Capítulo 4

Lógica de Predicados Paraconsistente de C_1^*

En el capítulo anterior se introdujo la lógica proposicional paraconsistente C_1 así como un estudio detallado de algunas propiedades fundamentales, tanto teoremas que comparte con la lógica clásica y las fórmulas que no son demostrables en C_1 pero sí en **Lk**. En este capítulo se detallará el cálculo de predicados de C_1 tanto sin y con igualdad (denotado C_1^* y $C_1^=$) con la motivación de describir una teoría axiomática de conjuntos que permita establecer modelos formales en la descripción de la teoría de la mecánica cuántica, al menos específicamente para poder explicar los efectos de superposición.

En este capítulo se asume por parte del lector un entendimiento elemental de la teoría de cuantificación [18], sin embargo se considera conveniente indicar algunas definiciones elementales. Se considera un lenguaje $\mathscr{L}^*$ de predicados que consta de los símbolos habituales, como los conectivos $\{\rightarrow, \wedge, \vee, \neg, \forall, \exists\}$; un conjunto enumerable de variables individuales $x_1, x_2, \ldots$; un conjunto enumerable o posiblemente vacío de letras funcionales $f_j^n (n, j \geq 1)$; un conjunto enumerable o posiblemente vacío de constantes individuales $a_i (i \geq 1)$; y un conjunto no vacío de letras predicales A_j^n. Esencialmente para las letras funcionales y predicativas el supraíndice indica la cantidad de argumentos que la letra recibe mientras que el subíndice indica un número con el fin de diferenciarse entre otras letras del lenguaje.

4.1. Definiciones Elementales del Cálculo de Predicados

Definición 4.1.1. *([18]) El conjunto de* términos *en $\mathscr{L}^*$ se define de manera inductiva como el conjunto minimal que satisface lo siguiente:*

(i) Las variables y constantes individuales son términos.

(ii) Si f_k^n es una letra funcional y $t_1, \ldots, t_n$ son términos, entonces $f_k^n(t_1, \ldots, t_n)$ es un término.

Definición 4.1.2. *([18]) El conjunto de* fórmulas *en $\mathscr{L}^*$ se define de manera inductiva como el conjunto minimal que satisface lo siguiente:*

(i) Toda fórmula atómica es una fórmula.

(ii) Si α y β son fórmulas y x es una variable, entonces $(\neg\alpha)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $((\forall x)\alpha)$, y $((\exists x)\alpha)$ son fórmulas.

Una de las primeras observaciones es notar que el cuantificador $\exists$ en $\mathscr{L}^*$ no es expresable en términos de $\forall$. La idea intuitiva se relaciona con la imposibilidad de demostrar las leyes de De Morgan en C_1. La prueba formal se mostrará en secciones posteriores.

Definición 4.1.3. *([18]) En $(\forall x)\alpha$ o $(\exists x)\alpha$, α es llamado el* alcance *del cuantificador $(\forall x)$ o $(\exists x)$ respectivamente.*

Definición 4.1.4. *([24]) Sea t un término. El conjunto $FV(t)$ de* variables libres *de t es definido por:*

(i) $FV(x_i) = \{x_i\}$, donde x_i es una variable

(ii) $FV(c_i) = \emptyset$, donde c_i es una constante

(iii) $FV(f(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_n)$, donde f es una función n - aria

Definición 4.1.5. *([24]) Sea φ una fórmula. El conjunto $FV(\varphi)$ de* variables libres *de φ es definido mediante:*

(i) $FV(P(t_1, \ldots, t_p)) = FV(t_1) \cup \cdots \cup FV(t_p)$, *donde* P *es una predicado* p *- ario*

(ii) $FV(\varphi_1 \square \varphi_2) = FV(\varphi_1) \cup FV(\varphi_2)$
$FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$

(iii) $FV(\forall x\varphi) = FV(\exists x\varphi) = FV(\varphi) - \{x\}$

Definición 4.1.6. *([24]) Sea* t *un término. El conjunto* $BV(t)$ *de* variables ligadas de t *es definido por:*

(i) $BV(x_i) = \emptyset$, *donde* x_i *es una variable*

(ii) $BV(c_i) = \emptyset$, *donde* c_i *es una constante*

(iii) $BV(f(t_1, \ldots, t_n)) = BV(t_1) \cup \cdots \cup BV(t_n)$, *donde* f *es una función* n *- aria*

