

Capítulo 3: Transformaciones Geométricas

En matemáticas, nunca entiendes las cosas, sólo te acostumbras a ellas.

– *John von Neumann*

En este capítulo se hace un breve repaso de transformaciones geométricas 2D y 3D que son ampliamente conocidas y su extensión a otras dimensiones. Existen varias transformaciones geométricas, pero sólo se revisan el *escalamiento*, *la translación* y *la rotación*. Se analizan las analogías que hay de estas transformaciones para llevarlas a 4D y su generalización a cualquier espacio nD , poniendo mayor énfasis en la rotación, donde se presenta una de las contribuciones de este trabajo, definiendo las matrices generales de IDA y REGRESO para llevar a cabo las rotaciones alrededor de un eje de rotación en un espacio n -dimensional.

En la mayoría de los libros y trabajos relacionados con transformaciones geométricas, se revisan estos temas organizándolos en orden de dimensiones, es decir, primero se explican todas las transformaciones 2D y enseguida las transformaciones 3D. En este trabajo se propone un orden distinto, donde primero se explican los temas por transformación, es decir, primero se explica la transformación de escalamiento en todas sus dimensiones, enseguida la translación y por último la rotación. Esta idea es con la intención de darle al lector un mejor entendimiento de las extensiones de las transformaciones 2D a 3D y a dimensiones superiores.

3.1 Representación Matricial y Coordenadas Homogéneas

En el área de la graficación por computadora, es común encontrar la representación de las ecuaciones de transformación por medio de matrices, y se pueden encontrar dos tipos de

notaciones para representarlas, una es representando las coordenadas de un punto p como *vectores renglón*, en este caso una matriz de transformación M en 2D, multiplica al punto por la derecha para obtener el nuevo punto p' .

$$p = [x_1 \quad x_2], \quad p' = [x_1' \quad x_2'] = p \cdot M$$

La segunda notación es representando las coordenadas de un punto p como *vectores columna*, en este caso una matriz de transformación M , multiplica al punto por la izquierda para obtener el nuevo punto p' .

$$p = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad p' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = M \cdot p$$

En este trabajo, se representan los puntos por medio de *vectores renglón*, por lo tanto las matrices de transformación estarán modeladas para multiplicarlas por la derecha, sin embargo se puede obtener una matriz de transformación en la otra notación calculando su transpuesta.

No todas las transformaciones son aplicadas a un punto como una multiplicación de factores, por tal razón se utilizan las *coordenadas homogéneas* para la representación matricial, y de esta forma todas las transformaciones son tratadas como multiplicaciones.

En coordenadas homogéneas, a cada punto 2D se le agrega una tercera coordenada, de esta forma, en lugar de representar los puntos como $p = (x_1, x_2)$ son representados como una terna $p = (x_1, x_2, \omega)$, al mismo tiempo se dice que un par de coordenadas homogéneas (x_1, x_2, ω) y (x_1', x_2', ω') representan el mismo punto si una es múltiplo de la otra. Por ejemplo, la terna $(4, -2, 6)$ y $(8, -4, 12)$ representan el mismo punto 2D pero en diferentes coordenadas triples, esto significa que cada punto tiene un sinfín de representaciones en coordenadas homogéneas.

Al menos uno de las coordenadas homogéneas tiene que ser distinta de cero, por lo tanto la terna $(0, 0, 0)$ no es válida. Si la coordenada $\omega \neq 0$, la terna (x_1, x_2, ω) se puede dividir entre ω y se obtiene $(x_1/\omega, x_2/\omega, 1)$, cuando se realiza esta división, a los valores x_1/ω y x_2/ω se les llama *coordenadas cartesianas* del punto homogéneo [Foley 92]. Una elección conveniente es hacer el valor de $\omega = 1$, así cada posición 2D es representada con las coordenadas homogéneas $(x_1, x_2, 1)$. A los puntos con la forma $(x_1, x_2, 0)$ se les llama puntos al infinito, los cuales no se tratarán en esta investigación.

En general para cualquier dimensión las coordenadas homogéneas de un punto p en nD se escribe como $p = (x_1, x_2, \dots, x_n, \omega)$, el cuál es un vector de longitud $n+1$.

3.2 Extensión de las Transformaciones a Otras Dimensiones

Las transformaciones geométricas 3D son extensiones de las transformaciones geométricas 2D, pero con la incorporación del eje Z [Hearn 95]. En [Hollasch, 91] se muestra que los puntos y operaciones vectoriales en el espacio 4D son simples extensiones de su contraparte 3D.

Como se verá enseguida, muchas de las operaciones matemáticas utilizadas en las transformaciones de escalamiento y translación se extienden fácilmente, pero la rotación no es tan intuitiva y requiere de un poco más de análisis, para comprender su generalización a otras dimensiones.

3.3 Escalamiento

El escalamiento permite cambiar el tamaño de un objeto expandiéndolo o contrayéndolo en sus dimensiones.

3.3.1 Escalamiento 2D

El escalamiento 2D implica el cambio de tamaño de un polígono, donde cada punto $p = (x_1, x_2)$ es transformado por la multiplicación de dos factores de escalamiento: s_1 y s_2 a lo largo de los ejes X_1 y X_2 respectivamente, de esta forma, las coordenadas del nuevo punto $p' = (x_1', x_2')$ se obtienen como:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 \cdot s_1 \\x_2' &= x_2 \cdot s_2\end{aligned}$$

Sea $s = (s_1, s_2)$ el vector de factores de escalamiento, y $S(s)$ la matriz de escalamiento, en coordenadas homogéneas el escalamiento de un punto p en 2D se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot S(s)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.1: Expresión matricial para el escalamiento 2D.

La Figura 3.1 muestra el efecto de escalamiento de una figura con $s_1 = 1.5$ y $s_2 = 2$.

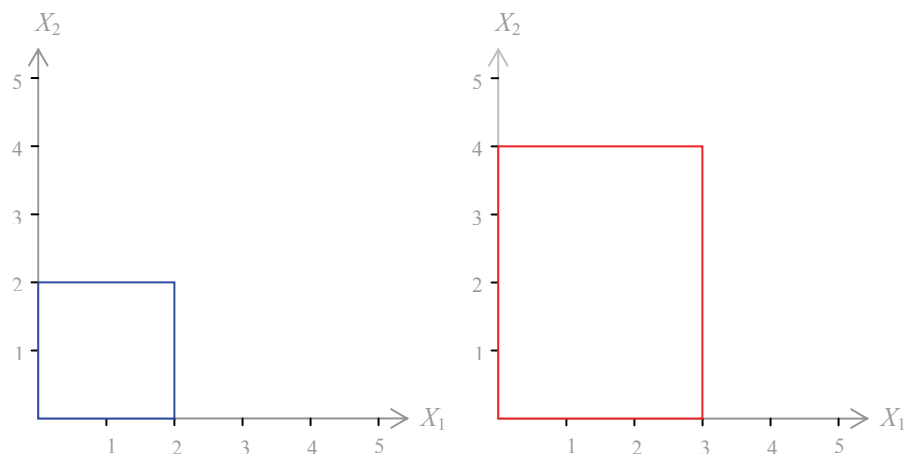


Figura 3.1: Ejemplo de escalamiento 2D.

3.3.2 Escalamiento 3D

Extendiendo la idea anterior a 3D, el escalamiento implica el cambio de tamaño de un poliedro, donde cada punto $p = (x_1, x_2, x_3)$ es transformado por la multiplicación de tres factores de escalamiento: s_1 , s_2 y s_3 a lo largo de los ejes X_1 , X_2 y X_3 respectivamente, de esta forma, las coordenadas del nuevo punto $p' = (x_1', x_2', x_3')$ se obtienen como:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 \cdot s_1 \\x_2' &= x_2 \cdot s_2 \\x_3' &= x_3 \cdot s_3\end{aligned}$$

Sea $s = (s_1, s_2, s_3)$ el vector de factores de escalamiento, y $S(s)$ la matriz de escalamiento, en coordenadas homogéneas el escalamiento de un punto p en 3D se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot S(s)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.2: Expresión matricial para el escalamiento 3D.

La Figura 3.2 muestra el efecto de escalamiento de una figura con $s_1 = 2$, $s_2 = 2.5$ y $s_3 = 1.5$.

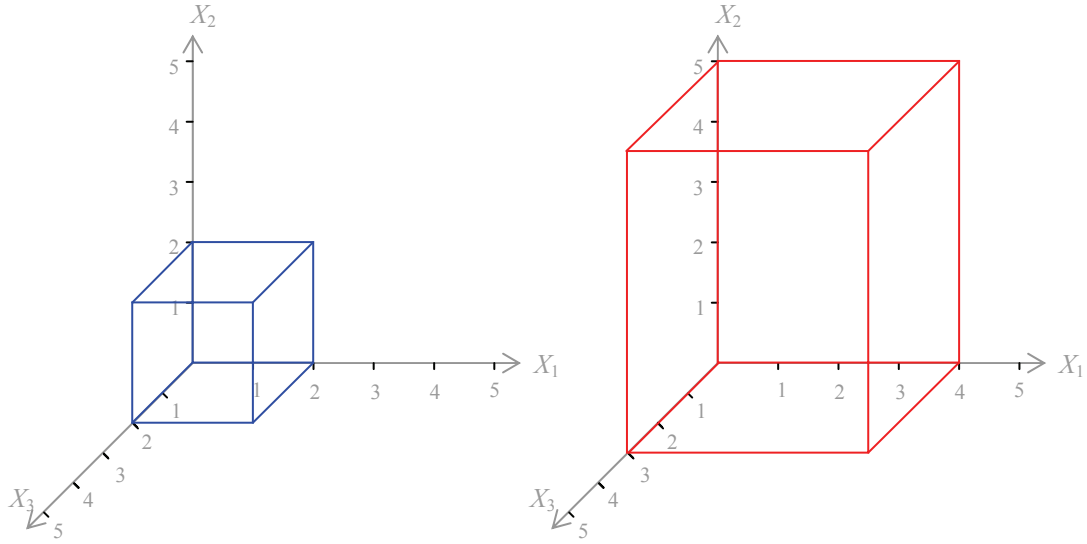


Figura 3.2: Ejemplo de escalamiento 3D.

3.3.3 Escalamiento 4D

Extendiendo nuevamente la idea anterior a 4D, el escalamiento implica el cambio de tamaño de un politopo 4D, donde cada punto $p = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es transformado por la multiplicación de cuatro factores de escalamiento: s_1, s_2, s_3 y s_4 a lo largo de ejes que forman el espacio 4D, de esta forma, las coordenadas del nuevo punto $p' = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ se obtienen como:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cdot s_1 \\ x_2' &= x_2 \cdot s_2 \\ x_3' &= x_3 \cdot s_3 \\ x_4' &= x_4 \cdot s_4 \end{aligned}$$

Sea $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ el vector de factores de escalamiento, y $S(s)$ la matriz de escalamiento, en coordenadas homogéneas el escalamiento de un punto p en 4D se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot S(s)$, es decir:

$$[x_1' \ x_2' \ x_3' \ x_4' \ 1] = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.3: Expresión matricial para el escalamiento 4D.

3.3.4 Escalamiento nD

De esta forma, el escalamiento nD implica el cambio de tamaño de un politopo nD en todas sus dimensiones, como se observó anteriormente, se puede representar el escalamiento nD en su forma matricial, donde los factores de escalamiento se localizan en la diagonal principal, cada uno colocado en la columna que le corresponde a su respectivo eje. Así, se obtiene la expresión matricial de escalamiento para cualquier dimensión:

$$[x_1' \ x_2' \ x_3' \ \dots \ x_n' \ 1] = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n \ 1] \cdot \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.4: Expresión matricial para el escalamiento nD .

En general, la matriz de escalamiento $S(s)$ para nD en coordenadas homogéneas tendrá un tamaño de $(n+1) \times (n+1)$, en la cual, si se sustituyen los valores para $n=2$ y $n=3$, se obtienen las matrices de escalamiento 2D y 3D respectivamente.

3.4 Translación

La translación permite desplazar un objeto a lo largo de sus dimensiones, como resultado se obtiene un cambio de posición.

3.4.1 Translación 2D

La translación 2D implica el desplazamiento de un polígono, donde cada punto $p = (x_1, x_2)$ es trasladado d_1 unidades en el eje X_1 y d_2 unidades en el eje X_2 , de esta forma, las coordenadas del nuevo punto $p' = (x_1', x_2')$, se obtienen como:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + d_1 \\x_2' &= x_2 + d_2\end{aligned}$$

Sea $d = (d_1, d_2)$ el vector de distancias, y $T(d)$ la matriz de translación, en coordenadas homogéneas la translación de un punto p en 2D se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot T(d)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.5: Expresión matricial para la translación 2D.

La Figura 3.3 muestra el efecto de translación de una figura con $d_1 = 1$ y $d_2 = 2$.

