# Capítulo 1: Introducción

## 1.1 La Realidad

La realidad conocida por los seres vivos consiste de tres dimensiones (3D), en un espacio donde hay sólo tres direcciones perpendiculares entre si, estas direcciones son familiarmente conocidas como: izquierda o derecha, arriba o abajo, y atrás o adelante, cualquier otra dirección es simplemente una combinación de estas direcciones básicas. Matemáticamente, se habla de los tres ejes en coordenadas cartesianas, llamados comúnmente *X*, *Y* y *Z*.

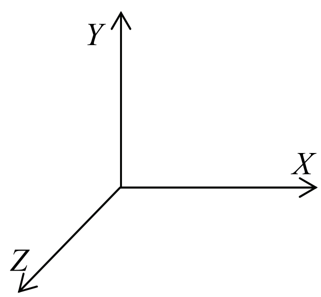


**Figura 1.1 Ejes en el espacio 3D.**

Se puede pensar que en este espacio tridimensional, no puede existir una dimensión más, físicamente podría ser cierto, sin embargo, matemáticamente hablando, el número 3 no limita la cantidad de dimensiones espaciales posibles, ya que es posible tener dimensiones menores, por ejemplo, el espacio 1D que consiste de una línea recta que se extiende al infinito, o el espacio 2D que consiste de un plano que se extiende indefinidamente en alto y ancho, por tanto, matemáticamente es posible tratar con dimensiones superiores a 3D.

## 1.2 Más allá de la Tercera Dimensión

*"La línea tiene magnitud en una dirección, el plano en dos direcciones, y el sólido en tres direcciones, más allá de éstas no hay otra magnitud porque las tres son todas"*

*– Aristóteles, 150 a. C.*

### 1.2.1 Dimensiones

El hablar de múltiples dimensiones puede resultar extraño para mucha gente si se tratan como dimensiones espaciales, sin embargo, el sentido de dimensión puede ser interpretado de muchas formas dependiendo del área. Por ejemplo, un arquitecto, calcula la cantidad de concreto, cableado, plomería, etc., necesario para hacer una construcción; o en un laboratorio de graficación por computadora, donde alumno y profesor analizan una serie de ecuaciones para graficar ecuaciones complejas. Los conceptos que manejan estas personas, representan varias dimensiones en su campo, y así como ellos, muchos otros tienen experiencias explorando el concepto de dimensiones.

En un sentido más familiar, cuando alguien hace referencia a una dimensión, frecuentemente se entiende que se está midiendo algún fenómeno en alguna dirección, medias que especifican un lugar, como la latitud y longitud, o que se específica una forma, como la altura o el ancho. Incluso se utiliza el tiempo y espacio juntos como dimensiones, cuando se hace una cita con alguien a cierta hora en un cierto lugar.

### 1.2.2 La Cuarta Dimensión

La cuarta dimensión ha sido una especulación física desde el siglo XIX, la idea de una dimensión más allá de la tercera culminó con las teorías de la relatividad general de Albert Einstein, donde juntos, el espacio y tiempo, representan cuatro dimensiones, donde todos los eventos reales están permanentemente detenidos [Dewdney 92].

Sin embargo el tiempo no es necesariamente la cuarta dimensión, sino una buena aplicación, ya que este sistema está formado por tres dimensiones espaciales y una temporal.

En [Kaku 94] se menciona que los años entre 1890 y 1910 está considerada como la era de oro de la cuarta dimensión, donde el arte no estuvo exenta, por ejemplo: "El retrato de Dora Maar" de Picasso, muestra un claro rechazo a la perspectiva, con caras de mujer, vistas simultáneamente desde varios ángulos, en lugar de un solo punto de vista, la pintura muestras múltiples perspectivas, como si fuera pintada por alguien de la cuarta dimensión, capaz de ver todas las perspectivas simultáneamente.

**Figura 1.2 "El retrato de Dora Maar" de Picasso.**[1]

Y en la pintura "Desnudo descendiendo unas escaleras" de Marcel Duchamp, se ve una representación borrosa de una mujer, con un número infinito de sus imágenes sobrepuestas en el tiempo de cuando baja unas escaleras, esto es como si una persona de la cuarta dimensión podría ver a las personas, pudiendo ver todas las secuencias del tiempo a la vez, si el tiempo fuera la cuarta dimensión.