Definición 4.1.7. *([24]) Sea* φ *una fórmula. El conjunto* $BV(\varphi)$ *de* variables ligadas de φ *es definido mediante:*

(i) $BV(P(t_1, \ldots, t_p)) = BV(t_1) \cup \cdots \cup BV(t_p)$, *donde* P *es una predicado* p *- ario*

(ii) $BV(\varphi_1 \square \varphi_2) = BV(\varphi_1) \cup BV(\varphi_2)$
$BV(\neg\varphi) = BV(\varphi)$

(iii) $BV(\forall x\varphi) = BV(\exists x\varphi) = BV(\varphi) \cup \{x\}$

Definición 4.1.8. *Sea* $\mathscr{B}$ *una fórmula y* x *una variable. Decimos que* $\forall x$, $\exists x$ *son* cuantificadores vacíos [1] *de* $(\forall x)\mathscr{B}$ *y* $(\exists x)\mathscr{B}$ *respectivamente, si y sólo si:*

(i) x *no ocurre en* $\mathscr{B}$ *o*

(ii) $x \in BV(\mathscr{B})$

Definición 4.1.9. *([24]) Sea* x *una variable,* t *un término y* φ *un fórmula cualesquiera. Decimos que* t es libre de x *en* φ *si:*

(i) φ *es una fórmula atómica.*

[1] La idea intuitiva de un cuantificador vacío es que esencialmente *falla* al enlazar una variable a una fórmula.

(ii) φ *es una fórmula de la forma* $\varphi_1 \Box \varphi_2$ *y* t *es libre de* x *en* φ_1 *y en* φ_2.
φ *es una fórmula de la forma* $\neg\varphi_1$ *y* t *es libre de* x *en* φ_1.

(iii) φ *es una fórmula de la forma* $(\forall y)\varphi_1$*, y* $x \notin FV((\forall y)\varphi_1)$*, o* $y \notin FV(t)$ *y* t *es libre de* x *En* φ_1.
φ *es una fórmula de la forma* $(\exists y)\varphi_1$*, y* $x \notin FV((\exists y)\varphi_1)$*, o* $y \notin FV(t)$ *y* t *es libre de* x *En* φ_1.

Definición 4.1.10. *A continuación se establecen definiciones esenciales respecto a congruencia:*

(i) *Si* x_i *y* x_j *son variables distintas, decimos que* $\mathscr{A}(x_i)$ *y* $\mathscr{A}(x_j)$ *son* similares *si y sólo si* x_j *es libre de* x_i *en* $\mathscr{A}(x_i)$ *y* $\mathscr{A}(x_i)$ *no tiene ocurrencias libres de* x_j.

(ii) *Sea* φ *una fórmula. Decimos que* $\mathscr{B}$ *es* una fórmula sin cuantificadores vacíos de φ, *denotado* $SC(\varphi)$*, obtenida a partir de* φ *de la siguiente manera:*

(a) *Si* φ *es una fórmula atómica, entonces* $\mathscr{B}$ *es* φ.

(b) *Si* φ *es una fórmula de la forma* $\varphi_1 \Box \varphi_2$*, donde* $\Box \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$*, entonces* $\mathscr{B}$ *es* $SC(\varphi_1)\Box SC(\varphi_2)$.
Si φ *es una fórmula de la forma* $\neg\varphi_1$*, entonces* $\mathscr{B}$ *es* $\neg SC(\varphi_1)$.

(c) *Si* φ *es una fórmula de la forma* $(\forall x)\varphi_1$ *entonces:*

$$\mathscr{B} = \begin{cases} SC(\varphi_1) & \text{si } \forall x \text{ es un cuantificador vacío de } (\forall x)\varphi_1 \\ (\forall x)SC(\varphi_1) & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Si φ *es una fórmula de la forma* $(\exists x)\varphi_1$ *entonces:*

$$\mathscr{B} = \begin{cases} SC(\varphi_1) & \text{si } \exists x \text{ es un cuantificador vacío de } (\forall x)\varphi_1 \\ (\exists x)SC(\varphi_1) & \text{de otra manera} \end{cases}$$

(iii) $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *son* fórmulas congruentes *si y sólo si* $\mathscr{A}$ *y* $\mathscr{B}$ *son similares o* $\mathscr{A}$ *es una fórmula sin cuantificadores vacíos de* $\mathscr{B}$ *[11].*