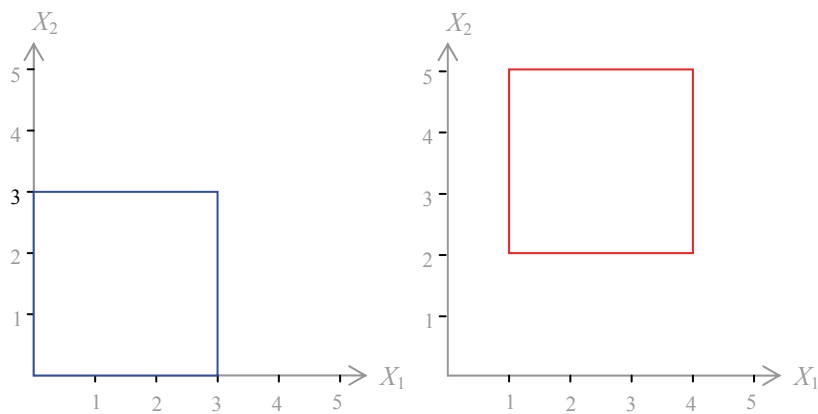


Figura 3.3: Ejemplo de translación 2D.

3.4.2 Translación 3D

Basándose en la idea anterior, se tiene que la translación 3D implica el desplazamiento de un poliedro, donde cada punto $p = (x_1, x_2, x_3)$ es trasladado d_1 unidades

en el eje X_1 , d_2 unidades en el eje X_2 y d_3 unidades en el eje X_3 , de esta forma, las coordenadas del nuevo punto $p'=(x_1',x_2',x_3')$ se obtienen como:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + d_1 \\x_2' &= x_2 + d_2 \\x_3' &= x_3 + d_3\end{aligned}$$

Sea $d=(d_1,d_2,d_3)$ el vector de distancias, y $T(d)$ la matriz de translación, en coordenadas homogéneas la translación de un punto p en 3D se puede expresar como el producto matricial $p'=p \cdot T(d)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.6: Expresión matricial para la translación 3D.

La Figura 3.4 muestra el efecto de translación de una figura con $d_1=2$, $d_2=0$ y $d_3=2$.

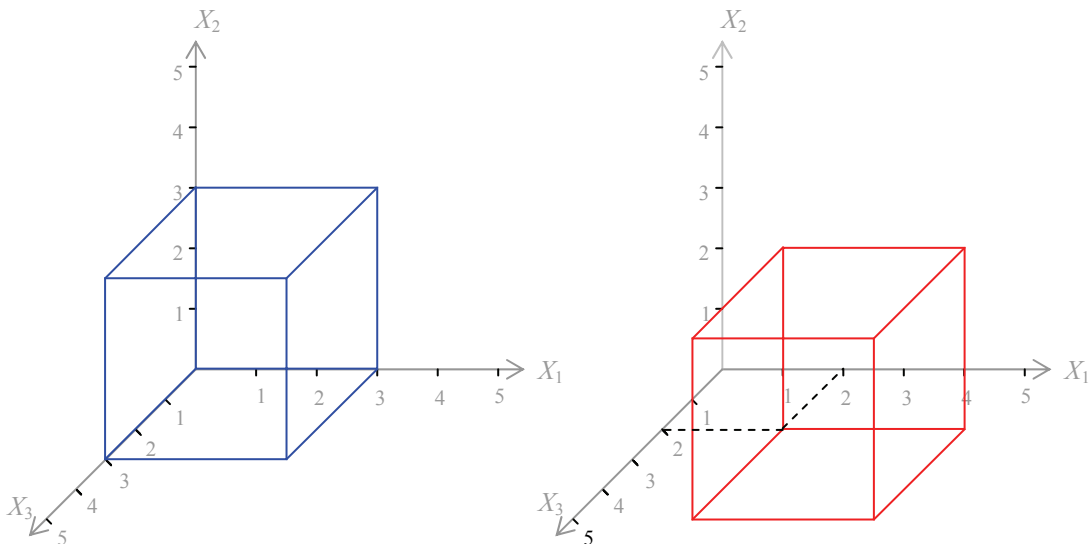


Figura 3.4: Ejemplo de translación 3D.

3.4.3 Translación 4D

Nuevamente tomando como base esta idea, se tiene que la translación 4D implica el desplazamiento de un politopo 4D, donde cada punto $p = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es trasladado por la suma de cuatro distancias: d_1, d_2, d_3, d_4 a cada uno de los ejes que forman el espacio 4D, de esta forma, las coordenadas del nuevo punto $p' = (x_1', x_2', x_3', x_4')$ se obtiene como:

$$\begin{aligned}x_1' &= x_1 + d_1 \\x_2' &= x_2 + d_2 \\x_3' &= x_3 + d_3 \\x_4' &= x_4 + d_4\end{aligned}$$

Sea $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ el vector de distancias, y $T(d)$ la matriz de translación, en coordenadas homogéneas la translación de un punto p en 4D se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot T(d)$, es decir:

$$[x_1' \ x_2' \ x_3' \ x_4' \ 1] = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.7: Expresión matricial para la translación 4D.

3.4.4 Translación nD

De esta forma, la translación nD implica el desplazamiento de un politopo nD sumando parámetros de distancias a todas sus dimensiones, como se observó anteriormente, se puede representar la translación nD en su forma matricial, donde los parámetros de distancia se localizan en el último renglón de la matriz, cada uno colocado en la columna que le corresponde a su respectivo eje, y colocando valores de 1 en la diagonal principal. Así, se obtiene la expresión matricial de translación para cualquier dimensión:

$$[x_1' \ x_2' \ x_3' \ \dots \ x_n' \ 1] = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.8: Expresión matricial para la translación nD.

En general, la matriz de translación $T(d)$ para nD en coordenadas homogéneas tendrá un tamaño de $(n+1) \times (n+1)$, en la cual, si se substituyen los valores para $n=2$ y $n=3$, se obtienen las matrices de translación 2D y 3D respectivamente.

3.5 Rotación

La rotación permite girar un objeto sobre un eje de rotación, dado un valor de ángulo de rotación θ y su dirección.

3.5.1 Rotaciones 2D

La rotación de un objeto en 2D se lleva a cabo alrededor de un punto, que es el eje puntual (cero-dimensional) de rotación. Las *rotaciones principales 2D* son aquellas que se llevan a cabo alrededor del origen, las rotaciones sobre cualquier otro punto arbitrario se llaman *rotaciones generales 2D*. En esta Sección 3.5, se analizan sólo las rotaciones principales para todas las dimensiones, en la Sección 3.6 se discuten las rotaciones generales.

Para generar una rotación, se especifica el ángulo de rotación θ , y el punto de rotación (pivote) sobre el cuál el objeto será rotado. Los ángulos de rotación positivos definen una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj sobre el punto pivote (del eje X_1 al eje X_2), entonces los ángulos de rotación negativos producen una rotación en el sentido de

las manecillas (del eje X_2 al eje X_1). [Hearn 95] describe la rotación 2D como el giro sobre el eje de rotación que es perpendicular al plano X_1X_2 (mejor conocido como plano XY) y que pasa a través del punto pivote.

Si el punto pivote se encuentra sobre el origen (Figura 3.5), se tiene que: r es la distancia del punto $p = (x_1, x_2)$ al origen, ϕ define la posición angular del punto p desde la horizontal, y θ el ángulo de rotación de p para producir el nuevo punto $p' = (x_1', x_2')$.

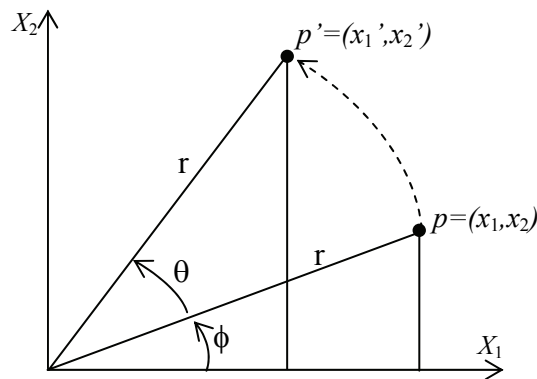


Figura 3.5: Rotación de un punto en 2D alrededor del origen.

Utilizando coordenadas polares, el punto $p = (x_1, x_2)$ se puede escribir como $p = (r, \phi)$ y el punto $p' = (x_1', x_2')$ como $p' = (r, \phi + \theta)$. Pasando después estos puntos de coordenadas polares a rectangulares se tiene que:

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\phi) & x_2 &= r \sin(\phi) \\ x_1' &= r \cos(\phi + \theta) & x_2' &= r \sin(\phi + \theta) \end{aligned}$$

Aplicando algunas propiedades trigonométricas:

$$\begin{aligned} x_1' &= r \cos(\theta + \phi) = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \\ x_2' &= r \sin(\theta + \phi) = r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta \end{aligned}$$

Substituyendo los valores de $x_1 = r \cos(\phi)$ y $x_2 = r \sin(\phi)$ se obtienen las ecuaciones para rotar un punto $p = (x_1, x_2)$ alrededor del origen dado un ángulo θ .

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_2' = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{cases}$$

Ecuación 3.9: Fórmulas para la rotación 2D alrededor del origen.

Sea $R(\theta)$ la matriz de rotación sobre el origen, en coordenadas homogéneas la rotación de un punto p alrededor del origen en 2D se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot R(\theta)$, es decir:

$$\begin{bmatrix} x_1' & x_2' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.10: Expresión matricial para la rotación 2D.

La Figura 3.6 muestra el efecto de rotación de una figura con $\theta = 45^\circ$.

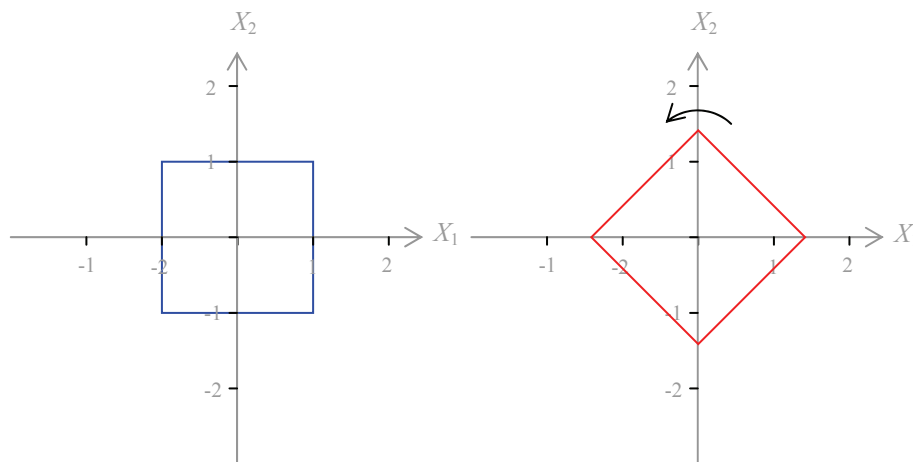


Figura 3.6: Ejemplo de rotación 2D.

3.5.2 Rotaciones 3D

A diferencia de la rotación en el espacio 2D, donde para hacer rotar un objeto se necesita un punto (cero-dimensional), en 3D para hacer rotar un objeto se necesitan dos puntos no coincidentes que determinan un segmento de recta, cuya línea de soporte define un eje lineal (uni-dimensional) de rotación.

Las *rotaciones principales 3D*, son aquellas cuando el eje de rotación se encuentra sobre alguno de los tres ejes principales: X_1 , X_2 o X_3 , las rotaciones sobre cualquier otro eje arbitrario son llamadas *rotaciones generales 3D*. Se recuerda que inicialmente, se analizan las rotaciones principales.

Por convención, los ángulos de rotación positivos producen rotaciones en contra de las manecillas del reloj sobre el eje de rotación, esto es si se observa el giro desde la parte positiva del eje hacia el origen. Otra forma de determinar la dirección de un giro positivo es mediante la **regla de la mano derecha** (Figura 3.7), que dice que: “Si se coloca el dedo pulgar de la mano derecha sobre el eje de rotación apuntando hacia la parte positiva de dicho eje, el giro natural del resto de los dedos indica la dirección positiva del giro”.

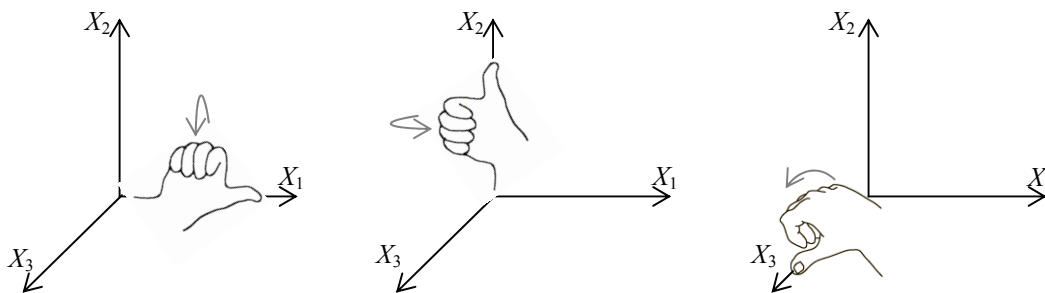


Figura 3.7: Regla de la mano derecha para obtener la dirección de un giro positivo en 3D.

