es, $a = (w_2, -w_1, 0)$, el cuál es linealmente independiente y ortogonal a w. También se puede omitir la componente en X_1 o X_2, para el caso de omitir la componente en X_2, esto da un vector $w' = (w_1, w_3) \in \Re^2$ y con el producto cruz 2D se tiene:

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} = w_3 e_1 - w_1 e_3$$

por lo tanto $a = (w_3, 0, -w_1)$, el cuál también es linealmente independiente y ortogonal a w.

Observación 4.2:

En este paso se debe tener en cuenta las siguientes observaciones:

a) *Al crear el vector a, se coloca un 0 en la posición de la componente que se ignora, y el resto de componentes estarán dados por el resultado del producto vectorial.*
b) *No se debe omitir una componente que haga que el vector w' sea el vector cero, por ejemplo en el caso de que el vector* $w = (0,0,1)$*, se puede omitir cualquier componente, excepto la tercera.*

3. Obtener un segundo vector b ortogonal a w y a. Para obtener el vector b, ahora se hace uso del producto vectorial 3D como $b = w \times a$, ya que esto da como resultado un vector b que es ortogonal a los factores. Entonces:

$$a \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = (a_2 w_3 - a_3 w_2) e_1 + (a_3 w_1 - a_1 w_3) e_2 + (a_1 w_2 - a_2 w_1) e_3$$

por lo tanto $b = (a_2 w_3 - a_3 w_2,\, a_3 w_1 - a_1 w_3,\, a_1 w_2 - a_2 w_1)$

4. Normalizar los vectores *a* y *b*.
5. Realizar el proceso de rotación alrededor del segmento (hiperplano 1D) con la Ecuación 4.7: Fórmula para la rotación general de un vector *x* en *n*D, y dado que el punto de aplicación de los vectores *a* y *b* determinados es el punto representado por el vector V_1, se tiene que:

   $$rot_{H,\theta}(x) = rot_{P,\theta}(x - V_1) + V_1$$

4.7.5 Caso 4D

En 4D el eje de rotación es un plano formado por tres puntos no colineales, representados por los vectores $\{V_1, V_2, V_3\} \in \Re^4$. Nuevamente se propone una serie de 5 pasos:

1. Llevar un vértice del eje bidimensional de rotación al origen. Esto se logra restándole a los tres vectores el vector V_1, de está forma, el plano queda representado por los vectores $\{W_1, W_2\} \in \Re^3$, donde $W_1 = V_2 - V_1$ y $W_2 = V_3 - V_1$.
2. Obtener un vector *a*, ortogonal a los vectores $\{W_1, W_2\}$. Si se ignora una componente de los vectores $\{W_1, W_2\}$, por ejemplo, la que corresponde al eje X_4, se definen dos vectores $\{W_1', W_2'\} \in \Re^3$ como $W_1' = (W_{1,1}, W_{1,2}, W_{1,3})$ y $W_2' = (W_{2,1}, W_{2,2}, W_{2,3})$. De esta forma, aplicando el producto vectorial 3D se tiene que:

   $$W_1' \times W_2' = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ W_{1,1}' & W_{1,2}' & W_{1,3}' \\ W_{2,1}' & W_{2,2}' & W_{2,3}' \end{vmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$$

Entonces se crea un vector $a \in \Re^4$ constituido con los valores de las componentes que arroja este producto vectorial 3D, y un cero en la posición de la componente que se ignoró, en este caso se tiene que, $a = (a_1, a_2, a_3, 0)$, este vector es linealmente independiente y ortogonal a W_1 y W_2. También se puede escoger omitir la componente en el eje X_1, X_2 o X_3 y se procede de una forma similar para obtener el vector a. Supóngase ahora que se desea omitir la componente en X_3, entonces $W_1^{'} = (W_{1,1}, W_{1,2}, W_{1,4})$ y $W_2^{'} = (W_{2,1}, W_{2,2}, W_{2,4})$, y el producto vectorial 3D queda como:

$$W_1^{'} \times W_2^{'} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_4 \\ W_{1,1}^{'} & W_{1,2}^{'} & W_{1,3}^{'} \\ W_{2,1}^{'} & W_{2,2}^{'} & W_{2,3}^{'} \end{vmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_4 e_4$$

por lo tanto $a = (a_1, a_2, 0, a_4)$, el cuál también es linealmente independiente y ortogonal a W_1 y W_2.