4.2. El Cálculo de Predicados de C_1^*

Definición 4.2.1. *([7]) Los postulados de C_1^* son los postulados de C_1 agregándo adicionalmente los siguientes, en donde x es una variable, $\varphi(x)$ es una fórmula, ψ es una fórmula que no contiene una ocurrencia libre de x, y d es un término libre de x en $\varphi(x)$ [2]:*

(I) $\forall x\varphi(x) \to \varphi(d)$

(II) $\dfrac{\psi \to \varphi(x)}{\psi \to \forall x\varphi(x)}$

(III) $\varphi(d) \to \exists x\varphi(x)$

(IV) $\dfrac{\varphi(x) \to \psi}{\exists x\varphi(x) \to \psi}$

(V) $\forall x(\alpha(x))^o \to (\forall x\alpha(x))^o$

(VI) $\forall x(\alpha(x))^o \to (\exists x\alpha(x))^o$

(VII) $\alpha \leftrightarrow \beta$*, donde* α *y* β *son fórmulas congruentes.*

Teorema 4.2.1. *La regla de inferencia* Gen *de [18] es demostrable en C_1^**

Demostración. Recordemos que Gen se define como $\dfrac{\beta(x)}{\forall x\beta(x)}$. Se demostrará utilizando una prueba en el sistema de Hilbert:

1. $\beta(x)$ Hipótesis
2. $\beta(x) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to \beta(x))$ (A1)
3. $(\alpha \vee \neg\alpha) \to \beta(x)$ Modus Ponens (1, 2)
4. $(\alpha \vee \neg\alpha) \to \forall x\beta(x)$ (I)
5. $\alpha \vee \neg\alpha$ (A11)

[2]El cálculo de predicados C_1^* difiere del cálculo de predicados en lógica clásica al incluir dos reglas de inferencia relacionadas con los cuantificadores $\forall$ y $\exists$. La razón es similar, como se observa en capítulos anteriores, que algunos conectivos no son expresables en términos habituales de $\to$ y $\neg$, de la misma situación ocurre con $\forall$ y $\exists$.

6. $\forall x \beta(x)$ Modus Ponens (5, 4)

$\square$

Podemos observar que para C_1^* existe un correspondiente *Teorema de Deducción*, es decir $\Gamma, \alpha \vdash_{C_1^*} \beta \Rightarrow \Gamma \vdash_{C_1^*} \alpha \to \beta$ en donde no applicación de la regla Gen haya sido utilizada en donde la variable a cuantificar sea libre en α en el sentido de [18]. Lo anterior se detalle en los resultados siguientes.

Definición 4.2.2. *([18]) Sea $\mathscr{B}$ una fórmula de Γ el cual es un conjunto de fórmulas y tenemos una demostración $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ de Γ junto con una justificación para cada paso de la deducción. Decimos que $\mathscr{A}_i$ depende de $\mathscr{B}$ en una demostración si y solamente si las siguientes condiciones se cumplen:*

(i) $\mathscr{A}_i$ es $\mathscr{B}$ y la justificación es que $\mathscr{A}_i$ pertenece a Γ o

(ii) $\mathscr{A}_i$ es justificado como una consecuencia directa por Modus Ponens, la regla (II), o la regla (IV) de C_1^* por alguna fórmula en la secuencia, donde alguna de estas dependen de $\mathscr{B}$.

Lemma 4.2.2. *([18]) Si $\mathscr{A}$ no depende de $\mathscr{B}$ en una deducción $\Gamma, \mathscr{B} \vdash_{C_1^*} \mathscr{A}$, entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A}$,*

Demostración. La demostración será por inducción en la longitud de la prueba. Sea $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ una demostración donde $\mathscr{A}_n = \mathscr{A}$ de $\Gamma, \mathscr{B}$. Para $\mathscr{A}_1$ es un axioma de C_1^*, o pertenece a $\Gamma, \mathscr{B}$. Como $\mathscr{A}_1$ no depende de $\mathscr{B}$ entonces $\mathscr{A}_1$ no es $\mathscr{B}$, por lo que $\mathscr{A}_1$ es un axioma de C_1^*, o pertenece a Γ, es decir $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A}_1$. Para el caso inductivo asumimos que la proposición es cierta para todas las deducciones de menor longitud que n. Si $\mathscr{A}_n$ pertenece a Γ o es un axioma de C_1^*, entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A}_n$. Si $\mathscr{A}_n$ es una consecuencia directa de una o dos fórmulas por Modus Ponens, regla (II) o regla (IV), como $\mathscr{A}_n$ no depende de $\mathscr{B}$, tampoco las fórmulas que le preciden, ya que estas por hipótesis de inducción son deducibles únicamente de Γ. Por tanto $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A}_n$, lo cual es $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A}$. $\square$