Para entender el concepto de rotación en 3D como una extensión de la rotación 2D, hay que recordar que la rotación 2D es el giro sobre el eje de rotación, que es perpendicular al plano X_1X_2 , el cual en 3D corresponde al eje X_3 , entonces se tiene la primera de las rotaciones principales [Hearn 95].

De esta forma, por cada punto $p = (x_1, x_2, x_3)$ dado un ángulo θ , puede ser rotado sobre el eje X_3 en sentido contrario a las manecillas del reloj, obteniendo las coordenadas del nuevo punto $p' = (x_1', x_2', x_3')$ de la misma forma en como se analizó en el espacio 2D

(ver Sección 3.5.1), quedando la coordenada x_3 sin cambio, entonces, se extienden las formulas para la rotación 2D (Ecuación 3.9) a 3D como: [Hearn 95]

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta \\ x_2' = x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ x_3' = x_3 \end{cases}$$

Ecuación 3.11: Fórmulas para la rotación 3D alrededor del eje X_3 .

Sea $R_3(\theta)$ la matriz de rotación alrededor del eje X_3 , en coordenadas homogéneas la rotación de un punto p alrededor de dicho eje, se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot R_3(\theta)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.12: Expresión matricial para la rotación 3D alrededor del eje X_3 .

La Figura 3.8 muestra el efecto de rotación sobre el eje X_3 de una figura con $\theta = 20^\circ$.

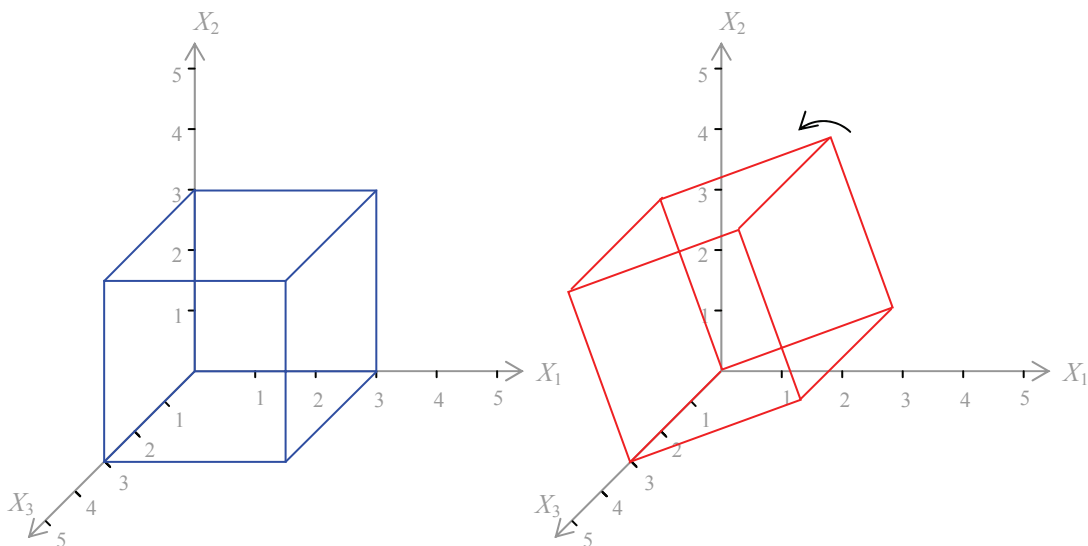


Figura 3.8: Ejemplo de rotación 3D sobre el eje X_3 .

Las ecuaciones para las rotaciones sobre el eje X_1 , y eje X_2 , pueden ser obtenidas mediante las permutaciones cíclicas de los parámetros x_1, x_2, x_3 : [Hearn 95].

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$$

como se muestra en la Figura 3.9

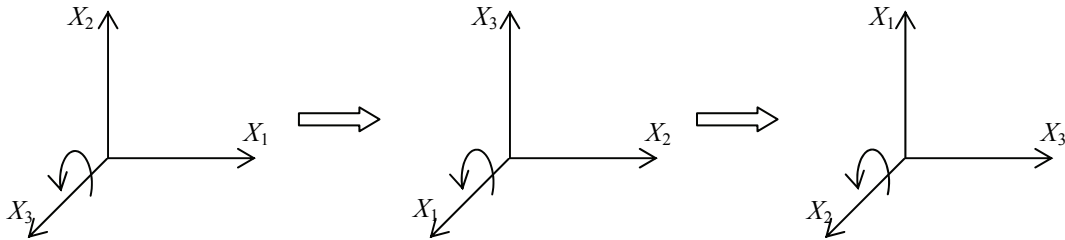


Figura 3.9: Permutaciones cíclicas de los ejes coordenados [Hearn 95].

Entonces, aplicando estas substituciones cíclicas en la Ecuación 3.11, se obtienen las ecuaciones para la rotación alrededor del eje X_1 dado un ángulo θ .

$$\begin{cases} x_2' = x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ x_3' = x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \\ x_1' = x_1 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \cos \theta - x_3 \sin \theta \\ x_3' = x_2 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{cases}$$

Ecuación 3.13: Fórmulas para la rotación 3D alrededor del eje X_1 .

Sea $R_1(\theta)$ la matriz de rotación alrededor del eje X_1 , en coordenadas homogéneas la rotación de un punto p alrededor de dicho eje, se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot R_1(\theta)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.14: Expresión matricial para la rotación 3D alrededor del eje X_1 .

Aplicando nuevamente las sustituciones cíclicas en la Ecuación 3.13, se obtienen las fórmulas para la rotación alrededor del eje X_2 dado un ángulo θ .

$$\begin{cases} x_3' = x_3 \cos \theta - x_1 \sin \theta \\ x_1' = x_3 \sin \theta + x_1 \cos \theta \\ x_2' = x_2 \end{cases} \implies \begin{cases} x_1' = x_1 \cos \theta + x_3 \sin \theta \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = -x_1 \sin \theta + x_3 \cos \theta \end{cases}$$

Ecuación 3.15: Fórmulas para la rotación 3D alrededor del eje X_2 .

Sea $R_2(\theta)$ la matriz de rotación alrededor del eje X_2 , en coordenadas homogéneas la rotación de un punto p alrededor de dicho eje, se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot R_2(\theta)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad x_3' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.16: Expresión matricial para la rotación 3D alrededor del eje X_2 .

3.5.2.1 Entendiendo las Rotaciones 3D Como Rotaciones Paralelas a un Plano

Las rotaciones en el espacio 3D son bien conocidas y entendidas por la mayoría de la gente, y muchos pueden interpretarla como la rotación de un objeto alrededor de un eje (uni-dimensional) de rotación, sin embargo, es más adecuado pensar en un conjunto de rotaciones paralelas a un plano 2D, inmerso en el espacio [Noll 67], esto es útil para comprender más fácil la analogía en las rotaciones 4D y superiores.

Se sabe que en 3D hay tres ejes coordenado: X_1 , X_2 y X_3 , y los planos principales son los formados por todas las posibles combinaciones de 2 de estos ejes, se obtienen así, los planos principales 3D: X_1X_2 , X_1X_3 y X_2X_3 (Figura 3.10).

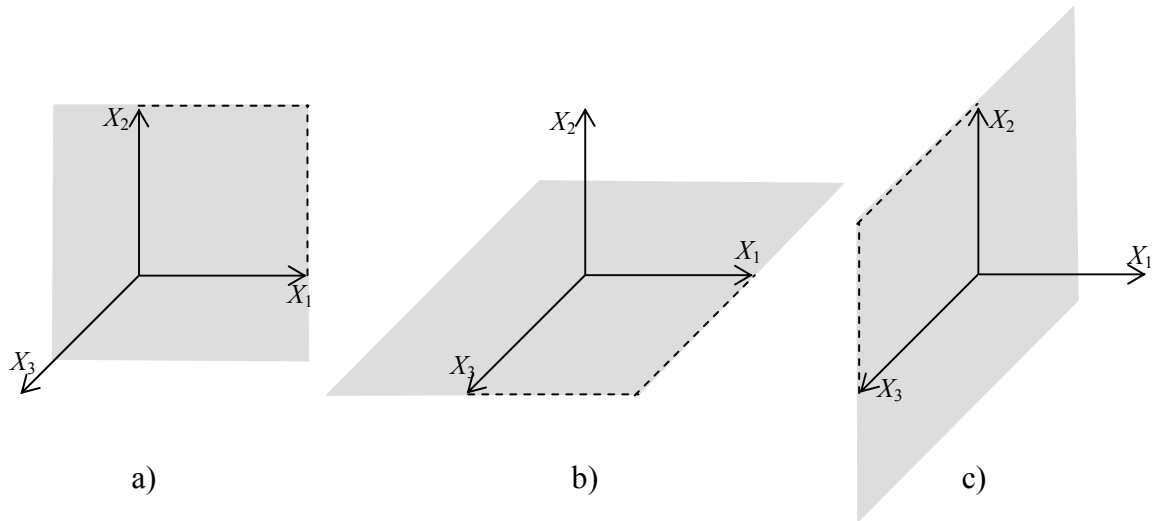


Figura 3.10: Planos principales 3D: a) plano X_1X_2 , b) plano X_1X_3 y c) plano X_2X_3 .

Se sabe que hay tres rotaciones principales, que son alrededor de cada uno de los ejes principales, y durante estos giros se cumple que: dado el origen y ángulo de rotación, el conjunto de todos los puntos rotados por una matriz dada caen en un plano, llamado *plano de rotación*, y el eje lineal de rotación es el que coincide con el vector normal de este plano. Esto es consistente con el espacio 2D, porque todos los puntos rotados caen en un único y mismo plano, el plano X_1X_2 [Hollasch, 91].

Entonces se tiene que las rotaciones alrededor de los ejes coordenados producen rotaciones de todos los planos paralelos al plano de rotación, el cuál está formado por los ejes restantes, es decir, si el eje de rotación es el eje X_3 , el plano de rotación será el formado por los ejes coordenados restantes: el plano X_1X_2 , de esta manera, si el eje de rotación es el eje X_2 , el plano de rotación será el plano X_1X_3 , y si el eje de rotación es el eje X_1 , y el plano de rotación será el plano X_2X_3 (Figura 3.11 a) b) y c) respectivamente).

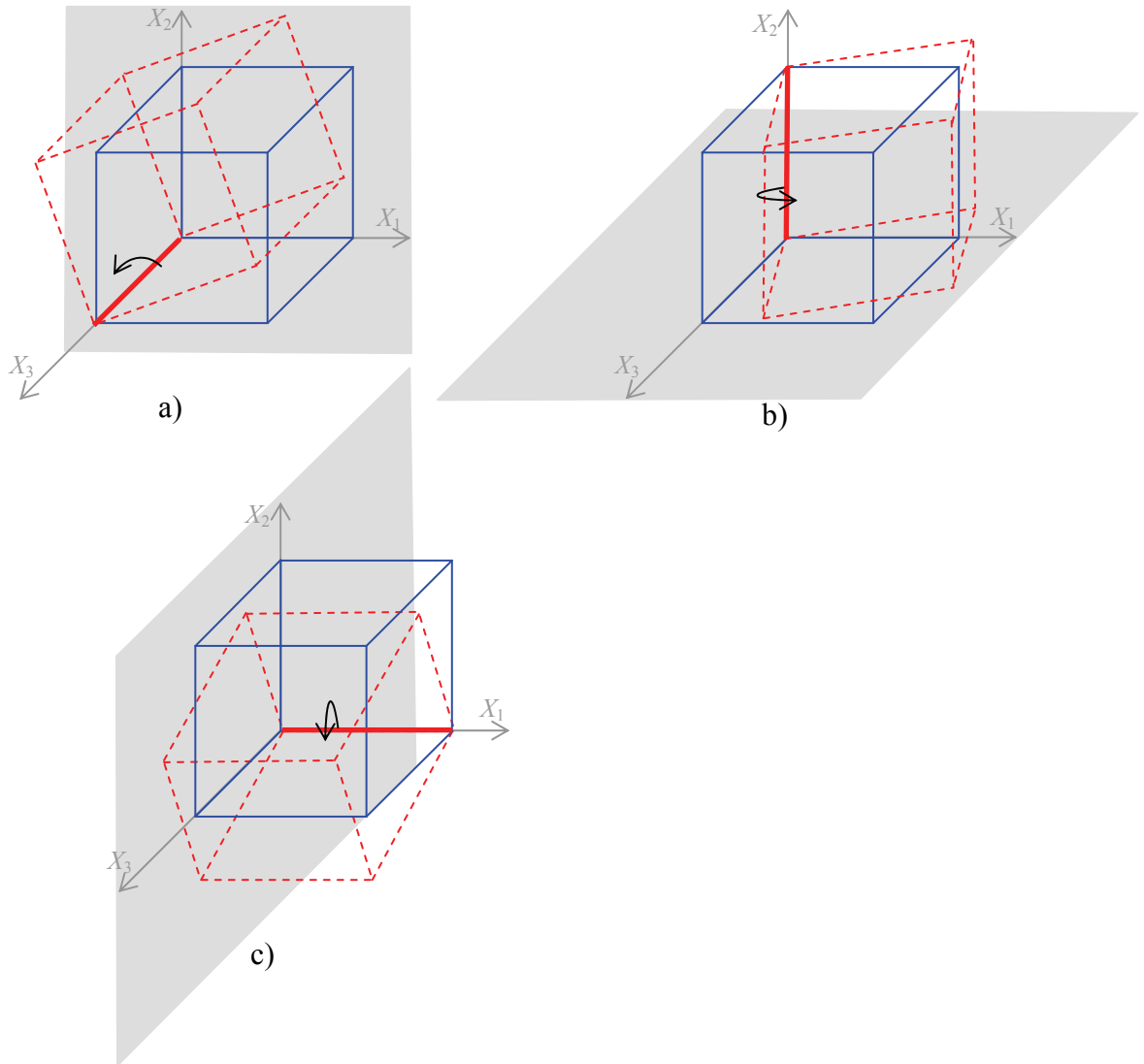


Figura 3.11: Rotaciones principales 3D: a) eje X_3 , plano X_1X_2 , b) eje X_2 , plano X_1X_3 y c) eje X_1 , plano X_2X_3 .

