Capítulo 3

La Lógica Proposicional Paraconsistente C_1

En el siguiente capítulo se introduce la lógica paraconsistente C_1 [8] mostrando cuales de las propiedades clásicas se cumplen y cuales no. Se detallan algunas de las pruebas encontradas en [11] agregando resultados encontrados durante las investigaciones realizadas sobre C_1. Para el lector interesado en las motivaciones filosóficas y por un entendimiento más profundo de la lógica C_1 puede encontrar material valioso en [3, 9].

De los resultados de interés encontramos los siguientes: propiedades básicas de C_1, versiones adecuadas de fórmulas y teoremas habituales en C_1, una demostración de la siguiente ley de De Morgan $\vdash_{C_1} \neg(\alpha \wedge \beta) \to \neg\alpha \vee \neg\beta$, fórmulas no demostrables en C_1 mediante la técnica de independencia de axioma, teorema de sustitución válido en C_1, traducción de C_n a lógica clásica y la descripción de una extensión de C_n llamada C_n'.

3.1. El Cálculo Proposicional de C_1

Definición 3.1.1 ([11]). *Sea T una teoría, cuya lógica es L y lenguaje $\mathscr{L}$. Decimos que la lógica L es paraconsistente si T es una teoría inconsistente pero no-trivial.*

En [11] da Costa comienza definiendo una lógica paraconsistente proposicional, denominada C_1 la cual obece las siguientes condiciones:

(i) En C_1 no debe ser generalmente válido el principio de la no contradicción.

(ii) De dos proposiciones contradictorias, no deberá ser siempre posible deducir cualquier proposición cualesquiera (Teorema 2.1.3).

Estos condiciones son las indicadas en **daC1** y **daC2**. En [8] se expone la manera de extender C_1 proposicional a predicados, con y sin igualdad[1]. Para observar los teoremas que comparte C_1 con la lógica clásica [2] se introducirá el sistema axiomático que define a C_1. Antes de ello es necesario definir el siguiente operador (^{o}) el cual denotaremos por *operador de consistencia*.

Definición 3.1.2. *(Operador de Consistencia [8])* $\alpha^o =_{def} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. *Denotaremos a* α^o *como "*α *- consistente".*

Definición 3.1.3. *(Bicondicional)* $\alpha \leftrightarrow \beta =_{def} (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$

La lógica C_1 es una extensión de la lógica positiva **Lp** agregando una negación $\neg$ al lenguaje y los siguientes esquemas de axioma:

(A9) $\beta^o \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$

(A10) $(\alpha^o \wedge \beta^o) \to ((\alpha \wedge \beta)^o \wedge (\alpha \vee \beta)^o \wedge (\alpha \to \beta)^o)$

(A11) $\alpha \vee \neg\alpha$

(A12) $\neg\neg\alpha \to \alpha$

El esquema de axioma (A9) indica una versión debil del esquema de axioma usual $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$, ya que si fuera el caso de agregar el axioma tradicional se deduciría $\vdash_{C_1'} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$[3] (ver apéndice A.0.4). Una observación importante es notar que en C_1 es válido el *teorema de la deducción* ya que posee los esquemas de axioma (A1) y (A2) y como única regla de inferencia *Modus Ponens*.

[1] Condición **daC3** del problema de da Costa

[2] Condición **daC4** del problema de da Costa

[3] Aquí C_1' denota temporalmente la lógica resultante de agregar el esquema de axioma $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ a C_1

3.2. Algunos Teoremas de C_1

Teorema 3.2.1. *([21]) Sea Γ y Δ conjuntos de fórmulas y sean θ, θ_1, θ_2, α y ψ fórmulas arbitrarias. Entonces las siguientes propiedades se cumplen:*