[1] Imagen tomada de http://www.abcgallery.com/

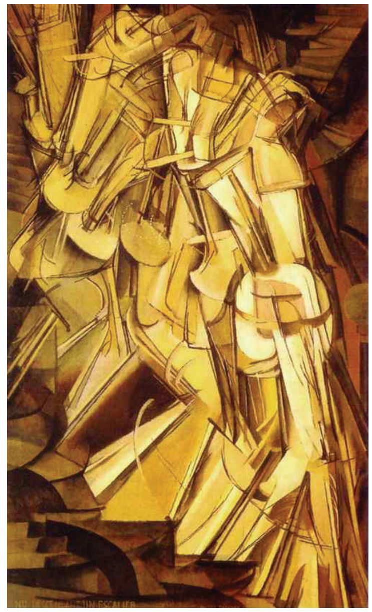

**Figura 1.3 "Desnudo descendiendo unas escaleras" de Marcel Duchamp.**[2]

### 1.2.3 Dimensiones Espaciales

La presente investigación se realiza considerando todas las dimensiones como espaciales, es decir, la generalización del espacio Euclidiano 3D hacia otras dimensiones. Por lo tanto, en el resto de este documento, cuando se hable de las dimensiones 3D, 4D, y en general *n*D, serán dimensiones espaciales.

En 3D, un punto o localización puede ser completamente señalado con tres coordenadas. Tres líneas rectas pueden ser colocadas perpendicularmente una con las otras, pero no puede agregarse una cuarta línea que sea perpendicular a las otras tres. Esto es debido a que el espacio como se conoce, está sujeto a una limitación, y quizá para tener una concepción adecuada de lo que significa es está limitación, es necesario imaginarse el existir en un espacio más limitado al que se vive [Hinton 84].

Un trabajo relacionado al entendimiento de la limitación tridimensional, es el libro "Flatland" de Edwin A. Abbott, donde se propone un método para la conceptualización del

[2] Imagen tomada de http://www.abcgallery.com/

espacio 4D, en el que un ser 3D (un cuadrado) trata de explicar por medio de analogías a seres 2D la existencia de la tercera dimensión (ver [Abbott, 84]).

Aristóteles declaró categóricamente 150 años a.C. que la cuarta dimensión espacial era imposible, tiempo después, Ptolomeo construyó una “prueba” para demostrar que la cuarta dimensión era imposible, decía que si se dibujan tres líneas mutuamente perpendiculares, y luego se intenta dibujar una cuarta línea que fuera perpendicular a las otras tres líneas, se vería que es imposible, e incluso dijo que tres líneas mutuamente perpendiculares no son solamente imposibles de dibujar, sino además imposibles de comprender. Pero lo que Ptolomeo realmente hizo fue demostrar que es imposible visualizar la cuarta dimensión con nuestros cerebros tridimensionales [Kaku 94]. Por tanto, es necesario hacer una construcción mental *n*-dimensional para entender lo que sucede matemáticamente en espacios superiores.

En el espacio 4D, entonces, es posible tener cuatro líneas perpendiculares entre si, en 5D cinco líneas perpendiculares entre si y en general en *n*D, es posible tener *n* líneas perpendiculares entre sí.

De esta forma, la inclusión de una cuarta dimensión, se debe entender como un eje adicional perpendicular a cada una de las otros tres ejes que forman el espacio 3D, así la inclusión de la quinta dimensión estará representada como otro eje perpendicular a los cuatro del espacio 4D, y así sucesivamente. La Figura 1.4 representa los cuatro ejes en 4D, aquí se crea un nuevo eje *W*, adicional a los ya conocidos en 3D. Aquí, se debe entender que cada par de ejes forman entre sí, un ángulo de 90º grados.