Teorema 4.2.3 (Teorema de Deducción en C_1^*)**.** *Asumimos que en alguna prueba mostrando que $\Gamma, \mathscr{A} \vdash_{C_1^*} \mathscr{B}$, no aplicación de (II) o (IV) a alguna fórmula que dependa de $\mathscr{A}$ tiene como una variable cuantificada una variable libre de $\mathscr{A}$, entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.*

Demostración. La demostración será por inducción en la longitud de la prueba de $\mathscr{B}$. Sea $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_n$ donde $\mathscr{B}_n = \mathscr{B}$.

Caso Base: Si $\mathscr{B}_1$ es un axioma de C_1^* o bien está en Γ, entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_1$ debido a que $\vdash_{C_1^*} \mathscr{B}_1 \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}_1)$ (A1). Si $\mathscr{B}_1$ es $\mathscr{A}$, entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_1$ debido al teorema de identidad.

Caso Inductivo: En este caso distinguimos posibles subcasos.

> Si $\mathscr{B}_n$ es un axioma de C_1^*, está en Γ, o bien $\mathscr{B}_1$ es $\mathscr{A}$ el caso se mantiene por la misma razón que en el caso base.
>
> Asumimos por hipótesis de inducción que existen j y k menor a i tal que $\mathscr{B}_j$ es de la forma $\mathscr{B}_j \to \mathscr{B}_i$. Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_j$ y $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to (\mathscr{B}_j \to \mathscr{B}_i)$. Como en C_1^* tenemos $\vdash_{C_1^*} (\mathscr{A} \to (\mathscr{B}_j \to \mathscr{B}_i)) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}_j) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}_i))$, entonces por dos aplicaciones de Modus Ponens tenemos que $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_i$.
>
> Asumimos or hipótesis de inducción que existe un j menor que i tal que $\mathscr{B}_i$ es $\psi \to (\forall x)\mathscr{B}_j$. Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_j$ y $\mathscr{B}_j$ no depende de $\mathscr{A}$ o x no es una variable libre de $\mathscr{A}$. A partir de esto encontramos dos posibles casos:
>
> > Subsubcaso 1: Si $\mathscr{B}_j$ no depende de $\mathscr{A}$, entonces por el lemma 4.2.2 $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{B}_j$. Como $\vdash_{C_1^*} \mathscr{B}_j \to (\psi \to \mathscr{B}_j)$, entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \psi \to \mathscr{B}_j$, y de la regla (II) entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \psi \to (\forall x)\mathscr{B}_j$, lo cual es $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{B}_i$.
> >
> > Subsubcaso 2: Asumimos x no es una variable libre de $\mathscr{A}$. Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_j$, por la regla (II) entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to (\forall x)\mathscr{B}_j$. Como $\Gamma \vdash_{C_1^*} (\forall x)\mathscr{B}_j \to (\psi \to (\forall x)\mathscr{B}_j)$, entonces $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to (\psi \to \mathscr{B}_j)$ por transitividad. Lo último anterior es finalmente $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_i$.
>
> Asumimos or hipótesis de inducción que existe un j menor que i tal que $\mathscr{B}_i$ es $\exists x \alpha(x) \to \psi$, donde $\mathscr{B}_j$ es de la forma $\alpha(x) \to \psi$. Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_j$ y $\mathscr{B}_j$ no depende de $\mathscr{A}$ o x no es una variable libre de $\mathscr{A}$. A partir de esto encontramos dos posibles casos:
>
> > Subsubcaso 1: Si $\mathscr{B}_j$ no depende de $\mathscr{A}$, entonces por el lemma 4.2.2 $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{B}_j$, lo cual es $\Gamma \vdash_{C_1^*} \alpha(x) \to \psi$. Por la regla (IV) tenemos con lo anterior

que $\Gamma \vdash_{C_1^*} (\exists x)\alpha(x) \to \psi$, lo cual es $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{B}_i$. Como tenemos que $\vdash_{C_1^*} \mathscr{B}_i \to (\mathscr{A} \to \mathscr{B}_i)$, por Modus Ponens se sigue que $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_i$.