1. $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$ *(Teorema de Identidad)*
2. $\Gamma \vdash \alpha$ *implica* $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$ *(Monotonicidad)*
3. $\Gamma \vdash \alpha$ *y* $\Delta, \alpha \vdash \psi$ *entonces* $\Gamma \cup \Delta \vdash \psi$ *(Corte)*
4. $\Gamma, \theta \vdash \alpha$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \theta \to \alpha$ *(Teorema de Deducción)*
5. $\Gamma \vdash \theta_1 \wedge \theta_2$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \theta_1$ *y* $\Gamma \vdash \theta_2$ *(Regla - $\wedge$)*
6. $\Gamma, \theta \vdash \alpha$ *y* $\Gamma, \neg\theta \vdash \alpha$ *si y sólo si* $\Gamma \vdash \alpha$ *(Demostración por Casos)*

Teorema 3.2.2. $\vdash_{C_1} (\alpha^o \wedge \beta^o) \to (\alpha \leftrightarrow \beta)^o$

Demostración. Aplicando el *teorema de la deducción* basta demostrar que $(\alpha^o \wedge \beta^o) \vdash_{C_1} (\alpha \leftrightarrow \beta)^o$. Como $\vdash_{C_1} (\alpha^o \wedge \beta^o) \leftrightarrow (\beta^o \wedge \alpha^o)$ y debibo a que $(\alpha^o \wedge \beta^o) \to (\alpha \to \beta)^o$ es demostrable en C_1 [4] entonces se tiene tanto $(\alpha^o \wedge \beta^o) \to (\alpha \to \beta)^o$ como $(\beta^o \wedge \alpha^o) \to (\beta \to \alpha)^o$. Aplicando *Modus Ponens* se obtiene $(\alpha \to \beta)^o$ y $(\beta \to \alpha)^o$. Conjuntando lo anterior se obtiene lo que por definición corresponde a $(\alpha \leftrightarrow \beta)^o$. □

Teorema 3.2.3. *(Reductio Ad Absurdum en C_1 [11])*

$$(\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{C_1} \beta), (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{C_1} \neg\beta), (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{C_1} \beta^o) \Rightarrow \Gamma \vdash_{C_1} \neg\alpha$$

Demostración. Usando el *teorema de la deducción* es posible demostrar lo siguiente usando las hipótesis dadas: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta^o$, $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ y $\Gamma \vdash \alpha \to \neg\beta$. Por el teorema de Transitividad (A.0.2) y el esquema de axioma $\vdash \beta^o \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$ tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$. Aplicando el *teorema de la deducción* dos veces tenemos que $\Gamma \vdash \alpha \to \neg\alpha$. De esto, utilizando el teorema 2.1.2 $\vdash \neg\alpha \to \neg\alpha$, y los esquemas de axioma $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$ and $\vdash (\alpha \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to ((\alpha \vee \neg\alpha) \to \neg\alpha))$ podemos concluir que $\Gamma \vdash \neg\alpha$. □

[4] Esto es gracias al axioma (A10) y a que es posible demostrar cada conjuntado de una conjunción por el axioma (A3) y (A4)

Teorema 3.2.4. *([11])* $\vdash_{C_1} \alpha^o \to (\neg\alpha^o)$

Demostración. Es fácil ver que $\alpha^o \cup \{\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha\} \vdash_{C_1} \neg\neg\alpha$, el cual con el esquema de axioma (A12) tenemos $\alpha^o \cup \{\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha\} \vdash_{C_1} \alpha$. Adicionalmente $\alpha^o \cup \{\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha\} \vdash_{C_1} \neg\alpha$ y $\alpha^o \cup \{\neg\alpha \wedge \neg\neg\alpha\} \vdash_{C_1} \alpha^o$. Con esto observamos gracias al teorema **??** que $\alpha^o \vdash_{C_1} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. Aplicando el *teorema de la deducción* a lo anterior finalmente tenemos que $\vdash_{C_1} \alpha^o \to \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$. □

Como observación notamos que únicamente es necesario el esquema de axioma (A10) para extender el operador de consistencia a los demás conectivos del lenguaje de C_1 (teoremas 3.2.2 y 3.2.4)

Como se verá en la siguiente sección existe un número de teoremas demostrables en **Lk** los cuales no son demostrables en C_1. La invariante es que si fuera el caso que tales teoremas fueran demostrables entonces C_1 no satisfacería las condiciones impuestas por da Costa. Un ejemplo claro es observar las leyes de De Morgan, las cuales no todas se cumplen en C_1. A continuación se demuestra la ley de De Morgan que se cumple en C_1 (i.e. $\vdash_{C_1} \neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$). Esta demostración se divide en cuatro partes. En su totalidad aplicando demostración por casos se llegará al resultado deseado.