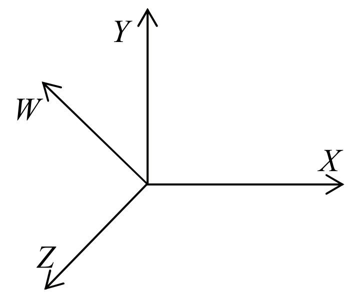


**Figura 1.4 Ejes en el espacio 4D.**

Los ejes en 3D son nombrados normalmente por las letras *X*, *Y* y *Z*, y en la analogía para 4D se incluyó un cuarto eje nombrado con la letra *W*. Sin embargo, está forma de representación no resulta adecuada para manejar una generalización en múltiples dimensiones, por tanto a en el resto del documento cuando se nombre un eje del espacio *n*D, se denotará como $X_i$ donde $1 \leq i \leq n$, de esta forma, en el espacio *n*D, se tienen los ejes $X_1$, $X_2, \ldots, X_n$, entonces, cuando se hable de los ejes $X_1$, $X_2$, $X_3$, se deberá entender que es la equivalencia de los ejes *X*, *Y*, y *Z* respectivamente. En general la generalización del espacio Euclidiano en *n*D está definido por el conjunto: $\Re^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \Re\}$.

## 1.3 Analogías Dimensionales

La cuarta dimensión comenzó a ser estudiada a principios del siglo XVIII por matemáticos de diferentes partes del mundo que abrieron sus mentes hacia nuevos tipos de geometría.

Uno de los grandes adelantos fue el descubrimiento de geometría no-euclideana que satisfacen todos excepto un axioma de la geometría plana (tema que no se trata en esta investigación). Otra visión importante fue que la geometría plana y sólida era sólo el principio de geometrías de dimensiones superiores.

Estos desarrollos cambiaron el punto de vista de la geometría, la cual estaba estancada en descripciones de experiencias físicas en un espacio 3D. En un principio hubo un rechazo, debido a la incapacidad de visualizar lo que la geometría de dimensiones mayores podría significar. Tiempo después, Edwin Abbott, Carl Friedrich Gauss y Hermann von Helmholtz desarrollaron analogías dimensionales para fortalecer la capacidad de imaginación para entender las nuevas creaciones matemáticas [Banchoff 96].

Una de las analogías dimensionales desarrolladas, fue la secuencia de figuras análogas, como el caso de la extrusión (barrido) ortogonal para la producción de politopos de mayor dimensionalidad. El hipercubo 4D por ejemplo, se deriva del cubo (3D), que a su vez se deriva del cuadrado (2D), derivado de un segmento de recta (1D), que proviene del punto (0D). Esta como otras analogías se analizan con detalle en el Capítulo 2, donde se trata el tema de creación automática de politopos.

## 1.4 Visualización de Dimensiones Superiores

### 1.4.1 Visualización de lo que Antes era Imposible

Una pregunta que viene siempre a la mente cuando se escucha por primera la palabra hipercubo 4D es, ¿Realmente existe esta figura?, la respuesta es si, en geometría plana, ya que los objetos no necesariamente tienen que ser reales, dado que se pueden representar como diagramas o modelos matemáticos [Banchoff 96].

Una figura geométrica que pertenece a otra dimensión, no puede ser vista por el ojo humano a simple vista, debido a la limitación de que solo se puede ver en tres dimensiones, por tal razón, los matemáticos han creados métodos para visualizar objetos en dimensiones superiores y el instrumento ideal para ello, son las gráficas por computadora.

La graficación por computadora es una técnica que permite ver hacia una dirección anteriormente inaccesible por el ojo humano, así como lo fue por ejemplo, el telescopio de Galileo Galilei, con el que se pueden ver objetos estelares que están a billones de años luz; el microscopio de Leeuwenhoek que permite explorar microorganismos; y el descubrimiento de los Rayos X por Wilhelm Röntgen, que revelan la forma del esqueleto dentro del cuerpo humano. Todas estas asombrosas navegaciones en lo que anteriormente era inimaginable, son evidencias de la habilidad del ser humano por ir más allá de sus capacidades físicas, por ver lo anteriormente no-visible.

Igualmente asombroso resulta la habilidad hoy en día de visualizar fenómenos en otras dimensiones. Gracias a los desarrollos en graficación por computadora, es posible tener una experiencia visual directa con objetos que solo existen en otras dimensiones, y en el momento en que se observan estos objetos nunca antes conocidos moviéndose en una pantalla, se está enfrentando un reto similar a cuando se descubrieron el telescopio o los rayos X [Banchoff 96]. Hoy en día, se vive una era en que se está aprendiendo a interpretar imágenes de dimensiones superiores.