Observación 4.3:

Adicionalmente a la Observación 4.2 del caso 3D, en 4D y dimensiones superiores, se debe cuidar que al omitir una componente, no se vuelvan linealmente dependientes algunos vectores Wi', porque esto causará que el determinante del producto cruz genere un resultado igual a cero.

3. Obtener un segundo vector b ortogonal a los vectores $\{W_1, W_2, a\}$. Para obtener el vector b, ahora se hace uso del producto vectorial 4D como $b = a \times W_1 \times W_2$, ya que este producto da como resultado un vector b ortogonal a todos los factores. Entonces:

$$a \times W_1 \times W_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ W_{1,1} & W_{1,2} & W_{1,3} & W_{1,4} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & W_{2,3} & W_{2,4} \end{vmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 + b_4 e_4$$

Así, el vector $b \in \Re^4$ queda constituido con los valores que arroja el producto vectorial 4D, $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$.

4. Normalizar los vectores *a* y *b*.
5. Realizar el proceso de rotación alrededor del plano (hiperplano 2D) nuevamente con la Ecuación 4.7, y dado que el punto de aplicación de los vectores *a* y *b* determinados es el punto representado por el vector V_1, se tiene que:

   $rot_{H,\theta}(x) = rot_{P,\theta}(x - V_1) + V_1$

4.7.6 Caso *n*D

En este caso se procede con una analogía dimensional de los casos 3D y 4D en la que el eje de rotación en *n*D es un hiperplano (*n*-2)-dimensional formado por *n*-1 puntos no cohiperplanares, tales puntos estarán representados por los vectores $\{V_1, V_2, \ldots V_{n-1}\} \in \Re^n$. La generalización consta, al igual que los casos anteriores, de 5 pasos:

1. Llevar un vértice del eje (*n*-2)-dimensional de rotación al origen. Esto se logra restándole a los *n*-1 vectores el vector V_1, de está forma, el hiperplano estará ahora representado por los vectores $\{W_1, W_2, \ldots, W_{n-2}\} \in \Re^n$, donde $W_i = V_{i+1} - V_1$ para $1 \le i \le n-2$.
2. Obtener un vector *a*, ortogonal a los vectores $\{W_1, W_2, \ldots, W_{n-2}\}$. Se puede ignorar la componente X_i de los vectores $\{W_1, W_2, \ldots, W_{n-2}\}$ para definir *n*-2 vectores $\{W_1', W_2', \ldots, W_{n-2}'\} \in R^{n-1}$, cuidando que ninguno de los vectores se vuelva el vector

cero. De esta forma, si se ignora la componente X_i, y se aplica el producto vectorial (n-1)D con estos vectores, en general se tiene lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_{i-1} & e_{i+1} & \dots & e_n \\ W'_{1,1} & \dots & W'_{1,i-1} & W'_{1,i+1} & \dots & W'_{1,n} \\ W'_{2,1} & \dots & W'_{2,i-1} & W'_{2,i+1} & \dots & W'_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ W'_{n-2,1} & \dots & W'_{n-2,i-1} & W'_{n-2,i+1} & \dots & W'_{n-2,n} \end{vmatrix} = a_1 e_1 + \dots + a_{i-1} e_{i-1} + a_{i+1} e_{i+1} + \dots + a_n e_n$$

Entonces el vector a, se forma como $a = (a_1, \dots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

Observación 4.4: *Obsérvese que:*

a) *Si se ignora la primer componente (X_1)*

$$\begin{vmatrix} e_2 & e_3 & \dots & e_n \\ W'_{1,2} & W'_{1,3} & \dots & W'_{1,n} \\ W'_{2,2} & W'_{2,3} & \dots & W'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W'_{n-2,2} & W'_{n-2,3} & \dots & W'_{n-2,n} \end{vmatrix} = a_2 e_2 + a_3 e_3 + \dots + a_n e_n$$