Subsubcaso 2: Asumimos x no es una variable libre de $\mathscr{A}$. Por hipótesis de inducción $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_j$, lo cual es $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to (\alpha(x) \to \psi)$. Aplicando swap en lo anterior tenemos $\Gamma \vdash_{C_1^*} \alpha(x) \to (\mathscr{A} \to \psi)$ y por la regla (IV) tenemos $\Gamma \vdash_{C_1^*} (\exists x)\alpha(x) \to (\mathscr{A} \to \psi)$. Aplicando nuevamente swap a lo anterior tenemos $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to ((\exists x)\alpha(x) \to \psi)$, lo cual es $\Gamma \vdash_{C_1^*} \mathscr{A} \to \mathscr{B}_i$.

Con lo anterior, la demostración por inducción está completa.

□

Teorema 4.2.4. $\vdash_{C_1^*} (\forall x(\alpha(x) \to \beta(x))) \to (\forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x))$

Demostración. Se demuestra utilizando una prueba en el sistema de Hilbert:

1. $(\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)))$ Hipótesis
2. $(\forall x(\alpha(x) \to \beta(x))) \to (\alpha(x) \to \beta(x))$ (II)
3. $(\alpha(x) \to \beta(x))$ Modus Ponens (1, 2)
4. $\forall x\alpha(x)$ Hipótesis
5. $(\forall x\alpha(x)) \to \alpha(x)$ (II)
6. $\alpha(x)$ Modus Ponens(4, 5)
7. $\beta(x)$ Modus Ponens(6, 3)
8. $\forall x\beta(x)$ Gen (7)
9. $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)), \forall x\alpha(x) \vdash_{C_1^*} \forall x\beta(x)$ 1-8
10. $\forall x(\alpha(x) \to \beta(x)) \vdash_{C_1^*} \forall x\alpha(x) \to \forall x\beta(x)$ Teorema de Deducción (9)
11. $\vdash_{C_1^*} (\forall x(\alpha(x) \to \beta(x))) \to (\forall x\alpha(x) \to \forall\beta(x))$ Teorema de Deducción (10)

□

Definición 4.2.3. *Sea α una fórmula y sean $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{2}$, ..., $\boldsymbol{k}$, $k \geq 1$, nuevas constantes individuales (nuevas en el sentido que no pertenecen al lenguaje de C_1^*). Definimos una k - transformación de α de la siguiente manera:*
Caso 1: Si α no tiene variables libre, su k - transformación se obtiene reemplazando cada subfórmula de α de la forma $\forall x\beta(x)$ o de la forma $\exists x\beta(x)$ por respectivamente $\beta(\boldsymbol{1}) \wedge \beta(\boldsymbol{2}) \wedge \cdots \wedge \beta(\boldsymbol{k})$ o por $\beta(\boldsymbol{1}) \vee \beta(\boldsymbol{2}) \vee \cdots \vee \beta(\boldsymbol{k})$.
Caso 2: Si α posee variables libres, esto es α es de la forma $\alpha(x_1, \ldots, x_m)$ entonces su k - transformación se obtiene tomando todas las k - transformaciones de $\alpha(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ es cualquier arreglo con repeticiones de rango m de las k expresiones $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{2}$, ..., $\boldsymbol{k}$.

Indicando un ejemplo de la anterior tenemos los siguientes:

(i) Una 2 - transformación de $\forall x p(x)$ es $p(\mathbf{1}) \wedge p(\mathbf{2})$.

(ii) Una 3 - transformación de $\exists x\alpha(x)$ es $\alpha(\mathbf{1}) \vee \alpha(\mathbf{2}) \vee \alpha(\mathbf{3})$

(iii) Una 2 - transformación de $\forall x\alpha(x) \to \neg\exists x\neg\alpha(x)$ es $(\alpha(\mathbf{1}) \wedge \alpha(\mathbf{2})) \to \neg(\neg\alpha(\mathbf{1}) \vee \neg\alpha(\mathbf{2}))$.