Lemma 3.2.5. $\alpha^o, \beta^o, \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash_{C_1} \neg\alpha \vee \neg\beta$

Demostración. Se presenta un demostración en el sistema de Hilbert

1. $\neg(\alpha \wedge \beta)$ Hipótesis
2. α^o Hipótesis
3. β^o Hipótesis
4. $\alpha^o \to (\beta^o \to (\alpha^o \wedge \beta^o))$ (A5)
5. $\alpha^o \wedge \beta^o$ Modus Ponens(2, 3, 4)
6. $(\alpha^o \wedge \beta^o) \to (\alpha \wedge \beta)^o$ (A10)
7. $(\alpha \wedge \beta)^o$ Modus Ponens(5, 6)
8. $(\alpha \wedge \beta)^o \to ((\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to ((\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)) \to \neg\beta))$ (A9)

9. $(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to ((\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)) \to \neg\beta)$ Modus Ponens(7, 8)

10. $(\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)) \to ((\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to \neg\beta)$ Swap(9)

11. $\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta))$ (A1)

12. $\beta \to \neg(\alpha \wedge \beta)$ Modus Ponens(1, 11)

13. $(\beta \to (\alpha \wedge \beta)) \to \neg\beta$ Modus Ponens(12, 10)

14. $\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta))$ (A5)

15. $\alpha \to \neg\beta$ Transitividad(14, 13)

16. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ (A12)

17. $\neg\neg\alpha \to \neg\beta$ Transitividad(16, 15)

18. $(\neg\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ Teorema A.0.9

19. $\neg\alpha \vee \neg\beta$ Modus Ponens(17, 18)

□

Lemma 3.2.6. $\alpha^o, \neg(\beta^o), \neg(\alpha \wedge \beta) \vdash_{C_1} \neg\alpha \vee \neg\beta$

Demostración. Se presentará una prueba en el sistema de Hilbert

1. $\neg(\beta^o)$ Hipótesis

2. $\neg(\neg(\beta \wedge \neg\beta))$ Definición (1)

3. $\neg(\neg(\beta \wedge \neg\beta)) \to (\beta \wedge \neg\beta)$ (A12)

4. $\beta \wedge \neg\beta$ Modus Ponens(2, 3)

5. $(\beta \wedge \neg\beta) \to \neg\beta$ (A4)

6. $\neg\beta$ Modus Ponens(4, 5)

7. $\neg\beta \to (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ (A7)

8. $\neg\alpha \vee \neg\beta$ Modus Ponens(6, 7)

□

Como observación notamos que para las demostraciones de $\neg(\alpha^o), \beta^o, \neg(\alpha\wedge\beta) \vdash_{C_1} \neg\alpha \vee \neg\beta$ y $\neg(\alpha^o), \neg(\beta^o), \neg(\alpha\wedge\beta) \vdash_{C_1} \neg\alpha \vee \neg\beta$ es muy similar a la prueba presentada en 3.2.6 ya que sólo es necesario observar que para cualquier φ se tiene que $\neg(\varphi)^o \vdash_{C_1} \varphi \wedge \neg\varphi$. La demostración es directa a partir del axioma (A12) y la defininción de 3.1.2.