El vector a, se forma como $a = (0, a_2, a_3, \dots, a_n)$.

b) *Si se ignora la última componente (X_n)*

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_{n-1} \\ W'_{1,1} & W'_{1,2} & \dots & W'_{1,n-1} \\ W'_{2,1} & W'_{2,2} & \dots & W'_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W'_{n-2,1} & W'_{n-2,2} & \dots & W'_{n-2,n-1} \end{vmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_{n-1} e_{n-1}$$

El vector a, se forma como $a = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 0)$.

En cualquier caso el vector a, formado con los valores que arroja el producto vectorial (n-1)D, es linealmente independiente y ortogonal a los vectores $\{W_1, W_2, \dots, W_{n-2}\}$.

3. Obtener un segundo vector b ortogonal a los vectores $\{W_1, W_2, \ldots, W_{n-2}, a\}$. Para obtener el vector b, ahora se hace uso del producto vectorial nD como $b = a \times W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_{n-2}$, ya que este producto da como resultado un vector b ortogonal a todos los factores. Entonces:

$$b = a \times W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_{n-2} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ W_{1,1} & W_{1,2} & \ldots & W_{1,n} \\ W_{2,1} & W_{2,2} & \ldots & W_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ W_{n-2,1} & W_{n-2,2} & \ldots & W_{n-2,n} \end{vmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \ldots + b_n e_n$$

Así, el vector $b \in \Re^n$ queda constituido con los valores que arroja el producto vectorial nD, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

4. Normalizar los vectores a y b.
5. Realizar el proceso de rotación alrededor del hiperplano (n-2)D con la Ecuación 4.7, ya que en general el punto de aplicación de los vectores a y b determinados es el punto representado por el vector V_1, se tiene que:

$$rot_{H,\theta}(x) = rot_{P,\theta}(x - V_1) + V_1$$

4.8 Hiperplano Ortogonal a un Plano de Rotación

El caso contrario a la Sección 4.7 , es que se desee utilizar la Ecuación 3.31: Formula para la rotación general nD., cuando se cuenta con los vectores ortonormales a_f y b_f y su punto de aplicación f. En este caso, se propone un método para determinar el hiperplano (n-2)-dimensional que sea ortogonal a los vectores a_f y b_f dados.

4.8.1 Caso 2D

En 2D el eje de rotación será un punto, por tanto, este estará dado por el punto *f*, entonces el eje estará representado por el punto $V_1 = f$.

4.8.2 Caso 3D

En 3D el eje de rotación es un segmento de recta, definido por dos puntos no coincidentes. El proceso es el siguiente:

1. Llevar los vectores a_f y b_f al origen. Restándoles su punto de aplicación *f*. Y de esta forma se tiene que $a = a_f - f$ y $b = b_f - f$, entonces, se obtiene el primer vértice $V_1 = f$.
2. El segundo y último vértice se obtiene de realizar el producto cruz 3D con los vectores *a* y *b*, y luego sumándole *f*, entonces:

$$a \times b = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)e_3$$

por tanto, $V_2 = \left(a_2 b_3 - a_3 b_2,\, a_3 b_1 - a_1 b_3,\, a_1 b_2 - a_2 b_1\right) + f$

El eje de rotación definido por V_1 y V_2 es ortogonal a los vectores *a* y *b*.

4.8.3 Caso 4D

En 4D el eje de rotación es un plano, definido por tres puntos no colineales. El proceso es el siguiente:

1. Llevar los vectores a_f y b_f al origen. Restándoles su punto de aplicación *f*. Y de esta forma se tiene que $a = a_f - f$ y $b = b_f - f$, entonces, se obtiene el primer vértice $V_1 = f$.