Un resultado interesante es observar que si $\Gamma \vdash_{C_1^*} \alpha$, entonces para cualquier k - transformación de α es derivable en C_1 a partir de las k - transformaciones de Γ [7]. Gracias a este resultado nos es posible demostrar lo siguiente:

Teorema 4.2.5. *([11]) En C_1^*, las siguientes fórmulas no son demostrables:*

1. $\neg\exists x\neg\alpha(x) \leftrightarrow \forall x\alpha(x)$
2. $\neg\forall x\neg\alpha(x) \leftrightarrow \exists x\alpha(x)$
3. $\neg\exists x\alpha(x) \leftrightarrow \forall x\neg\alpha(x)$
4. $\exists x\neg\alpha(x) \leftrightarrow \neg\forall x\alpha(x)$

Demostración. Es fácil ver que si tomamos una 2 - transformación de cada fórmula anterior, las fórmulas resultantes no son demostrables en C_1 verificando mediante la valuación $\mathbf{P}^1$ 3.3.1. $\square$

4.3. El Cálculo de Predicados con Igualdad $C_1^=$

Definición 4.3.1. *El cálculo $C_1^=$ se obtiene a partir de C_1^* agregando los siguientes esquemas de axioma:*

(I′) $\forall x(x = x)$

(II′) $x = y \to (\alpha(x) \to \alpha(y))$

Teorema 4.3.1. *En $C_1^=$ se cumple que:*

1. $\vdash_{C_1^=} x = x$
2. $\vdash_{C_1^=} x = y \to y = x$
3. $\vdash_{C_1^=} x = y \wedge y = z \to x = z$

Demostración.

1. Como x es libre de x para toda fórmulas se sigue por (I'), (II) y Modus Ponens que: $\vdash_{C_1^=} x = x$, $\vdash_{C_1^=} \forall x(x = x) \to (x = x)$, entonces $x = x$.

2. Supongamos que $x = y$. Por (II') tenemos que $x = y \to (\alpha(x) \to \alpha(y))$. Si $\alpha(t)$ corresponde a $t = x$ entonces instanciando lo anterior tendríamos $x = y \to (x = x \to y = x)$. Por Modus Ponens de $x = y$ con lo anterior y por (1) tenemos $y = x$. Como la regla (II) ni la regla (IV) no fueron utilizadas durante la deducción, por el teorema de deducción tenemos que $\vdash_{C_1^=} x = y \to y = x$.

3. Supongamos que $x = y$ y $y = z$. Por (I') tenemos con la anterior respectivamente que $\alpha(x) \to \alpha(y)$ y $\alpha(y) \to \alpha(z)$. Nuevamente, si instanciamos $\alpha(t)$ por $x = t$, tenemos en lo anterior que $x = x \to x = y$ y $x = y \to x = z$. Como $x = x$ por (1), aplicando Modus Ponens dos veces en lo anterior tenemos que $x = z$. Como la regla (II) ni la regla (IV) no fueron utilizadas durante la deducción, aplicando dos veces el Teorema de Deducción tenemos que $\vdash_{C_1^=} x = y \wedge y = z \to x = z$.

□

Teorema 4.3.2. *([11]) En $C_1^=$ tenemos que:*

$$\forall t(\alpha(t))^o \vdash_{C_1^=} \alpha(x) \wedge \neg\alpha(y) \to x \neq y$$

donde $x \neq y$ indica $\neg(x = y)$.

Demostración. Notamos por (II) que $\forall t(\alpha(t))^o \vdash_{C_1^=} (\alpha(y))^o$ y por (II') tenemos $x = y \to (\alpha(x) \to \alpha(y))$, de este modo:

$\forall t(\alpha(t))^o, \alpha(x) \wedge \neg\alpha(y), x = y \vdash_{C_1^=} (\alpha(y))^o$, a partir de $\forall t(\alpha(t))^o \vdash_{C_1^=} (\alpha(y))^o$.

$\forall t(\alpha(t))^o, \alpha(x) \wedge \neg\alpha(y), x = y \vdash_{C_1^=} \neg(\alpha(y))$, se sigue de la eliminación de la conjunción de $\alpha(x) \wedge \neg\alpha(y)$.

$\forall t(\alpha(t))^o, \alpha(x) \wedge \neg\alpha(y), x = y \vdash_{C_1^=} \alpha(y)$, se sigue por Modus Ponens de $x = y$ y $x = y \to (\alpha(x) \to \alpha(y))$ y de la eliminación de la conjunción de $\alpha(x) \wedge \neg\alpha(y)$ y Modus Ponens.