Teorema 3.2.7. $\vdash_{C_1} \neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta$

Demostración. Utilizando los Lemmas 3.2.5, 3.2.6 y resultados subsecuentes se tiene que

$$\alpha^o, \beta^o \vdash_{C_1} (\neg(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{3.1}$$

$$\alpha^o, \neg(\beta^o) \vdash_{C_1} (\neg(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{3.2}$$

$$\neg(\alpha^o), \beta^o \vdash_{C_1} (\neg(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{3.3}$$

$$\neg(\alpha^o), \neg(\beta^o) \vdash_{C_1} (\neg(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{3.4}$$

Usando (3.1) y (3.3) utilizando demostración por casos se tiene

$$\beta^o \vdash_{C_1} (\neg(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{3.5}$$

De manera similar usando (3.2) y (3.4) se tiene

$$\neg(\beta^o) \vdash_{C_1} (\neg(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{3.6}$$

Finalmente, utilizando demostración por casos en (3.5) y (3.6) se tiene que $\vdash_{C_1} (\neg(\alpha \wedge \beta)) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta)$ como se deseaba. □

3.3. Algunas Fórmulas no Demostrables en C_1

La importancia de observar la existencia de fórmulas demostrables en **Lk** que no se cumplen en C_1 verifican que esta última lógica presenta ciertas restricciones a la usual lógica clásica. A continuación se presentarán un conjunto de axiomas no demostrables en C_1 ya que estos resultan ser independientes, por lo cual se exhibirá la correspondiente tabla de verdad mutivaluada.

Teorema 3.3.1. *([8]) Las siguientes fórmulas no se cumplen en C_1 :*

1. $\neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$
2. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$
3. $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$
4. $\alpha \to \neg\neg\alpha$
5. $(\alpha \leftrightarrow \neg\alpha) \to \beta$
6. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
7. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Demostración. El resultado se sigue de observar la siguiente valuación para C_1, donde 1 y 2 son los valores designados:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	3	1
1	2	1	1	1
2	2	1	1	1
3	2	1	3	1
1	3	3	3	1
2	3	3	3	1
3	3	1	3	3

α	$\neg\alpha$
1	3
2	1
3	1

□

Cabe mencionar que la valuación anteriormente presentada ha sido ampliamente estudiada, principalmente en [4, 16] la cual por su relevancia recibe el nombre de $\mathbf{P}^1$. Se utilizará posteriormente esta valuación para fines de estudiar el comportamiento de ciertas jerarquías paraconsistentes.

Teorema 3.3.2. *En C_1 los siguientes esquemas no son válidos:*

1. $(\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$
2. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
3. $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$
4. $\alpha \to (\neg\alpha \to \alpha^o)$

Demostración. Se mostrará que cada fórmula anterior no puede ser demostrable en C_1 ya que si lo fuera se violaría alguna restricción indicada en C_1:

1. Supongamos que $\vdash_{C_1} (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$. Como en C_1 tenemos $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$ (esquema (A6)) entonces por transitividad con lo anterior tenemos que $\vdash_{C_1} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$, lo cual no es demostrable en C_1. Contradicción, por tanto $\nvdash_{C_1} (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta)$.

2. Supongamos que $\vdash_{C_1} (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$. Debido al axioma (A1) de C_1 tenemos $\vdash_{C_1} \neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$. Por transitividad tenemos que $\vdash_{C_1} \neg\alpha \to (\alpha \to \beta)$, la cual es no demostrable en C_1. Contradicción, de esto se sigue que $\nvdash_{C_1} (\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

3. Supongamos que $\vdash_{C_1} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$. En particular de lo anterior en C_1 tendríamos que $\vdash_{C_1} ((\neg\beta) \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg(\neg\beta))$. En C_1 debido al axioma (A1) y (A12) se sigue que $\vdash_{C_1} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$, lo cual no es demostrable en C_1. Contradicción, por tanto $\nvdash_{C_1} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