También se cumple que las rotaciones 3D dejan fijo un subespacio uni-dimensional, tal subespacio es el eje de rotación [Banks 92], lo que significa que todos los puntos que caen sobre este eje, no se ven afectados por la rotación. Esto se puede ver gráficamente en la Figura 3.11, donde se observa que en cada una de las rotaciones, los puntos que caen sobre el eje de rotación no se ven afectados durante el giro.

Si se renombran las matrices de rotación 3D, en términos de planos de rotación, colocando como subíndices los ejes que forman dicho plano, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_3(\theta) = R_{1,2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_1(\theta) = R_{2,3}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ R_2(\theta) = R_{3,1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Ecuación 3.17: Renombramiento de las matrices de rotación 3D en términos de planos de rotación.

3.5.3 Rotaciones 4D

La rotación en 4D podría resultar en un principio un tanto difícil de comprender, porque intuitivamente se puede pensar en rotar un objeto alrededor de un eje lineal en el espacio 4D, porque ésta es una idea arraiga en nuestra experiencia en 3D, sin embargo, es solo una casualidad geométrica que en el espacio tridimensional el eje de rotación sea uni-dimensional.

Tanto [Banks 92] como [Hollasch, 91] coinciden con la idea de que las rotaciones 4D son similares a las rotaciones 3D, si se piensa en las rotaciones 3D como rotaciones paralelas a un plano 2D, en lugar de rotaciones alrededor de un eje lineal, como se explica en la sección 3.5.2.1 .

A diferencia de la rotación 3D, donde para hacer rotar un objeto se necesitaba de dos puntos no coincidentes para formar un eje uni-dimensional de rotación, en 4D para hacer rotar un objeto se necesitan tres puntos no colineales que determinan un triángulo, cuyo plano de soporte define un eje (bi-dimensional) de rotación.

Tomando en cuenta que en el espacio 4D hay cuatro ejes coordenados: X_1 , X_2 , X_3 y X_4 , se tienen rotaciones paralelas a los planos formados por todas las posibles combinaciones de 2 de estos ejes, se obtienen así los seis planos principales 4D: X_1X_2 , X_1X_3 , X_1X_4 , X_2X_3 , X_2X_4 y X_3X_4 (Figura 3.12).

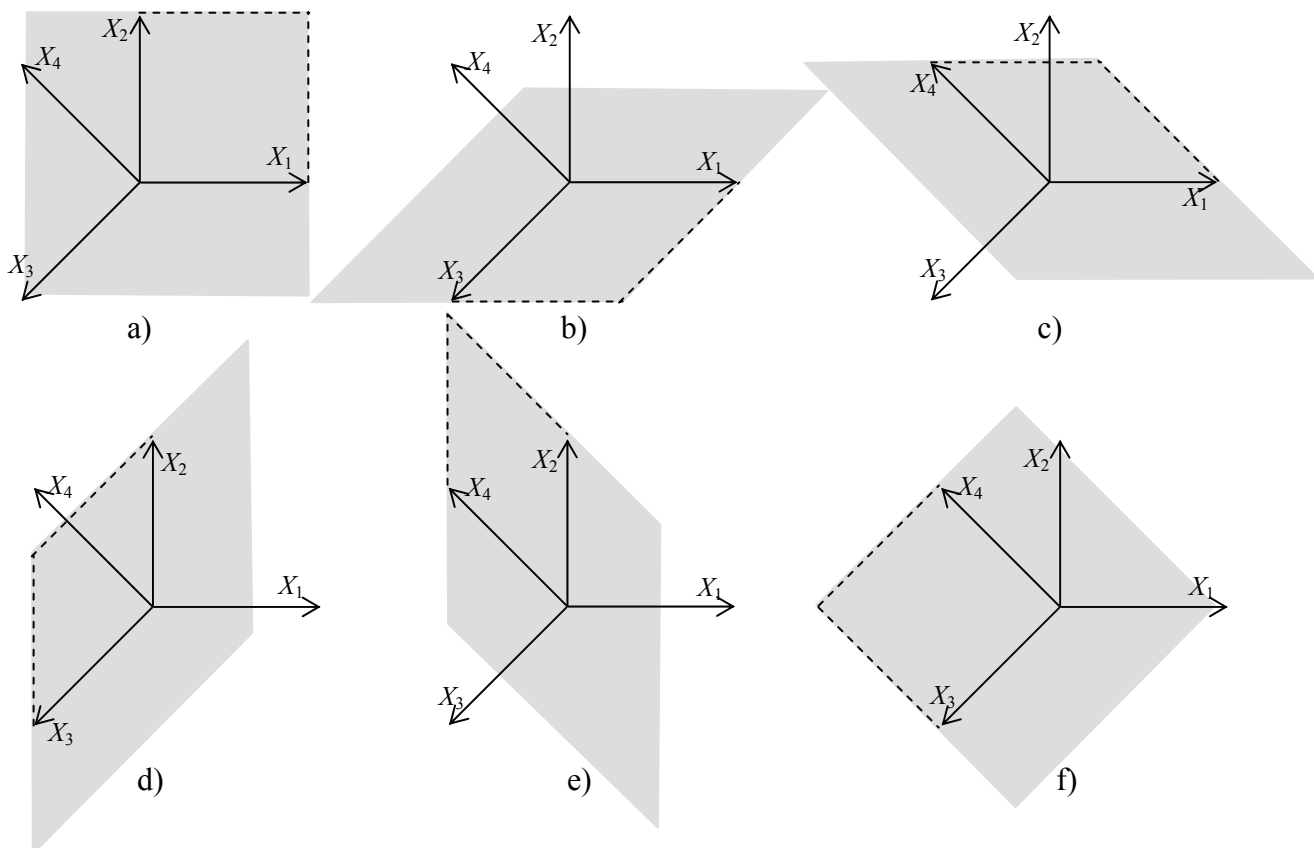


Figura 3.12: Planos principales 4D: a) plano X_1X_2 , b) plano X_1X_3 , c) plano X_1X_4 , d) plano X_2X_3 , e) plano X_2X_4 y f) plano X_3X_4 .

[Hollasch 91] se basa en la idea de que solo las dos coordenadas que definen al plano de rotación cambiarán dada una rotación, y construye las seis matrices para las rotaciones principales 4D.

$$\left. \begin{array}{l}
R_{1,2}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
R_{3,1}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
R_{2,4}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array} \right\} \begin{array}{l}
R_{2,3}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
R_{1,4}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
R_{3,4}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}$$

Ecuación 3.18: Matrices de rotación 4D.

Se observa que las matrices de rotación $R_{1,2}(\theta)$, $R_{3,1}(\theta)$ y $R_{2,3}(\theta)$ son básicamente las mismas matrices de la rotación en 3D (ver Ecuación 3.17). La expresión de estas matrices lo que indica es el sentido del giro, por ejemplo la matriz de rotación $R_{1,2}(\theta)$, indica que la rotación es del eje X_1 hacia el eje X_2 .

En 3D las rotaciones dejan fijo un subespacio uni-dimensional, tal subespacio es el eje de rotación. En 4D las rotaciones dejan fijo un subespacio bi-dimensional, este subespacio es el eje bi-dimensional de rotación, y solo se ven afectados los puntos dentro del plano de rotación y dentro del conjunto de planos paralelos a él.

Dado que la expresión de la matriz de rotación indica el plano de rotación, entonces el eje bi-dimensional de rotación está formado por los ejes restantes. Por ejemplo en la Figura

3.13.a) que representa a la matriz $R_{1,2}(\theta)$, el plano de rotación es el plano X_1X_2 , el eje bi-dimensional de rotación está formado por los ejes coordenados restantes, el plano X_3X_4 , y se observa que los puntos que caen sobre este último plano quedan fijos.

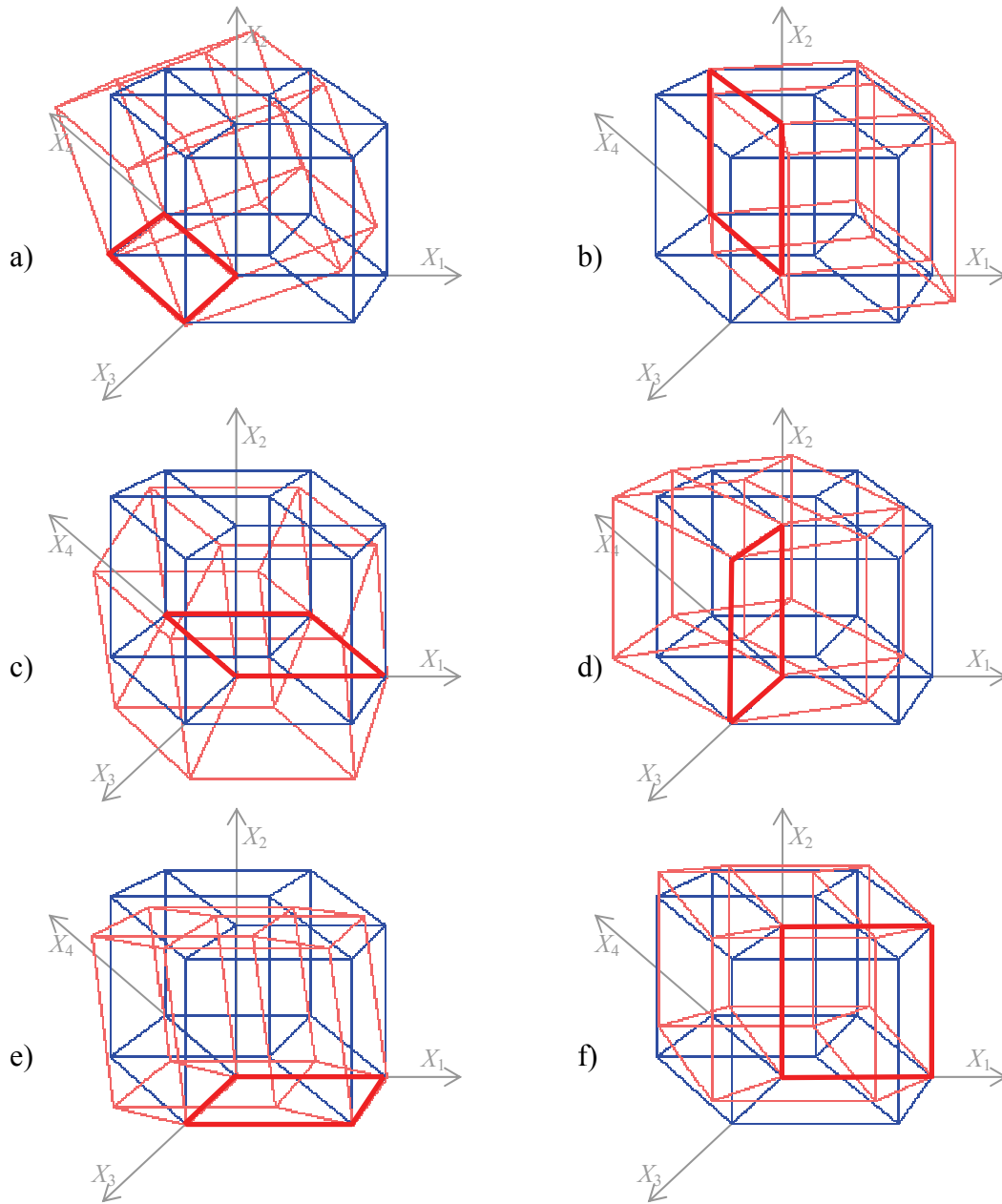


Figura 3.13: Rotaciones principales 4D: a) eje X_3X_4 , plano X_1X_2 , b) eje X_2X_4 , plano X_1X_3 , c) eje X_1X_4 , plano X_2X_3 , d) eje X_2X_3 , plano X_1X_4 , e) eje X_1X_3 , plano X_2X_4 , f) eje X_1X_2 , plano X_3X_4 .