Por el teorema de Reductio ad Absurdum desde C_1 se tiene que $\forall t(\alpha(t))^o, \alpha(x) \wedge \neg\alpha(y) \vdash_{C_1^=} \neg(x = y)$, lo cual es $\forall t(\alpha(t))^o, \alpha(x) \wedge \neg\alpha(y) \vdash_{C_1^=} x \neq y$ □

4.4. Aplicaciones del Cálculo de Predicados

Mediante las definiciones anteriores el lenguaje de predicados de C_1^* y $C_1^=$ es posible expresar teorías de primer orden. Por citar algunos ejemplos mencionamos a continuación a la teoría de grupos, orden parcial, y la teoría de grafos mediante la inclusión de axiomas propios de la teoría junto con los axiomas lógicos del lenguaje de predicados.

(i) *Teoría de Grupos.* El lenguaje de la teoría de grupos incluye un predicado binario $=$; dos símbolos funcionales, el primero es una función binaria llamada producto $(*)$ e inverso $(^{-1})$, el cual es una función unaria; y finalmente un símbolo constante denotado como elemento identidad denotado por e. Los axiomas propios de la teoría son:

  (a) $(\forall x, y, z)((x * y) * z = x * (y * z))$

  (b) $(\forall x)(x * e = x \wedge e * x = x)$

  (c) $(\forall x)(x * x^{-1} = e \wedge x^{-1} * x = e)$

El axioma (a) indica la propiedad asociativa para grupos, el axioma (b) indica la existencia de un elemento, denotado en el lenguaje como e, como elemento identidad ya que cualquier elemento del grupo operado con este elemento no se altera, finalmente el axioma (c) indica la existencia de un elemento inverso el cual operado con el elemento original se obtiene el elemento neutro.

(ii) *Orden Parcial.* El lenguaje de un orden parcial posee dos predicados binarios siendo $=$ y $\leq$. Los axiomas propios de la teoría son los siguientes:

(a) $(\forall x)(x \leq x)$

(b) $(\forall x, y, z)(x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$

(c) $(\forall x, y)(x \leq y \wedge y \leq x \leftrightarrow x = y)$

Notamos que el axioma (a) captura la idea que el símbolo de predicado $\leq$ satisface la propiedad de reflexividad. Por otra parte el axioma (b) indica que $\leq$ satisface la propiedad de transitividad mientras que el axioma (c) nos indica la propiedad de antisimetría.

(iii) *Teoría de Grafos.* El lenguaje para una teoría de grafos simple establece la relación mediante *aristas* entre objetos denominados *vértices*. Los axiomas propios correspondientes son los siguientes:

(a) $(\forall x, y)(R(x, y) \rightarrow R(y, x))$

(b) $(\forall x)(\neg R(x, x))$

Estos axiomas describen el comportamiento estructural de un grafo simple. Bajo la interpretación que $R(x, y)$ indica que existe una arista entre los vértices x y y entendemos al axioma (a) que si x y y estan relacionados, de igual manera estarán relacionados y y x, es decir que las aristas son no dirigidas. Finalmente para indicar que un grafo es simple se requiere que cada vértice no se relacione consigo mismo, lo cual queda expresado mediante el axioma (b).

En este capítulo se dieron definiciones necesarias para entender el cálculo de predicados para C_1^* y $C_1^=$. Adicionalmente se indicaron propiedades de interés y formulas no demostrables en este sistemas aludiendo las diferencias con el cálculo de predicados de la lógica clásica. Se finaliza describiendo teorías habituales de primer orden mediante este lenguaje. Algo relevante es notar que estas teorías difieren a las teorías habituales en el sentido de poseer una lógica totalmente distinta, la cual heredarará las propiedades estudiadas de la lógica paraconsistente.

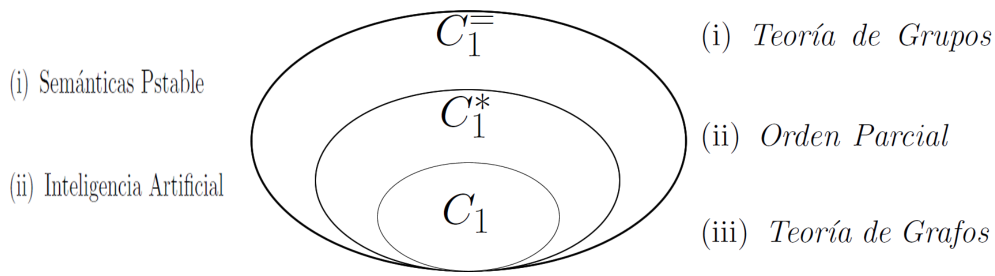

Figura 4.1 Aplicaciones del Lenguaje de Predicados Paraconsistente.