4. Supongamos que $\vdash_{C_1} \alpha \to (\neg\alpha \to \alpha^o)$. Usando dos veces el Teorema de la Deducción en lo anterior tenemos $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1} \alpha^o$. En C_1 se tiene por el esquema de axioma (A9) $\vdash_{C_1} \alpha^o \to ((\neg\beta \to \alpha) \to ((\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta))$ y por Modus Ponens se sigue que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1} (\neg\beta \to \alpha) \to ((\neg\beta \to \neg\alpha) \to \neg\neg\beta)$. En C_1 gracias al esquema de axioma (A1) en C_1 se tiene $\vdash_{C_1} \alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$, por Modus Ponens con la premisa α se llega a $\vdash_{C_1} \neg\beta \to \alpha$, el cual por Modus Ponens nuevamente se tiene $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1} (\neg\beta \to \alpha) \to \neg\neg\beta$. De manera similar por el esquema de axioma (A1) y la premisa $\neg\alpha$ se tiene que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1} \neg\neg\beta$. Finalmente, ya que en C_1 se tiene el esquema de axioma (A12), por Modus

Ponens con la anterior y dos aplicaciones del Teorema de la Deducción se sigue que $\vdash_{C_1} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ el cual no es válido en las restricciones de C_1. Contradicción, de esto se sigue que $\nvdash_{C_1} \alpha \to (\neg\alpha \to \alpha^o)$.

$\square$

Es importante mencionar que muchas de las propiedades habituales, como asociatividad, distributividad y conmutatividad, no son válidas en C_1 bajo la negación (Teorema A.0.10). De esta observación, en particular se aprecia que $\nvdash_{C_1} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha) \leftrightarrow \neg(\neg\alpha \wedge \alpha)$ tal como se hace notar en [16]. Estos resultados indican la posibilidad que en C_1 no existe como tal un Teorema de Sustitución (Teorema A.0.5). En la siguiente sección se indicarán versiones más débiles a la definición habitual del Teorema de Sustitución que se cumplen en C_1.

3.4. Teorema de Sustitución en C_1

La sustitución en una sistema formal es invaluable en muchos sentidos. Desde una perspectiva sintáctica se observa en [19] que una lógica se entiende por un conjunto de fórmulas cerradas bajo Modus Ponens y Sustitución. El teorema de sustitución resulta una herramienta de mucha utilidad ya que muchos resultados pueden encontrarse de manera elegante y concisa. De gran importancia es notar la diferencia entre *Sustitución* (definición 2.1.4) y el *Teorema de Sustitución* (teorema A.0.5). El primero es válido para toda lógica porque esencialmente lidia con aspectos generales del *lenguaje* de una lógica mientras que el segundo corresponde a la naturaleza axiomática del sistema lógico. Este principio a su vez no siempre se satisface como se observa en la definición A.0.1.

Como se observa en el teorema A.0.5, específicamente en el Sub - Caso 2, el teorema es demostrable en **Lk** ya que la lógica se tiene que $\vdash_{\mathbf{Lk}} (\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \leftrightarrow \neg\beta)$ lo cual no se cumple en C_1 (teorema 3.3.2). Se observará en la siguiente sección que si se quisiera extender a C_1 con el Teorema de Sustitución, la lógica resultado no sería paraconsistente. A continuación se muestran algunas condiciones para que exista una *versión adecuada* del Teorema de Sustitución en C_1.

Teorema 3.4.1. *(Teorema de Normalidad) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ las variables atómicas de la fórmula α. En C_1 tenemos que:*

$$\alpha_1^o, ..., \alpha_n^o \vdash \alpha^o$$

Demostración. Por inducción sobre la longitud de la fórmula.

1. Caso Base: Supongamos α es una variable atómica. Trivialmente $\alpha^o \vdash \alpha^o$

2. Paso inductivo:

   a) Sub - Caso 1: Suponemos que α es de la forma $\beta\Box\gamma$, donde $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Por hipótesis inductiva tenemos que