3.5.4 Rotaciones nD

Con las ideas anteriores, se puede generalizar el concepto de rotaciones principales en el espacio nD ($n > 2$), con las siguientes observaciones:

- En nD , se necesita proporcionar $(n-1)$ puntos no cohiperplanares cuyo hiperplano de soporte será el eje $(n-2)$ -dimensional de rotación.
- En nD las rotaciones dejan fijo un subespacio $(n-2)$ -dimensional, tal subespacio es el eje $(n-2)$ -dimensional de rotación, este subespacio está formado por los ejes coordenados que no pertenecen al plano de rotación. Y solo se ven afectados los puntos dentro del plano de rotación y dentro del conjunto de planos paralelos a él.
- En el espacio nD hay n ejes coordenados: X_1, X_2, \dots, X_n , y se tienen rotaciones paralelas a los planos formados por todas las posibles combinaciones de 2 de estos ejes, es decir que se tienen $C(n, 2)$ planos principales, esto es precisamente el número de rotaciones principales en el espacio nD .

En [Duffin 94] se señala que especificando el plano de rotación y el centro de rotación de ese plano, la rotación es únicamente definida, por lo tanto, la rotación más simple de describir en el espacio nD ocurre cuando el plano está formado por cualesquiera dos ejes coordenados. De esta forma, la matriz de rotación $R_{a,b}(\theta)$ para la rotación de un eje X_a en la dirección de un eje X_b (donde ambos definen el plano de rotación) por un ángulo θ , está dada por la siguiente matriz general de rotaciones principales:

$$R_{a,b}(\theta) = \left[\begin{array}{c} r_{i,j} \\ \vdots \\ r_{a,a} = \cos(\theta) \\ r_{b,b} = \cos(\theta) \\ r_{a,b} = \sin(\theta) \\ r_{b,a} = -\sin(\theta) \\ r_{i,i} = 1 \quad i \neq a, i \neq b \\ r_{i,j} = 0 \quad \text{en otra parte} \end{array} \right]$$

Ecuación 3.19: Matriz general de rotaciones principales nD [Duffin 94].

La Ecuación 3.19, indica que la matriz $R_{a,b}(\theta)$ es básicamente una matriz identidad, excepto por las intersecciones de las columnas a y b con los renglones a y b , lo que significa que solo las coordenadas a y b de un punto cambiarán después de una rotación [Aguilera 04].

Para una rotación en nD , si se utilizan coordenadas homogéneas, $R_{a,b}(\theta)$ es una matriz de dimensiones $(n+1) \times (n+1)$, y se puede verificar fácilmente que con $n=2$, la matriz $R_{1,2}$ corresponde a la rotación positiva alrededor del origen en el espacio 2D (Ecuación 3.10), y con $n=3$, las matrices $R_{1,2}$, $R_{2,3}$ y $R_{3,1}$, corresponden a las rotaciones positivas alrededor de los ejes X_1 , X_2 y X_3 respectivamente en el espacio 3D (Ecuación 3.17).

Con todos los conceptos generalizados, se puede ver que una rotación puede ser expresada usando dos notaciones:

- Utilizando los ejes que describen el plano de rotación. Por ejemplo en 3D, se puede escribir la rotación alrededor del eje X_3 como $R_{1,2}(\theta)$, y en 4D la rotación alrededor del plano X_3X_4 también como $R_{1,2}(\theta)$.
- Utilizando los ejes que describen el eje $(n-2)$ -dimensional de rotación. En este caso, en 3D se puede escribir la rotación alrededor del eje X_3 como $R_3(\theta)$, y en 4D, la rotación alrededor del plano X_3X_4 como $R_{3,4}(\theta)$.

Sin embargo, para rotaciones superiores a 4D, puede resultar impráctico utilizar la segunda notación, esto se puede observar en la Tabla 2.2, tomada y extendida de [Pérez-Águila 01], por tal razón, de aquí en adelante se utiliza sólo la primera notación.

| Espacio nD | Número de rotaciones principales | Eje $(n-2)$ -dimensional (subespacio fijo durante la rotación) | Ejes principales que describen el subespacio fijo | Ejes principales que describen el plano de rotación. |
|--------------|------------------------------------|--|--|--|
| 2D | $C\binom{2}{2} = 1$ | 0D – Punto | – | X_1X_2 |
| 3D | $C\binom{3}{2} = 3$ | 1D – Segmento de recta (línea) | X_1 X_2 X_3 | X_2X_3 X_1X_3 X_1X_2 |
| 4D | $C\binom{4}{2} = 6$ | 2D – Plano | X_1X_2 X_1X_3 X_1X_4 X_2X_3 X_2X_4 X_3X_4 | X_3X_4 X_2X_4 X_2X_3 X_1X_4 X_1X_3 X_1X_2 |
| 5D | $C\binom{5}{2} = 10$ | 3D – Volumen | $X_1X_2X_3$ $X_1X_2X_4$ $X_1X_2X_5$ $X_1X_3X_4$ $X_1X_3X_5$ $X_1X_4X_5$ $X_2X_3X_4$ $X_2X_3X_5$ $X_2X_4X_5$ $X_3X_4X_5$ | X_4X_5 X_3X_5 X_3X_4 X_2X_5 X_2X_4 X_2X_3 X_1X_5 X_1X_4 X_1X_3 X_1X_2 |
| nD | $C\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ | $(n-2)D$ – Hiperplano $(n-2)D$ | $X_1X_2\dots X_{n-2}$ $X_1X_2\dots X_{n-3}X_{n-1}$ \vdots $X_2X_4\dots X_n$ $X_3X_4\dots X_n$ | $X_{n-1}X_n$ $X_{n-2}X_n$ \vdots X_1X_3 X_1X_2 |

Tabla 3.1: Definición de ejes y planos principales de rotación para las rotaciones n -dimensionales.

La Figura 3.14, muestra la rotación $R_{4,5}(\theta)$ de un hipercubo regular 5D, con los valores de $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ y 135° , donde se puede observar que todos los puntos del hipercubo que caen en volumen del eje tridimensional de rotación formado por los ejes X_1, X_2 y X_3 no se ven afectados durante el giro.

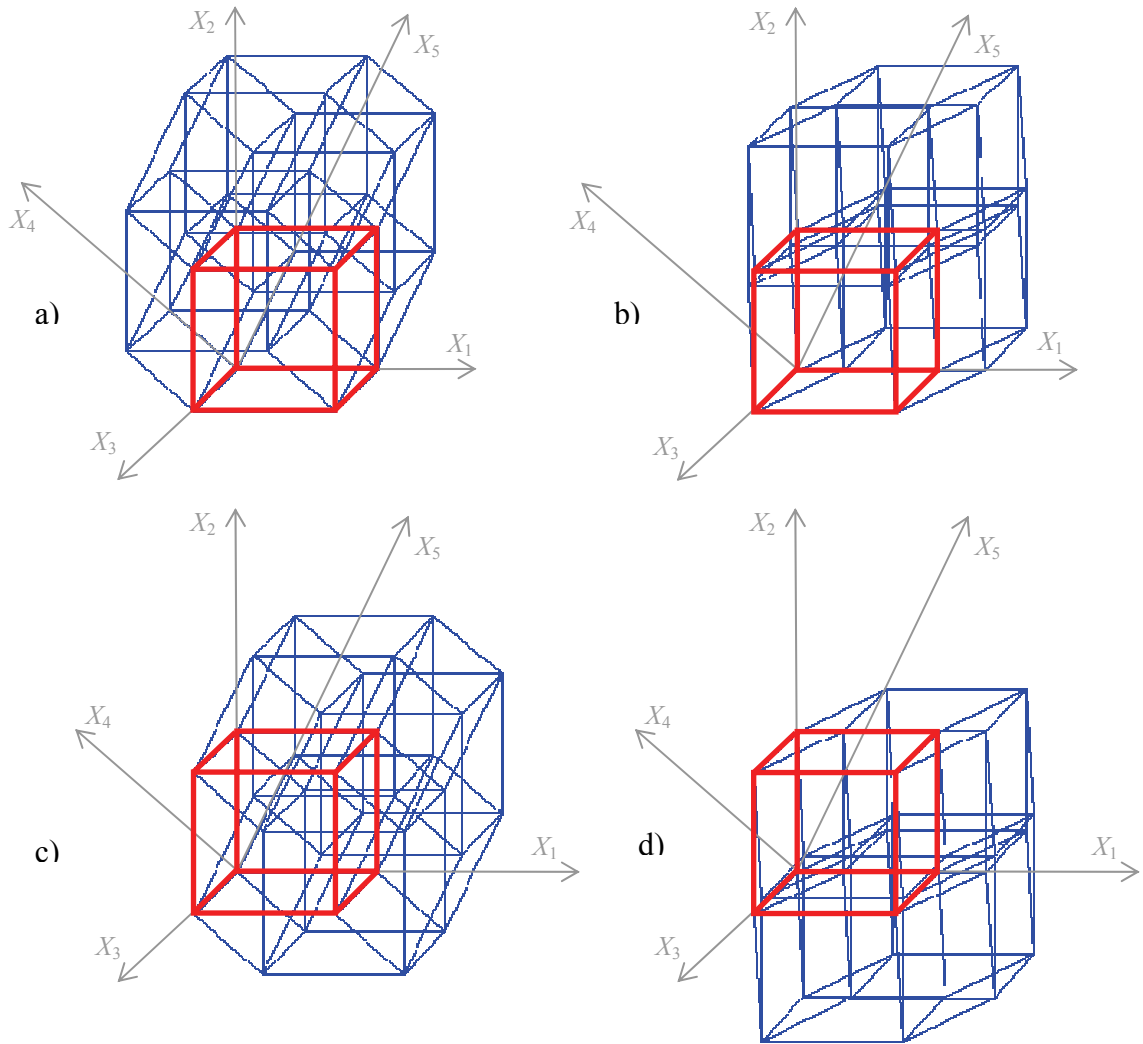


Figura 3.14: Rotación $R_{4,5}(\theta)$ de un hipercubo 5D: a) $\theta=0^\circ$, b) $\theta=45^\circ$, c) $\theta=90^\circ$, d) $\theta=135^\circ$.

3.6 Rotaciones Generales

Se ha presentado y generalizado la matriz de rotación de rotaciones principales nD , que se cumple cuando el plano de rotación y el eje $(n-2)$ -dimensional están formados por los ejes coordenados del espacio nD , pero cuando este eje está definido por puntos arbitrarios, se necesita de transformaciones adicionales que permitan llevar el eje de rotación arbitrario hacia alguno de los ejes principales del espacio, y de esta forma poder aplicar las técnicas para rotaciones principales anteriormente descritas.

3.6.1 Transformaciones Compuestas

Antes de continuar con la generalización de las rotaciones, se introduce el tema de transformaciones compuestas, que es útil para obtener el efecto combinado de una serie de transformaciones geométricas.

Con la representación matricial manejada hasta el momento, se puede aplicar una secuencia de transformaciones, calculando simplemente la multiplicación matricial de cada una de las matrices de transformación. Dado que se está manejando una representación de la posición de un punto p como vector renglón, se puede aplicar una transformación compuesta a un punto p , multiplicando las matrices de izquierda a derecha, comenzando con el punto p .

Por ejemplo, si se desea aplicar una translación, seguida de un escalamiento a un punto p , la posición final del punto p' se calcula de la siguiente manera:

$$p' = (p \cdot T(d)) \cdot S(s)$$

O bien una translación, seguida de una rotación:

$$p' = (p \cdot T(d)) \cdot R_{a,b}(\theta)$$

En [Hearn 95] se demuestra que las matrices de transformaciones compuestas para el caso que sean del mismo tipo, se comportan de la siguiente manera:

- Las traslaciones sucesivas son aditivas: $T(d_a) \cdot T(d_b) = T(d_a + d_b)$
- Los escalamientos sucesivos son multiplicativos: $S(s_a) \cdot S(s_b) = S(s_a \cdot s_b)$
- Las rotaciones sucesivas son aditivas: $R_{a,b}(\theta) \cdot R_{a,b}(\phi) = R_{a,b}(\theta + \phi)$

3.6.2 Rotación General 2D

Las rotaciones generales 2D, implican la rotación de un punto $p = (x_1, x_2)$, dado un ángulo θ alrededor de un punto arbitrario (fijo) $f = (f_1, f_2)$ (Figura 3.15). Este problema se resuelve llevándolo a otro más fácil y conocido, aplicando la técnica de divide y vencerás, se resuelve en tres etapas.