2. El segundo vértice se obtiene de realizar el producto cruz 3D definiendo dos vectores $a^{(3)}, b^{(3)} \in \Re^3$, donde estos vectores se obtienen al ignorar una componente de los vectores originales $a, b \in \Re^4$ (El superíndice indica el número de elementos del vector). Por ejemplo, si se ignora la que corresponde al eje X_4, se tiene que:

$$W_2^{(3)} = a^{(3)} \times b^{(3)} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} \\ b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} \end{vmatrix} = W_{2,1}^{(3)} e_1 + W_{2,2}^{(3)} e_2 + W_{2,3}^{(3)} e_3$$

Entonces se crea el vector $W_2 \in \Re^4$, constituido con los valores de las componentes que arroja este producto vectorial 3D, y un cero en la posición de la componente que se ignoró y finalmente obtener el vértice V_2 sumándole f. En este caso se tiene que $W_2 = (W_{2,1}^{(3)}, W_{2,2}^{(3)}, W_{2,3}^{(3)}, 0)$ y $V_2 = W_2 + f$

Observación 4.5:

No se debe omitir una componente que haga que los vectores $a^{(3)}$ y $b^{(3)}$:

a) *Sean el vector cero.*

b) *Sean linealmente dependientes.*

3. El tercer y último vértice se obtiene al realizar el producto cruz 4D con los vectores a, b, y W_2 y sumándole f, entonces.

$$W_3^{(4)} = a^{(4)} \times b^{(4)} \times W_2 = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ W_{2,1} & W_{2,2} & W_{2,3} & W_{2,4} \end{vmatrix} = W_{3,1}^{(4)} e_1 + W_{3,2}^{(4)} e_2 + W_{3,3}^{(4)} e_3 + W_{3,4}^{(4)} e_4$$

Entonces se crea el vértice V_3, constituido con los valores de las componentes que arroja este producto vectorial 4D y sumándole f. En este caso se tiene que $W_3 = (W_{3,1}^{(4)}, W_{3,2}^{(4)}, W_{3,3}^{(4)}, W_{3,4}^{(4)})$ y $V_3 = W_3 + f$.

El eje de rotación definido por $\{V_1, V_2, V_3\}$ es ortogonal a los vectores a y b.

4.8.4 Caso *n*D

En nD el eje de rotación es un hiperplano (n-2)-dimensional, definido por (n-1) puntos. El proceso para calcular estos puntos, es el siguiente:

1. Llevar los vectores a_f y b_f al origen. Restándoles su punto de aplicación f. Y de esta forma se tiene que $a = a_f - f$ y $b = b_f - f$, entonces, se obtiene el primer vértice $V_1 = f$.
2. El segundo vértice se obtiene de realizar el producto cruz 3D definiendo dos vectores $a^{(3)}, b^{(3)} \in \Re^3$, donde estos vectores se obtienen considerando tres componentes X_r, X_s, X_t (o ignorando n-3 componentes) de los vectores originales $a, b \in \Re^n$. En general, se tiene que:

$$W_2^{(3)} = a^{(3)} \times b^{(3)} = \begin{vmatrix} e_r & e_s & e_t \\ a_r^{(3)} & a_s^{(3)} & a_t^{(3)} \\ b_r^{(3)} & b_s^{(3)} & b_t^{(3)} \end{vmatrix} = W_{2,r}^{(3)} e_r + W_{2,s}^{(3)} e_s + W_{2,t}^{(3)} e_t$$

   Entonces se crea el vector $W_2 \in \Re^n$, constituido con los valores de las componentes que arroja este producto vectorial 3D, y un cero en la posición de las componentes que se ignoraron y finalmente obtener el vértice V_2 sumándole f. En este caso se tiene que $W_2 = (0,\ldots,0,W_{2,r}^{(3)},0,\ldots,0,W_{2,s}^{(3)},0,\ldots,0,W_{2,t}^{(3)},0,\ldots,0)$ y $V_2 = W_2 + f$.
3. Para el cálculo del resto de los vértices, el proceso se vuelve iterativo, de la siguiente forma: Para calcular el vértice V_k, se realiza el producto cruz (k+1)D con los vectores $\{W_2, W_3\ldots, W_{k\text{-}1}\}$ y dos vectores $a^{(k+1)}, b^{(k+1)} \in \Re^{k+1}$ donde estos vectores se obtiene considerando las componentes de $a^{(k)}, b^{(k)} \in \Re^k$ y una adicional de los vectores