### 1.4.2 La Graficación por Computadora para Visualizar Otras Dimensiones

La graficación por computadora tradicional está basada en fórmulas matemáticas, para crear objetos tridimensionales parecidos a la realidad, transformándolos y proyectándolos en un dispositivo de salida bidimensional (como el monitor de la computadora o un proyector).

Y es gracias al uso de las matemáticas, que es posible extender el concepto de proyecciones a cualquier número de dimensiones. Se puede por ejemplo:

- Construir figuras geométricas análogas al cubo, tetraedro, octaedro, por mencionar algunas, a cualquier número de dimensiones, llamados politopos a partir de 4D.
- Hacer una generalización a cualquier número de dimensiones de transformaciones geométricas como el escalamiento, la translación o la rotación.
- Y proyectar objetos que existen en un espacio *n*-dimensional a un espacio de menor dimensionalidad.

### 1.4.3 ¿Para que Visualizar Dimensiones Superiores?

*Alguien a M. Faraday: ¿Para que sirve su trabajo?*

*M. Faraday: ¿Cuál es el objetivo de un niño? Crecer para ser un hombre.*

La inquietud por tratar de visualizar los fenómenos en espacios dimensionales más allá de lo que el hombre puede ver y acceder directamente, además de la curiosidad de analizarlos, tiene una amplia variedad de aplicaciones útiles, un caso simple es la graficación de funciones, una de las mejores formas para entender funciones es graficándolas, se puede graficar valores de funciones reales de una variable en una gráfica 2D, de dos variables en una gráfica 3D, pero para el caso donde se tienen más variables se necesita contar con dimensiones adicionales, y para entender dichas gráficas, se tiene que ser capaz de visualizarlas en esa misma dimensión [Eusebeia 06].

Trabajos relacionados a la visualización de dimensiones superiores son, el de [dos Santos 02] que muestra una técnica para la visualización de funciones escalares de muchas variables, a las cuales les llama funciones multidimensionales. Y el de [Banchoff 95] que habla sobre la graficación de funciones complejas, donde se puede ver, que para graficar este tipo de funciones, es necesario contar con dos dimensiones para el rango y dos para el dominio, por tanto se requiere de cuatro dimensiones espaciales.

En cuanto a aplicación de rotaciones en dimensiones superiores, el trabajo de [Duffin 94], presenta una interfaz para llevar a cabo rotaciones alrededor del origen, y lo aplican a la visualización de imágenes con sus gamas de colores como un conjunto de puntos en 5D, donde cada píxel de una imagen a color está dado por cinco coordenadas espaciales: $x$, $y$, $z$, *red*, *green* y *blue*.

Así como estos casos, hay diversas aplicaciones en donde la geometría multidimensional comienza a ser utilizada. Y partiendo de trabajos previos de rotaciones en casos conocidos 3D y algunos en 4D, en esta investigación se realiza la generalización de las rotaciones generales, aportando las ecuaciones que permitan rotar un objeto en cualquier espacio $n$D.

## 1.5 Definición del Problema

### 1.5.1 Rotaciones Multidimensionales

Para poder rotar un cuerpo en 2D, es necesario contar con 1 punto, que será el eje puntual (cero-dimensional) de rotación. En 3D, es necesario contar con dos puntos no coincidentes que determinan un segmento, cuya línea de soporte define un eje lineal (unidimensional) de rotación. Con esta analogía, en 4D es necesario proporcionar tres puntos no colineales que determinan un triángulo, cuyo plano de soporte será el eje (bidimensional) de rotación. Entonces, en general en el espacio $n$D, es necesario proporcionar ($n$-1) puntos no cohiperplanares (analogía de colineales y coplanares) cuyo hiperplano de soporte será el eje ($n$-2) dimensional de rotación.

Existen las rotaciones principales, que para el caso específico de 3D, se realizan alrededor los ejes principales que forman el espacio, sin embargo, se pueden proporcionar 2 puntos que determinen un segmento arbitrario de rotación.