1. Trasladar el punto f al origen, con una matriz de translación $T(-f)$.
2. Aplicar la rotación alrededor del origen, con la matriz de rotación $R(\theta)$.
3. Regresar el punto f a su posición original, con una matriz de translación $T(f)$.

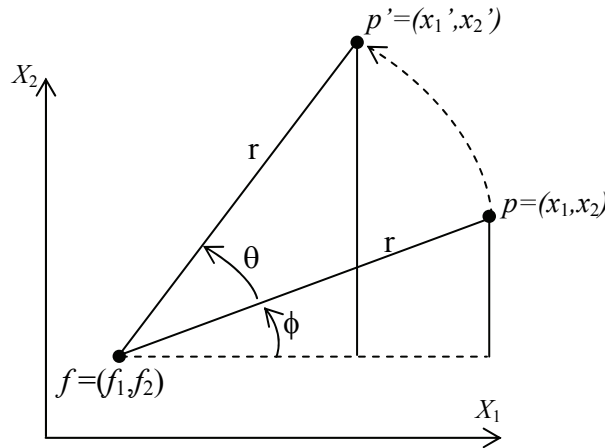


Figura 3.15: Rotación de un punto en 2D alrededor de un punto arbitrario.

De esta forma, la rotación de un punto p dado un ángulo θ , alrededor de un punto arbitrario $f = (f_1, f_2)$ en 2D se puede expresar como el producto matricial $p' = p \cdot T(-f) \cdot R(\theta) \cdot T(f)$, es decir:

$$[x_1' \quad x_2' \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -f_1 & -f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ f_1 & f_2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.20: Expresión matricial para la rotación general 2D.

3.6.3 Rotaciones Generales 3D

Las rotaciones generales 3D, implican la rotación de un punto p , dado un ángulo θ alrededor de un segmento arbitrario \overline{ab} formado por dos puntos no coincidentes $a = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)})$ y $b = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, b_3^{(0)})$, el problema se resuelve básicamente en tres etapas similares al caso 2D.

1. Trasladar el segmento \overline{ab} de tal forma que quede sobre alguno de los ejes principales X_1 , X_2 o X_3 , esto se logra mediante una secuencia de combinación de traslaciones y rotaciones sobre los ejes principales. Este proceso se analiza más adelante.
2. Aplicar la rotación alrededor del eje principal a donde fue llevado el segmento \overline{ab} , si se lleva al eje X_1 por ejemplo, se aplica la matriz de rotación $R_{2,3}(\theta)$.
3. Regresar el segmento \overline{ab} a su posición original.

Llevar el segmento \overline{ab} sobre alguno de los ejes principales, implica otra serie de 3 pasos, los cuales se ilustran en la Figura 3.16.

Se le llamará matriz de *IDA* a la matriz de transformación compuesta por una serie de transformaciones para llevar un segmento \overline{ab} sobre el eje X_1 (se escoge este eje y no otro, a manera de visualizar de forma más sencilla la generalización de las rotaciones a dimensiones superiores). Esta matriz está compuesta de tres transformaciones:

1. En la Figura 3.16 a) se tiene el segmento \overline{ab} en su posición original en el espacio 3D, en la Figura 3.16 b) se traslada este segmento, de tal manera que el punto a queda en el origen, esto se logra mediante la matriz de translación $T(-a)$.

2. Después en la Figura 3.16 c) se lleva el segmento \overline{ab} sobre el plano X_1X_2 , mediante una rotación por un ángulo α_1 sobre el eje X_3 , esto se logra con la matriz de rotación $R_{3,2}(\alpha_1)$.
3. Finalmente en la Figura 3.16 d) se lleva el segmento \overline{ab} sobre el eje X_1 , mediante una rotación por un ángulo α_2 sobre el eje X_3 , esto se logra con la matriz de rotación $R_{2,1}(\alpha_2)$.

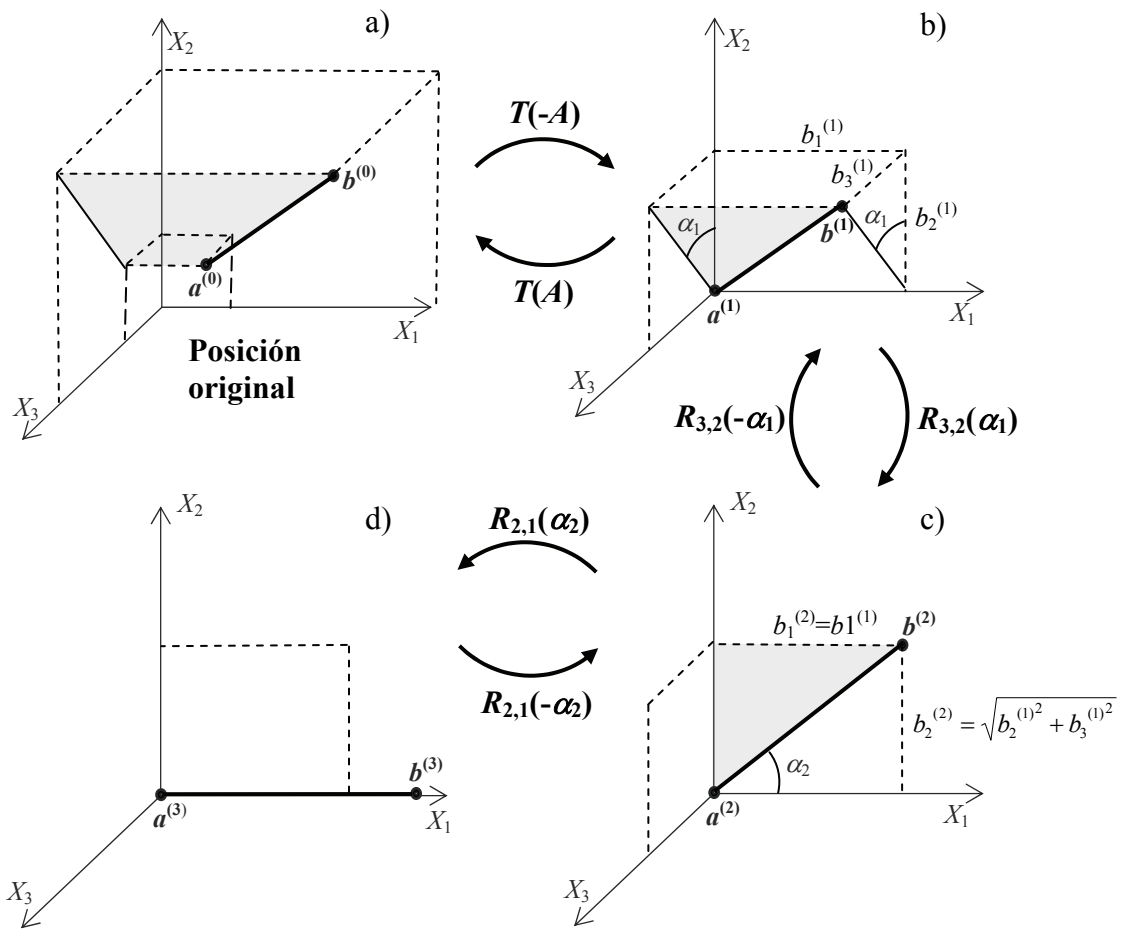


Figura 3.16: Proceso en 3D para llevar un segmento arbitrario \overline{ab} sobre el eje X_1 y regresarlo.

Entonces se tiene que la matriz IDA en 3D esta definida por la ecuación:

$$IDA = T(-a) \cdot R_{3,2}(\alpha_1) \cdot R_{2,1}(\alpha_2), \text{ es decir:}$$

$$IDA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.21: Expresión matricial para la matriz *IDA* 3D.

Se le llamará matriz de *REGRESO* (utilizando la abreviatura *REG* de aquí en adelante) a la matriz de transformación compuesta por una serie de transformaciones para llevar de vuelta un segmento \overline{ab} a su posición original, como se ve en la Figura 3.16, para obtener esta matriz se tienen que hacer las transformaciones en un orden inverso al que se sigue para la matriz *IDA*, de esta forma, la matriz *REG* está definida por la siguiente secuencia de matrices de transformación: $REG = R_{2,1}(-\alpha_1) \cdot R_{3,2}(-\alpha_1) \cdot T(A)$.

Una forma más rápida de obtener la matriz *REG*, es simplemente obteniendo la matriz inversa de la matriz *IDA*, esto es: $REG = IDA^{-1}$. Considerando las siguientes propiedades de transformaciones [Hearn 95]:

$$T(d)^{-1} = T(-d)$$

$$R_{a,b}(\theta)^{-1} = R_{a,b}(-\theta) = R_{b,a}(\theta)$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} REG &= IDA^{-1} = \left(T(-a) \cdot R_{3,2}(\alpha_1) \cdot R_{2,1}(\alpha_2) \right)^{-1} \\ &= R_{2,1}(\alpha_2)^{-1} \cdot R_{3,2}(\alpha_1)^{-1} \cdot T(-a)^{-1} \\ &= R_{2,1}(-\alpha_2) \cdot R_{3,2}(-\alpha_1) \cdot T(a) \\ &= R_{1,2}(\alpha_2) \cdot R_{2,3}(\alpha_1) \cdot T(a) \end{aligned}$$

Entonces:

$$REG = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & \sin \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \end{bmatrix}$$

Ecuación 3.22: Expresión matricial para la matriz REG 3D.

Para obtener completamente los valores de las matrices IDA y REG , resta calcular los ángulos de giro α_1 y α_2 .

Para obtener el valor del ángulo α_1 , observando el triángulo que se forma en la Figura 3.16 b), se tiene que $\tan(\alpha_1) = b_3^{(1)} / b_2^{(1)}$, por lo tanto:

$$\alpha_1 = \arctan2(b_3^{(1)} / b_2^{(1)}), \text{ donde } b_2^{(1)} = b_2^{(0)} - a_2^{(0)} \text{ y } b_3^{(1)} = b_3^{(0)} - a_3^{(0)}$$

Ecuación 3.23: Ecuación para el cálculo de α_1 .

Para obtener el valor del ángulo α_2 , observando el triángulo que se forma en la Figura 3.16 c), se tiene que $\tan(\alpha_2) = b_2^{(2)} / b_1^{(2)}$, por lo tanto:

$$\alpha_2 = \arctan2(b_2^{(2)} / b_1^{(2)}), \text{ donde } b_1^{(2)} = b_1^{(1)} = b_1^{(0)} - a_1^{(0)} \text{ y } b_2^{(2)} = \sqrt{b_2^{(1)2} + b_3^{(1)2}}$$

Ecuación 3.24: Ecuación para el cálculo de α_2 .

Finalmente, la rotación general 3D de un punto p , dado un ángulo θ alrededor de un segmento arbitrario \overline{ab} se lleva a cabo aplicándole la siguiente secuencia de transformaciones:

$$p' = p \cdot M$$

Ecuación 3.25: Formula para la rotación general 3D.

$$M = IDA \cdot R_{2,3}(\theta) \cdot REG$$

Ecuación 3.26: Matriz de rotación general 3D.

3.6.3.1 Análisis de las Rotaciones Generales 3D

En [Aguilera04] se presenta un trabajo de generalización de las rotaciones multidimensionales, donde para el caso 3D, el eje de rotación es de igual forma representado por la línea de soporte de un segmento \overline{ab} (un simplex 1D), donde $a = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)})$ y $b = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, b_3^{(0)})$ son dos puntos 3D no coincidentes.

Se define a $V^{(0)}$, como la matriz que representa los vértices originales del segmento, que en coordenadas homogéneas esto es:

$$V^{(0)} = \begin{bmatrix} a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & a_3^{(0)} & 1 \\ b_1^{(0)} & b_2^{(0)} & b_3^{(0)} & 1 \end{bmatrix}$$

y M_k como la matriz correspondiente a la k -ésima transformación. Entonces se tiene el conjunto $\{V^{(0)}, V^{(1)}, V^{(2)}, \dots\}$, donde $V^k = V^{k-1} \cdot M_k$. Este conjunto es la serie de matrices que contienen las coordenadas modificadas de los vértices después de cada transformación, es decir:

$$V^{(k)} = \begin{bmatrix} a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & a_3^{(k)} & 1 \\ b_1^{(k)} & b_2^{(k)} & b_3^{(k)} & 1 \end{bmatrix} \text{ o simplemente } V^{(k)} = \begin{bmatrix} a^{(k)} \\ b^{(k)} \end{bmatrix}$$

Entonces según lo analizado en la sección 3.6.3, para llevar a cabo una rotación 3D alrededor de un segmento arbitrario, se tiene que M_1 es $T(-a^{(0)})$ y de esta forma:

$$\begin{aligned} V^{(1)} &= V^{(0)} \cdot T(-a^{(0)}) = \begin{bmatrix} a^{(0)} \\ b^{(0)} \end{bmatrix} \cdot T(-a^{(0)}) = \begin{bmatrix} a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & a_3^{(0)} & 1 \\ b_1^{(0)} & b_2^{(0)} & b_3^{(0)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1^{(0)} & -a_2^{(0)} & -a_3^{(0)} & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(0)} - a_1^{(0)} & b_2^{(0)} - a_2^{(0)} & b_3^{(0)} - a_3^{(0)} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lo importante de observar en este paso, es que las coordenadas del punto a se van al origen, es decir valen cero.