originales $a, b \in \Re^n$. Este proceso se hace para $3 \leq k \leq n-1$. Entonces se tiene que: $W_k^{(k+1)} = a^{(k+1)} \times b^{(k+1)} \times W_2 \times \ldots \times W_{k-1}$. De esta forma, se crea el vector $W_k \in \Re^{k+1}$ constituido con los valores de las componentes que arroja el producto vectorial (k+1)D, y un cero en la posición de las componentes que se ignoraron y finalmente obtener el vértice V_k sumándole f. $V_k = W_k + f$.

El eje de rotación definido por $\{V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}\}$ es ortogonal a los vectores a y b.

Observación 4.6:

Una vez obtenido el eje de rotación mediante este proceso y probando los giros utilizando la Ecuación 3.31, se observó que las rotaciones mantienen una misma dirección de giro para las dimensiones impares, para las pares, la dirección es en sentido contrario. Por tanto, inicialmente se propone cambiar el signo de alguno de los vectores ortonormales dependiendo de la dimensión para preservar la dirección de los giros. Se puede utilizar por ejemplo el vector ***a*** *como* $(-1)^{n+1}\boldsymbol{a}$ *durante todos los cálculos de este proceso.*

4.9 Comprobación de equivalencia de la Fórmula

La Ecuación 4.6 y el proceso propuesto para determinar los vectores a y b a partir de la información del eje (n-2)-dimensional de rotación y viceversa, son procesos válidos, dado que se manejaron propiedades vectoriales. Sin embargo, para fines de ilustración se va a demostrar que son equivalentes a los casos analizados en el Capítulo 3, para las rotaciones principales nD, y para rotaciones generales en el caso 2D. El resto de demostración de las equivalencias para las rotaciones generales nD, quedan fuera de los alcances de esta investigación.

4.9.1 Caso 2D

El caso base para comprobar será el caso de rotación principal 2D, ya que en esta dimensión el vector $x = (x_1, x_2)$ está completamente sobre plano P_0. Se probarán los casos cuando los vectores ortonormales *a* y *b*, caen sobre los ejes principales, y después con cualesquiera 2 vectores *a* y *b* ortonormales y observar que en ambos casos se obtiene el mismo resultado.

4.9.1.1 Vectores *a* y *b* Como Bases Canónicas

Si se definen a los vectores ortonormales *a* y *b* como las bases canónicas $a = e_1 = (1,0)$ y $b = e_2 = (0,1)$, se tiene que estarán sobre el eje X_1 y el eje X_2 respectivamente (Figura 4.5).

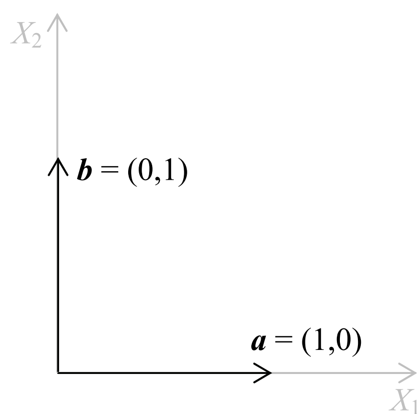

Figura 4.5: Vectores ortonormales *a* y *b* sobre los ejes principales 2D.