Lo que se desea encontrar en la presente investigación, son las ecuaciones que permitan hacer rotar un objeto *n*-dimensional alrededor tanto del origen como de cualquier eje (*n*-2)-dimensional de rotación arbitrario.

### 1.5.2 Proyecciones Multidimensionales

Si se desea visualizar fenómenos en *n*D, se debe ser capaz de llevar esta información hasta 3D, que es el espacio que se puede comprender más fácilmente, y si después se desea utilizar como dispositivo de visualización al monitor de la computadora, se tiene que llevar la información a 2D. Para esto es necesario introducir proyecciones.

En general, las proyecciones transforman puntos de un sistema de coordenadas de dimensión *n* hacia puntos de otro sistema de dimensión menor a *n* [Foley 92]. Las proyecciones conocidas formalmente como proyecciones geométricas planares, se dividen en dos clases: paralelas y perspectivas. La principal diferencia entre ellas es que las proyecciones perspectivas dan un efecto realista de la imagen proyectada, pero se pierde la forma exacta y dimensiones del objeto, cosa contraria en la proyección paralela [Anand 93].

Por tanto, para visualizar los fenómenos de las rotaciones multidimensionales, es necesario llevar a cabo un estudio de las proyecciones para poder mostrar los resultados en el monitor de la computadora.

## 1.6 Estado del Problema

El trabajo presentado en [Aguilera 04], propone un método para llevar a cabo rotaciones de objetos *n*-dimensionales no sólo alrededor de los hiperplanos principales, sino también rotaciones alrededor de un hiperplano arbitrario. Pero hace falta, profundizar en este método y reescribirlo formalmente.

En algunos casos, puede resultar más conveniente proporcionar el plano de rotación en lugar del eje ($n$-2)-dimensional de rotación, en este caso, es necesario atacar el problema con un enfoque distinto, el cual permita obtener los mismos resultados, pero proporcionando una información distinta.

Si se desea visualizar los fenómenos en $n$D ($n$>3), es necesario también, generalizar las proyecciones tanto paralelas como perspectivas, que permitan llevar los fenómenos que suceden en $n$D, mediante proyecciones sucesivas, hacia el espacio 2D para visualizarlas en el monitor de la computadora.

Las figuras comúnmente utilizadas en la geometría multidimensional son los politopos regulares, en su representación de modelos de alambres. Para probar los resultados de las rotaciones multidimensionales, se utilizaran los modelos de alambres de los politopos regulares: hipercubo, simplex y politopos cruz.

El modelo de alambres de los politopos pueden ser trazados a partir de sus vértices, los cuales son posible generarlos según la información en [Pérez-Águila 01], sin embargo, el orden en que los vértices deben ser trazados para formar cada una de las aristas es un proceso que no se tiene automatizado aún, por ejemplo, para desplegar un hipercubo 4D, se necesita trazar sus 32 aristas, las cuales corresponden a una línea recta que une a un par de vértices, la pregunta es ¿en qué orden?. Este punto también es necesario resolverlo, ya que será de utilidad para poder generar y trazar politopos $n$D automáticamente y colocarlos en el hiperespacio.

Para poder observar las rotaciones multidimensionales y comenzar a entender lo que está sucediendo, se puede observar el hiperespacio por medio de proyecciones en el monitor de la computadora. Para ello, se propone el desarrollo de un visualizador de rotaciones multidimensionales, que permita realizar cualquier rotación definida, y de esta forma poder observar los fenómenos en el hiperespacio desde diferentes ángulos de visión.

## 1.7 Objetivos

### 1.7.1 Objetivo General

El principal objetivo de esta investigación, consiste en encontrar las ecuaciones para las rotaciones principales que se deben llevar a cabo para simular las rotaciones de politopos *n*D tanto alrededor de un eje (hiperplano) (*n*-2)-dimensional de rotación, como en un plano de rotación dado, y mostrar el resultado a través de proyecciones en el monitor de la computadora.