Siguiendo el proceso, se tiene que M_2 es la matriz de rotación $R_{3,2}(\alpha_1)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 V^{(2)} &= \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \end{bmatrix} \cdot R_{3,2}(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(1)} & b_2^{(1)} \cos \alpha_1 + b_3^{(1)} \sin \alpha_1 & -b_2^{(1)} \sin \alpha_1 + b_3^{(1)} \cos \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Teorema:

Al aplicar la matriz $R_{3,2}(\alpha_1)$, se está usando el plano de rotación X_2X_3 , y el ángulo de rotación necesario para llevar el segmento hacia el plano X_1X_2 , de tal forma que la coordenada $b_3^{(2)}$ se vaya a cero, está dado por $\alpha_1 = \arctan2(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})$.

Demostración:

Tomando en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

$$\sin(\arctan2(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan2(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},$$

se calculan los valores de $b_2^{(2)}$ y $b_3^{(2)}$.

$$\begin{aligned}
 b_2^{(2)} &= b_2^{(1)} \cos \alpha_1 + b_3^{(1)} \sin \alpha_1 \\
 &= b_2^{(1)} \cos(\arctan2(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})) + b_3^{(1)} \sin(\arctan2(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})) \\
 &= b_2^{(1)} \left(\frac{1}{\sqrt{1+(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})^2}} \right) + b_3^{(1)} \left(\frac{b_3^{(1)}/b_2^{(1)}}{\sqrt{1+(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})^2}} \right) = \left(\frac{b_2^{(1)} + (b_3^{(1)})^2/b_2^{(1)}}{\sqrt{1+(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})^2}} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2}{b_2^{(1)}} \\
&= \frac{\sqrt{(b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2}}{b_2^{(1)}} \\
&= \frac{(b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2}{\sqrt{(b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2}} \\
&= \sqrt{(b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_3^{(2)} &= -b_2^{(1)} \sin \alpha_1 + b_3^{(1)} \cos \alpha_1 \\
&= -b_2^{(1)} \sin(\arctan 2(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})) + b_3^{(1)} \cos(\arctan 2(b_3^{(1)}/b_2^{(1)})) \\
&= -b_2^{(1)} \left(\frac{b_3^{(1)}/b_2^{(1)}}{\sqrt{1 + (b_3^{(1)}/b_2^{(1)})^2}} \right) + b_3^{(1)} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (b_3^{(1)}/b_2^{(1)})^2}} \right) \\
&= \left(\frac{-b_3^{(1)} + b_3^{(1)}}{\sqrt{1 + (b_3^{(1)}/b_2^{(1)})^2}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(1)} & \sqrt{(b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Enseguida, se tiene que M_3 es la matriz de rotación $R_{2,1}(\alpha_2)$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
V^{(3)} &= \begin{bmatrix} a^{(2)} \\ b^{(2)} \end{bmatrix} \cdot R_{2,1}(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(2)} \cos \alpha_2 + b_2^{(2)} \sin \alpha_2 & -b_1^{(2)} \sin \alpha_2 + b_2^{(2)} \cos \alpha_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Teorema:

Al aplicar la matriz $R_{2,1}(\alpha_1)$, se está usando el plano de rotación X_1X_2 , y el ángulo de rotación necesario para llevar el segmento hacia el eje X_1 , de tal forma que la coordenada $b_2^{(3)}$ se vaya a cero, está dado por $\alpha_2 = \arctan2(b_2^{(2)}/b_1^{(2)})$.

Demostración:

Este proceso se puede demostrar de la misma forma que la hipótesis anterior, y se ve claramente que se llega a los siguientes resultados:

$$b_1^{(3)} = \sqrt{(b_1^{(2)})^2 + (b_2^{(2)})^2}$$

$$b_2^{(3)} = 0$$

Por lo tanto

$$V^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{(b_1^{(1)})^2 + (b_2^{(1)})^2 + (b_3^{(1)})^2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La aplicación de las matrices M_2 y M_3 muestran que si se desea hacer igual a cero la j -ésima coordenada, se aplica una rotación dada por la siguiente ecuación:

$$M_k = R_{j,j-1}(\arctan2(b_j^{(k-1)}, b_{j-1}^{(k-1)}))$$

Ecuación 3.27: Matriz de rotación para llevar la j -ésima coordenada a cero [Aguilera 04].

Hasta este punto, se tiene al segmento \overline{ab} sobre el eje X_1 , es decir que la matriz $IDA = M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$, por lo tanto el siguiente paso es aplicar la rotación sobre el eje X_1 con el ángulo θ deseado, por lo tanto M_4 es la matriz de rotación $R_{2,3}(\theta)$. El proceso final es regresar el eje de rotación a su posición original, aplicando las matrices M_5 , M_6 y M_7 que son las matrices inversas de M_3 , M_2 y M_1 respectivamente, entonces, se tiene que la matriz REG está definida como: $REG = M_5 \cdot M_6 \cdot M_7 = M_3^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdot M_1^{-1} = IDA^{-1}$.

De esta forma, para llevar a cabo la rotación general 3D de un punto p , dado un ángulo θ alrededor de un segmento arbitrario \overline{ab} se aplican la Ecuación 3.25 y la Ecuación 3.26.

3.6.4 Rotaciones Generales 4D

Las rotaciones generales 4D, implican la rotación de un punto p , dado un ángulo θ alrededor de un plano, definido por el plano de soporte de un triángulo $\Delta(abc)$ (un simplex 2D), donde $a = (a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, a_3^{(0)}, a_4^{(0)})$, $b = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, b_3^{(0)}, b_4^{(0)})$, y $c = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, c_3^{(0)}, c_4^{(0)})$ son tres puntos no colineales. El problema se resuelve nuevamente en tres etapas similares al caso 3D.

1. Trasladar el triángulo $\Delta(abc)$ de tal forma que quede completamente sobre el plano principal X_1X_2 , y que el eje \overline{ab} quede alineado sobre el eje X_1 .
2. Aplicar la rotación alrededor del plano principal X_1X_2 , mediante la matriz de rotación $R_{3,4}(\theta)$.
3. Regresar el triángulo $\Delta(abc)$ a su posición original.

Llevar el triángulo $\Delta(abc)$ al plano X_1X_2 y que el eje \overline{ab} quede alineado sobre X_1 , implica una serie de 6 pasos, los cuales se ilustran en la Figura 3.17.

Se define el conjunto $\{V^{(0)}, V^{(1)}, V^{(2)}, \dots\}$ como la serie de matrices que contienen las coordenadas modificadas de los vértices del triángulo después de cada transformación, donde $V^k = V^{k-1} \cdot M_k$, y $V^{(0)}$ es la matriz que define los vértices originales del triángulo.

$$V^{(0)} = \begin{bmatrix} a_1^{(0)} & a_2^{(0)} & a_3^{(0)} & a_4^{(0)} & 1 \\ b_1^{(0)} & b_2^{(0)} & b_3^{(0)} & b_4^{(0)} & 1 \\ c_1^{(0)} & c_2^{(0)} & c_3^{(0)} & c_4^{(0)} & 1 \end{bmatrix}$$

1. En la Figura 3.17 a) se tiene el triángulo $\Delta(abc)$ en su posición original en algún lugar del espacio 4D. En la Figura 3.17 b) se traslada este triángulo, de tal manera que el punto a queda en el origen. Se tiene entonces que $M_1 = T(-a^{(0)})$ y por lo tanto:

$$V^{(1)} = V^{(0)} \cdot T(-a^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} & b_4^{(1)} & 1 \\ c_1^{(1)} & c_2^{(1)} & c_3^{(1)} & c_4^{(1)} & 1 \end{bmatrix}$$

2. En la Figura 3.17 c) se lleva el segmento \overline{ab} del triángulo dentro del volumen $X_1X_2X_3$. Aplicando la Ecuación 3.27, la cual realiza una rotación de la j -ésima hacia la $(j-1)$ -ésima dimensión, haciendo que la j -ésima coordenada se haga cero, se tiene que $M_2 = R_{4,3}(\alpha_1) = R_{4,3}(\arctan2(b_4^{(1)}/b_3^{(1)}))$ y por lo tanto:

$$V^{(2)} = V^{(1)} \cdot R_{4,3}(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} & 0 & 1 \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & c_4^{(2)} & 1 \end{bmatrix}$$

3. En la Figura 3.17 d) se lleva el segmento \overline{ab} sobre el plano X_1X_2 . Aplicando de nuevo la Ecuación 3.27, se tiene que $M_3 = R_{3,2}(\alpha_2) = R_{3,2}(\arctan2(b_3^{(2)}/b_2^{(2)}))$ y por lo tanto:

$$V^{(3)} = V^{(2)} \cdot R_{3,2}(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & 0 & 0 & 1 \\ c_1^{(3)} & c_2^{(3)} & c_3^{(3)} & c_4^{(3)} & 1 \end{bmatrix}$$

4. En la Figura 3.17 e) se lleva el segmento \overline{ab} sobre el eje X_1 . Aplicando la Ecuación 3.27, se tiene que $M_4 = R_{2,1}(\alpha_3) = R_{2,1}(\arctan2(b_2^{(3)}/b_1^{(3)}))$ y por lo tanto:

$$V^{(4)} = V^{(3)} \cdot R_{2,1}(\alpha_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(4)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1^{(4)} & c_2^{(4)} & c_3^{(4)} & c_4^{(4)} & 1 \end{bmatrix}$$

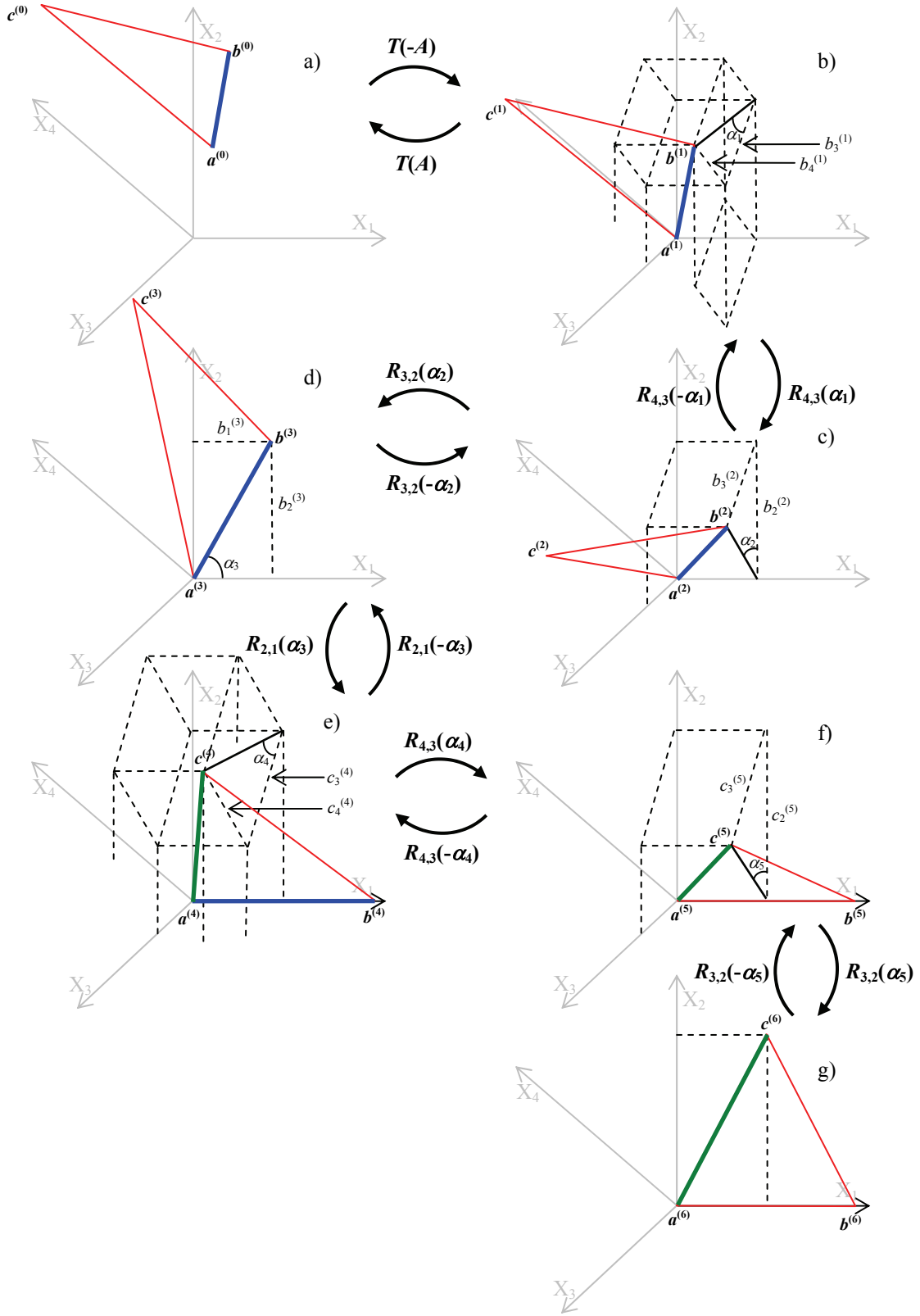


Figura 3.17: Proceso en 4D para llevar un triángulo $\Delta(abc)$ arbitrario sobre el plano X_1X_2 y regresarlo.