Dado que la Ecuación 4.6 indica que el sentido del giro es del vector *a* hacia el *b*, se espera obtener el mismo resultado que el giro positivo en 2D, de esta forma:

$$x \cdot a = x_1 + 0(x_2) = x_1$$

$$x \cdot b = 0(x_1) + x_2 = x_2$$

Entonces substituyendo en la Ecuación 4.6, se tiene:

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1) \end{bmatrix}$$

$$[x_1' \quad x_2'] = [x_1 \quad x_2] + (x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta)[1 \quad 0] + (x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1))[0 \quad 1]$$

$$[x_1' \quad x_2'] = [x_1 + (x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta) \quad x_2 + (x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1))]$$

Así:

$$x_1' = x_1 + x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta$$

$$= x_1 + x_1 \cos\theta - x_1 - x_2 \sin\theta$$

$$= x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta$$

$$x_2' = x_2 + x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1)$$

$$= x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$

Con esto, se tiene que el resultado para x_1 y x_2 es el mismo que en las formulas de la rotación 2D (Ecuación 3.9).

4.9.1.2 Vectores *a* y *b* Arbitrarios

Si los vectores ortonormales a y b no caen completamente sobre los ejes principales, entonces, sea α el ángulo entre el eje X_1 y el vector ortonormal a, las coordenadas de a estarán definidas por $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, y las de b por $(\cos(\alpha+\pi/2), \sin(\alpha+\pi/2)) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$ (Figura 4.6).

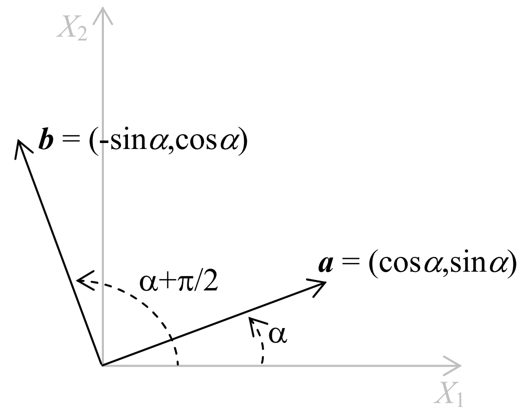

Figura 4.6: Vectores ortonormales *a* y *b* arbitrarios en 2D.

De esta forma:

$$a = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

$$b = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

$$x \cdot a = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha$$

$$x \cdot b = -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha$$

Substituyendo en la Ecuación 4.6, se tiene:

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha \\ -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (\cos\theta - 1)(x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha) + \sin\theta(x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha) \\ \sin\theta(x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha) - (\cos\theta - 1)(x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 \cos\theta\cos\alpha + x_2 \cos\theta\sin\alpha - x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + x_1 \sin\theta\sin\alpha - x_2 \sin\theta\cos\alpha \\ x_1 \sin\theta\cos\alpha + x_2 \sin\theta\sin\alpha - x_1 \cos\theta\sin\alpha + x_2 \cos\theta\cos\alpha + x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} + r_1 \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Así:

$$\begin{aligned} x_1' = x_1 &+ \cos\alpha(x_1 \cos\theta\cos\alpha + x_2 \cos\theta\sin\alpha - x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + x_1 \sin\theta\sin\alpha - x_2 \sin\theta\cos\alpha) \\ &- \sin\alpha(x_1 \sin\theta\cos\alpha + x_2 \sin\theta\sin\alpha - x_1 \cos\theta\sin\alpha + x_2 \cos\theta\cos\alpha + x_1 \sin\alpha - x_2 \cos\alpha) \end{aligned}$$

$$= x_1 + \cos\alpha(x_1\cos\theta\cos\alpha - x_1\cos\alpha - x_2\sin\theta\cos\alpha)$$
$$-\sin\alpha(-x_1\cos\theta\sin\alpha + x_1\sin\alpha + x_2\sin\theta\sin\alpha)$$

$$= x_1 + x_1\cos\theta\cos^2\alpha - x_1\cos^2\alpha - x_2\sin\theta\cos^2\alpha$$
$$+ x_1\cos\theta\sin^2\alpha - x_1\sin^2\alpha - x_2\sin\theta\sin^2\alpha)$$

$$= x_1 + x_1\cos\theta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - x_1(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - x_2\sin\theta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$= x_1\cos\theta - x_2\sin\theta$$