### 1.7.2 Objetivos Específicos

Los objetivos logrados en esta investigación son:

- En base a la topología de politopos regulares descrita en [Pérez-Águila 03] y [Pérez-Águila 06] se proponen algoritmos para la generación automática de coordenadas y trazo de aristas.
- Se definen las matrices generales de *IDA* y *REGRESO* (matrices necesarias para llevar un objeto *n*-dimensional sobre un hiperplano principal, realizar los giros, y regresar el objeto a su ubicación inicial).
- Se determinan las ecuaciones para las rotaciones multidimensionales cuando se proporciona el plano de rotación en lugar del eje de rotación.

- Se generalizan las matrices de proyección paralela y perspectiva $n\text{D}\rightarrow(n\text{-}1)\text{D}$, partiendo de lo propuesto en [Aguilera 07] para proyecciones 3D→2D utilizando la ecuación paramétrica de la recta.
- Se presenta el desarrollo de un visualizador de rotaciones multidimensionales.

### 1.7.3 Alcances y Limitaciones

- Obtención de las matrices generales de *IDA* y *REGRESO* *n*D.
- Obtención de la matriz general de rotación *n*D alrededor de un eje (*n*-2)-dimensional.
- Obtención de las ecuaciones de rotación en un plano de rotación arbitrario en *n*D.
- Trazo de politopos regulares *n*D de manera automática.
- Observación de los fenómenos de rotación mediante la implementación de un visualizador de rotaciones multidimensionales.
- Para fines de observación de los resultados de rotaciones multidimensionales, se crean y se rotan sólo esqueletos (modelos de alambres) de los politopos regulares *n*D (hipercubo, simplex y politopo cruz).

## 1.8 Estructura de la Tesis

La estructura del presente documento después de este capítulo, es la siguiente:

- **Capítulo 2: Politopos.** Este capítulo presenta un análisis de las propiedades geométricas de los politopos regulares y de algunas analogías para la construcción de politopos de dimensiones superiores. Aquí se presenta la primera aportación de esta investigación, proponiendo algoritmos para generar de forma automática los vértices y el orden en que tienen que ser trazadas las aristas.

- **Capítulo 3: Transformaciones Geométricas.** En este capítulo es un repaso de algunas propiedades geométricas y su extensión a otras dimensiones, poniendo mayor énfasis en la rotación. Al final se presenta otra contribución, que es el desarrollo formal para obtener las matrices generales de *IDA* y *REGRESO*, presentando finalmente, la ecuación para la rotación general alrededor de un hiperplano ($n$-2)-dimensional de rotación arbitrario.
- **Capítulo 4: Rotaciones Multidimensionales con Operaciones Vectoriales.** En este capítulo se analiza el proceso para obtener una ecuación para las rotaciones multidimensionales utilizando un enfoque vectorial, en el cual, en lugar de proporcionar el eje ($n$-2)-dimensional de rotación, se proporciona el plano de rotación. La contribución en este capítulo es, proponer un proceso para poder determinar el plano de rotación en base al eje ($n$-2)-dimensional de rotación dado y viceversa, y de esta forma aplicar cualquier enfoque dada cualquier información.
- **Capítulo 5: Proyecciones.** Este capítulo presenta un análisis de las proyecciones tanto paralelas como perspectivas. Aquí, la contribución es la generalización de las proyección paralela y perspectiva $n$D→($n$-1)D y la propuesta de las matrices de proyección $n$D→2D en un solo paso, cuando se consideran los mismos parámetros en cada proyección sucesiva.
- **Capítulo 6: Visualizador de Rotaciones Multidimensionales.** En este capítulo se describe el desarrollo de un visualizador de rotaciones multidimensionales en el lenguaje de programación Delphi, donde se implementan los algoritmos y ecuaciones presentadas en esta investigación.

- **Capítulo 7: Conclusiones y Trabajo Futuro.** En este capítulo final, se presentan un resumen de los resultados obtenidos en este trabajo, y se plantean posibles líneas de investigación futuras.

## 1.9 Resumen

En este capítulo se presentó una introducción al tema de las dimensiones, y la generalización del espacio Euclidiano a otras dimensiones, además de plantear los objetivos que se persiguen en esta investigación. El siguiente tema a desarrollar, es el análisis de las propiedades geométricas de los politopos regulares *n*D, para poder generar de manera automática su representación en el modelo de alambres.