Hasta este momento se puede observar que el segmento modificado $\overline{a^{(4)}b^{(4)}}$ se encuentra sobre el eje X_1 , sin embargo el punto $c^{(4)}$, que también sufrió modificaciones, se encuentra en alguna parte del espacio 4D. Ahora es necesario mover este punto de tal forma que el triángulo se encuentre completamente sobre el plano X_1X_2 , para ello, se tiene que trabajar con el segmento \overline{ac} y aplicar rotaciones que no involucren al eje X_1 , para no modificar la posición del segmento \overline{ab} , ya que como se especifica en las observaciones de la Sección 3.5.4, una rotación $R_{a,b}(\theta)$, modifica las coordenadas dentro del plano de rotación formado por los ejes X_a y X_b , y dejan fijo todos los puntos que no pertenecen a este. Entonces se prosigue de la siguiente forma:

5. En la Figura 3.17 f) se lleva el segmento \overline{ac} dentro del volumen $X_1X_2X_3$. Aplicando la Ecuación 3.27, se tiene que $M_5 = R_{4,3}(\alpha_4) = R_{4,3}(\arctan2(c_4^{(4)}/c_3^{(4)}))$ y por lo tanto:

$$V^{(5)} = V^{(4)} \cdot R_{4,3}(\alpha_4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(5)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1^{(5)} & c_2^{(5)} & c_3^{(5)} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. En la Figura 3.17 g) se lleva el segmento \overline{ac} sobre el plano X_1X_2 . Aplicando la Ecuación 3.27, se tiene que $M_6 = R_{3,2}(\alpha_5) = R_{3,2}(\arctan2(c_3^{(5)}/c_2^{(5)}))$ y por lo tanto:

$$V^{(6)} = V^{(5)} \cdot R_{3,2}(\alpha_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_1^{(6)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_1^{(6)} & c_2^{(6)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con esto, se tiene el triángulo $\Delta(abc)$ completamente sobre el plano X_1X_2 , el siguiente paso es aplicar la rotación sobre este plano con el ángulo θ deseado, por lo tanto

$M_7 = R_{3,4}(\theta)$. El proceso final es regresar el triángulo a su posición original, aplicando las matrices de M_8 a M_{13} que son las matrices inversas de M_6 a M_1 respectivamente.

Entonces se definen a las matrices IDA y REG 4D como:

$$IDA = \prod_{k=1}^6 M_k$$

$$REG = \prod_{k=8}^{13} M_k = IDA^{-1}$$

De esta forma, la rotación general 4D de un punto p , dado un ángulo θ alrededor de un plano arbitrario está definida como:

$$p' = p \cdot M$$

Ecuación 3.28: Formula para la rotación general 4D.

$$M = IDA \cdot R_{3,4}(\theta) \cdot REG$$

Ecuación 3.29: Matriz de rotación general 4D.

3.6.5 Rotaciones Generales nD

Las rotaciones generales nD , implican la rotación de un punto p , dado un ángulo θ alrededor de un hiperplano $(n-2)$ -dimensional arbitrario definido por $n-1$ puntos no cohiperplanares, que representan un simplex $(n-2)D$.

En general, el problema se resuelve en tres etapas similares a los casos 3D y 4D.

1. Trasladar el hiperplano $(n-2)$ -dimensional de tal forma que quede completamente dentro del hiperplano principal $X_1X_2\dots X_{n-2}$.
2. Aplicar la rotación alrededor del hiperplano principal $X_1X_2\dots X_{n-2}$, mediante la matriz de rotación $R_{n-1,n}(\theta)$.
3. Regresar el hiperplano $(n-2)$ -dimensional a su posición original.

Llevar el hiperplano $(n-2)$ -dimensional de rotación completamente sobre el hiperplano $X_1X_2\dots X_{n-2}$ implica una serie de pasos que se explican a continuación.

Se define el conjunto $\{V^{(0)}, V^{(1)}, V^{(2)}, \dots\}$ como la serie de matrices que contienen los vértices modificados de los vértices del hiperplano $(n-2)$ -dimensional después de cada transformación, donde $V^k = V^{k-1} \cdot M_k$ y $V^{(0)}$ es la matriz que define las coordenadas originales. En general la matriz $V^{(k)}$ para la rotación en nD se define como:

$$V^{(k)} = \begin{bmatrix} v_{1,1}^{(k)} & v_{1,2}^{(k)} & v_{1,3}^{(k)} & \cdots & v_{1,n}^{(k)} & 1 \\ v_{2,1}^{(k)} & v_{2,2}^{(k)} & v_{2,3}^{(k)} & \cdots & v_{2,n}^{(k)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1}^{(k)} & v_{n-1,2}^{(k)} & v_{n-1,3}^{(k)} & \cdots & v_{n-1,n}^{(k)} & 1 \end{bmatrix} \text{ o bien, } V^{(k)} = \begin{bmatrix} V_1^{(k)} \\ V_2^{(k)} \\ \vdots \\ V_{n-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

El primer paso en cualquier dimensión es trasladar las coordenadas del punto $V_1^{(0)}$ al origen, entonces se tiene que $M_1 = T(-V_1^{(0)})$ y por lo tanto:

$$V^{(1)} = V^{(0)} \cdot T(-V_1^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ v_{2,1}^{(1)} & v_{2,2}^{(1)} & v_{2,3}^{(1)} & \cdots & v_{2,n}^{(1)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1}^{(1)} & v_{n-1,2}^{(1)} & v_{n-1,3}^{(1)} & \cdots & v_{n-1,n}^{(1)} & 1 \end{bmatrix}$$

De aquí, se generaliza el proceso partiendo de los resultados obtenidos en 3D y 4D. La idea es llevar el segmento $\overline{V_1V_2}$ sobre el eje principal X_1 mediante rotaciones principales similares a los casos 3D y 4D; después llevar el segmento $\overline{V_1V_3}$ sobre el plano principal X_1X_2 , utilizando rotaciones principales que no involucren al eje X_1 para no alterar la posición de los vértices V_1 y V_2 ya posicionados sobre este eje; enseguida llevar el segmento $\overline{V_1V_4}$ dentro del volumen principal $X_1X_2X_3$, utilizando rotaciones principales que no involucren las coordenadas que forman al plano X_1X_2 para no alterar la posición de los vértices V_1 , V_2 y V_3 ya posicionados sobre este plano; y así sucesivamente hasta llevar el

segmento $\overline{V_1 V_n}$ dentro del hiperplano principal $X_1 X_2 \dots X_{n-2}$, utilizando rotaciones principales que no involucren a los ejes que forman al hiperplano $X_1 X_2 \dots X_{n-3}$ para no alterar la posición de los vértices V_1, V_2, \dots, V_{n-2} ya posicionados dentro de este hiperplano.

Entonces la matriz general *IDA* formada por el conjunto de matrices de transformación requeridas para llevar el hiperplano $(n-2)$ -dimensional de tal forma que quede completamente sobre el hiperplano principal $X_1 X_2 \dots X_{n-2}$, debe de convertir la matriz $V^{(0)}$ a una $V^{(k)}$ de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} v_{1,1}^{(0)} & v_{1,2}^{(0)} & v_{1,3}^{(0)} & \dots & v_{1,n}^{(0)} & 1 \\ v_{2,1}^{(0)} & v_{2,2}^{(0)} & v_{2,3}^{(0)} & \dots & v_{2,n}^{(0)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1}^{(0)} & v_{n-1,2}^{(0)} & v_{n-1,3}^{(0)} & \dots & v_{n-1,n}^{(0)} & 1 \end{bmatrix} \cdot IDA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ v_{2,1}^{(k)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{n-1,1}^{(k)} & \dots & v_{n-1,n-2}^{(k)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Después de este proceso lo que se tiene es que el vértice $V_1^{(k)}$ se encuentra en el origen, el vértice $V_2^{(k)}$ sobre el eje X_1 , el vértice $V_3^{(k)}$ sobre el plano $X_1 X_2$, y así sucesivamente, teniendo finalmente el vértice $V_{n-1}^{(k)}$ dentro del hiperplano $X_1 X_2 \dots X_{n-2}$.

Procediendo de forma similar a los casos 3D y 4D, lo que se necesita para lograr esa matriz es hacer cero una columna c y renglón r dado, por lo que se hace uso de la Ecuación 3.27, la cual se puede reescribir como:

$$M_k = R_{c,c-1} \left(\arctan 2 \left(V_{r,c}^{(k-1)}, V_{r,c-1}^{(k-1)} \right) \right)$$

De esta forma, se tiene que en el primer renglón se necesita hacer cero n coordenadas, en el segundo $n-1$, en el tercero $n-2$, y así sucesivamente hasta que en el $(n-1)$ -ésimo renglón se necesitan hacer cero solamente dos coordenadas, lo que indica claramente que el número de rotaciones que hay que llevar a cabo será equivalente a la suma de los $(n-1)$ primeros enteros positivos, $(n-1)$ porque los n ceros del primer renglón se obtienen de la

translación de $T(-V_1^{(0)})$ y se resta 1 porque se comienza desde hacer cero 2 coordenadas, por lo tanto:

$$\frac{(n-1)(n-1+1)}{2} - 1 = \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

Se necesitan entonces, $n(n-1)/2 - 1$ matrices de rotación para que el hiperplano $(n-2)$ -dimensional quede completamente sobre el hiperplano principal $X_1X_2\dots X_{n-2}$. Dado que las rotaciones comienzan en $k=2$, se tiene que las matrices generales IDA y REG están dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} IDA = M_1 \cdot \prod_{k=2}^{n(n-1)/2} M_k \\ REG = IDA^{-1} \end{array} \right.$$

Ecuación 3.30: Matrices generales IDA y REG nD .

Se puede concluir que las rotaciones generales multidimensionales de un punto p , dado un ángulo θ alrededor de un hiperplano $(n-2)$ -dimensional arbitrario están dadas por las siguiente ecuaciones:

$$p' = p \cdot M$$

Ecuación 3.31: Formula para la rotación general nD .

$$M = IDA \cdot R_{n-1,n}(\theta) \cdot REG$$

Ecuación 3.32: Matriz de rotación general nD .

A continuación se presenta el algoritmo *Aguilera-Perez* propuesto en [Aguilera04], en el cuál se puede apreciar claramente el cálculo de cada una de las matrices de transformación, necesarias para generar la matriz de rotación general nD .

```

Procedure ComputeM( $V^{(0)}, \theta, n$ )
 $M_1 := T(-V_1^{(0)})$ 
 $V^{(1)} := V^{(0)} \cdot M_1$ 
 $M := M_1$ 
 $k := 1$ 
for  $r := 2$  to  $n-1$  do
    for  $c := n$  downto  $r$  do
         $k := k+1;$ 
         $M_k = R_{c, c-1}(\arctan2(V_{r, c}^{(k-1)}, V_{r, c-1}^{(k-1)}))$ 
         $V^{(k)} := V^{(k-1)} \cdot M_k$ 
         $M := M \cdot M_k$ 
    endfor
endfor
 $M := M \cdot R_{n, n-1}(\theta)$ 
 $M := M \cdot M^{-1}$ 
endprocedure

```

3.7 Resumen

En este capítulo se analizaron algunas transformaciones geométricas n -dimensionales, donde se pudo ver que las transformaciones de escalamiento, y translación son fácilmente llevadas a su forma general para cualquier espacio nD .

Dentro de las rotaciones, se analizaron en primer lugar las rotaciones principales, que se llevan a cabo alrededor de los ejes principales que forman el espacio nD , presentando la matriz general para tales rotaciones. Enseguida se presentó el método para poder llevar a cabo las rotaciones alrededor de cualquier eje $(n-2)$ -dimensional de rotación arbitrario, utilizando una combinación de transformaciones de translación y rotaciones principales, definiendo de esta forma, las matrices generales *IDA* y *REG*, para finalmente obtener la matriz para rotaciones generales.

El método para rotaciones generales presentado en este capítulo es aplicable cuando se cuenta con $n-1$ puntos no cohiperplanares, que representan un simplex $(n-2)D$. En el siguiente capítulo se desarrolla un método para rotaciones generales, mediante operaciones vectoriales, aplicable cuando se proporciona el plano de rotación.