$$x_2' = x_2 + \sin\alpha(x_1\cos\theta\cos\alpha + x_2\cos\theta\sin\alpha - x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha + x_1\sin\theta\sin\alpha - x_2\sin\theta\cos\alpha)$$
$$+\cos\alpha(x_1\sin\theta\cos\alpha + x_2\sin\theta\sin\alpha - x_1\cos\theta\sin\alpha + x_2\cos\theta\cos\alpha + x_1\sin\alpha - x_2\cos\alpha)$$

$$= x_2 + \sin\alpha(x_1\sin\theta\sin\alpha + x_2\cos\theta\sin\alpha - x_2\sin\alpha)$$
$$+\cos\alpha(x_1\sin\theta\cos\alpha + x_2\cos\theta\cos\alpha + x_2\cos\alpha)$$

$$= x_2 + x_1\sin\theta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + x_2\cos\theta(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - x_2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$

$$= x_1\sin\theta + x_2\cos\theta$$

Nuevamente, se tiene que el resultado para x_1 y x_2 es el mismo que en las formulas de la rotación 2D (Ecuación 3.9), lo que indica que no importa los valores de las componentes de los vectores, si estos definen al mismo plano de rotación, la fórmula dará el mismo resultado.

4.9.1.3 Rotación Alrededor de un Punto Fijo

La fórmula ya conocida para la rotación 2D alrededor de un punto fijo 2D, dice que:

$$[x_1' \quad x_2' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f_1 & -f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_1 & f_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ (-f_1\cos\theta + f_2\sin\theta) & (-f_1\sin\theta - f_2\cos\theta) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_1 & f_2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \left(f_1(1-\cos\theta) + f_2 \sin\theta\right) & \left(-f_1 \sin\theta + f_2(1-\cos\theta)\right) & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$x_1' = x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta + f_1(1-\cos\theta) + f_2 \sin\theta$$

$$x_2' = x_2 \sin\theta + x_2 \cos\theta - f_1 \sin\theta + f_2(1-\cos\theta)$$

Ahora se probará el enfoque vectorial, donde la rotación alrededor de un punto fijo será equivalente a la rotación del plano cuyo centro de rotación estará definido por el vector $f = (f_1, f_2)$ (Figura 4.6).

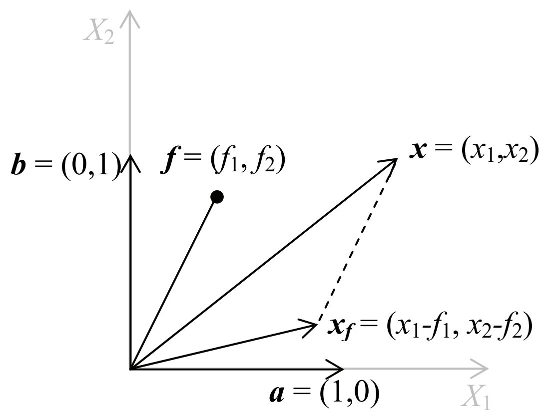

Figura 4.7: Llevar el vector *x* para realizar la rotación 2D en un plano de rotación con centro de rotación *f*.

Y por la fórmula ya probada para 2D cuando el plano de rotación pasa por el origen, solo se substituyen los valores de *x* por (*x*-*f*) en el resultado de la Sección 4.9.1.2 y después con la Ecuación 4.7 se tiene que:

$$x_1' = (x_1 - f_1)\cos\theta - (x_2 - f_2)\sin\theta + f_1$$

$$= x_1 \cos\theta - f_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta + f_2 \sin\theta + f_1$$

$$= x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta + f_1(1-\cos\theta) + f_2 \sin\theta$$

$$x_2' = (x_1 - f_1)\sin\theta + (x_2 - f_2)\cos\theta + f_2$$

$$= x_1 \sin\theta - f_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta - f_2 \cos\theta + f_2$$

$$= x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta - f_1 \sin\theta + f_2 (1 - \cos\theta)$$

Con esto, se tiene que el resultado para x_1 y x_2 es el mismo que en las formulas de la rotación 2D en un punto fijo.

4.9.2 Caso 3D

Para 3D, se considera que los vectores ortonormales *a* y *b* están completamente sobre alguno de los planos principales, al probarse para el plano X_1X_2, se espera tener la rotación en el sentido del eje X_1 al X_2 (rotación positiva en el eje X_3).

Se pueden definir los vectores como las bases canónicas $a = e_1 = (1,0,0)$ y $b = e_2 = (0,1,0)$, ambos vectores caen sobre los ejes X_1 y X_2 respectivamente, de esta forma:

$$x.a = x_1 + 0(x_2) + 0(x_3) = x_1$$

$$x.b = 0(x_1) + x_2 + 0(x_3) = x_2$$

Entonces substituyendo en la Ecuación 4.6, se tiene:

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta \\ x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} + \left(x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1)\right)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + \left(x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta\right) & x_2 + \left(x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1)\right) & x_3 \end{bmatrix}$$

Así:

$$x_1' = x_1 + x_1(\cos\theta - 1) - x_2 \sin\theta$$

$$= x_1 + x_1 \cos\theta - x_1 - x_2 \sin\theta$$

$$= x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta$$

$$x_2' = x_2 + x_1 \sin\theta + x_2(\cos\theta - 1)$$

$$= x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$

$$x_3' = x_3$$

Se observa que si se cambia los vectores a y b ahora sobre X_2 y X_3 respectivamente es similar al proceso de hacer las substituciones cíclicas de los parámetros $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ (ver Sección 3.5.2), para obtener la rotación alrededor del eje X_1, y si después a y b caen sobre X_3 y X_1 respectivamente, es una nueva substitución cíclica para obtener la rotación alrededor del eje X_2, con lo cuál se obtienen las tres rotaciones principales en 3D.

4.9.3 Caso *n*D

Se sabe que las bases canónicas en $\Re^n$ se obtienen de los n vectores base $\{e_i : 1 \le i \le n\}$, donde el vector e_i es un vector con valor 1 en la i-ésima coordenada y 0 en el resto, y es claro ver que dicho vector se encuentra sobre el eje X_i.

En general, si de definen a los vectores $a = e_i$ y $b = e_j$, se tiene que

$$x.a = x_i$$

$$x.b = x_j$$

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i(\cos\theta - 1) - x_j \sin\theta \\ x_i \sin\theta + x_j(\cos\theta - 1) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$x_i' = x_i \sin\theta + x_j \cos\theta$$

$$x_j' = x_i \cos\theta - x_j \sin\theta$$

$$x_k' = x_k \quad 1 \le k \le n, k \ne i, j$$

Y esto coincide con la definición de rotaciones principales con el enfoque matricial (Ecuación 3.19). Por tanto queda demostrada la equivalencia de fórmula con el enfoque vectorial, con el enfoque matricial del Capítulo 3, para las rotaciones principales, y tal equivalencia se puede escribir como:

$x \cdot R_{i,j}(\theta) = rot_{P,\theta}(x)$, definiendo los vectores $a = e_i$ y $b = e_j$.

4.10 Resumen

En este capítulo se desarrolló la formulación de una matriz para rotaciones generales cuando se proporciona dos vectores ortonormales y su punto de aplicación, los cuales definen el plano de rotación en el que se desea llevar a cabo la rotación.

Los métodos para rotaciones presentados en este capítulo y el anterior dependen de la información con la que se cuente para realizar los giros, es decir, se cuenta con el eje de rotación o con el plano de rotación. Por tanto, a manera de unificar ambos métodos, se propusieron los procesos para la obtención del plano de rotación a partir a partir del eje (n-2)-dimensional de rotación y viceversa. Finalmente, se presentó la equivalencia en ambos enfoques para las rotaciones principales nD y para el caso general 2D.

Los resultados de los algoritmos y transformaciones presentados hasta el momento, solo pueden ser observados mediante proyecciones geométricas del espacio nD hacia el espacio 3D, o bien 2D si se desean visualizar en el monitor de la computadora. En el siguiente capítulo se analizan las proyecciones paralelas y perspectivas para llevarlas a su forma general.