   $$\alpha_1^{'o}, \ldots, \alpha_n^{'o} \vdash \beta^o$$

   $$\alpha_1^{''o}, \ldots, \alpha_n^{''o} \vdash \gamma^o$$

   Por tanto $\{\alpha_1^{'o}, ..., \alpha_n^{'o}\} \cup \{\alpha_1^{''o}, ..., \alpha_n^{''o}\} \vdash \beta^o \wedge \gamma^o$. Pero las variables atómicas de α corresponde a la unión de las variables atómicas de β y γ. En C_1 es válido $\beta^o \wedge \gamma^o \rightarrow (\beta\Box\gamma)^o$ (A10). Entonces, $\{\alpha_1^{'o}, ..., \alpha_n^{'o}\} \cup \{\alpha_1^{''o}, ..., \alpha_n^{''o}\} \vdash (\beta\Box\gamma)^o$, lo cual es lo mismo que $\alpha_1^o, ..., \alpha_n^o \vdash (\beta\Box\gamma)^o$

   b) Sub - Caso 2: Supongamos que α es de la forma $(\neg\beta)$. La demostración de este sub-caso es análogo al anterior, utilizando el hecho que en C_1 $\vdash \beta^o \rightarrow (\neg\beta)^o$ es demostrable (Teorema 3.2.4).

□

Teorema 3.4.2. *([8]) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ las variables atómicas de la fórmula α. Para que $\vdash_{\boldsymbol{Lk}} \alpha$ una condición necesaria y suficiente es que $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} \alpha$.*

Demostración. Se demostrará primero la dirección derecha del bicondicional. Como $(A1)^+$ y $(A2)^+$ se encuentran en C_1 sólo es necesario verificar el axioma $(A3)^+$ en C_1 bajo estas condiciones. Si $\vdash_{\mathbf{Lk}} \alpha$ sabemos que existe una demostración P tal que sólo ocurren las variables atómicas de α. En C_1 tenemos $\vdash_{C_1} \beta^o \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow$

$\neg\beta) \to \neg\alpha))$, por monotonía tenemos $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} \beta^o \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))$ y gracias al teorema 3.4.1 $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} \beta^o$. Realizando Modus Ponens se tiene que $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} (\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$. Gracias al esquema de axioma $\vdash_{C_1} \neg\neg\alpha \to \alpha$ se obtiene $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} (\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$. Para la demostración de la dirección izquierda del bicondicional es facil observa que si $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} \alpha$, aplicando n veces el Teorema de la Deducción se tiene $\vdash_{C_1} \alpha_1^o \to (\cdots \to (\alpha_n^o \to \alpha)\ldots)$. Como C_1 es un subcálculo de **Lk** [8] entonces $\vdash_{\mathbf{Lk}} \alpha_1^o \to (\cdots \to (\alpha_n^o \to \alpha)\ldots)$. Como en **Lk** es demostrable $\vdash_{\mathbf{Lk}} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ A.0.8 aplicando n veces Modus Ponens con cada $\neg(\alpha_i \wedge \neg\alpha_i)$ $i = 1, \ldots, n$ se llega a $\vdash_{\mathbf{Lk}} \alpha$. □

Corolario 3.4.2.1. *Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ las variables atómicas de la fórmula $\alpha \leftrightarrow \beta$. En C_1 se cumple que $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} \alpha \leftrightarrow \beta$ implica $\alpha_1^o, \ldots, \alpha_n^o \vdash_{C_1} \psi[\alpha/p] \leftrightarrow \psi[\beta/p]$ [5].*

Demostración. Demostración directa a partir de teorema 3.4.2. □

3.5. Negación Fuerte de C_1

Por lo resultados anteriores es claro observar que C_1 es un sub-cálculo de **Lk** ya que existen fórmulas demostrables en **Lk** que no lo son en C_1. Naturalmente la diferencia entre las dos lógicas se hace notar en la propiedades que cumplen cada negación. En esta sección se mostrará que existe una manera de poder retomar el poder expresivo de **Lk** en C_1 a través de un conectivo adicional, el cual es definido usando los conectivos en C_1, al cual denotaremos como *negación fuerte* de C_1.

Definición 3.5.1. *(Negación Fuerte de C_1 [8])* $\neg^*\alpha =_{def} \neg\alpha \wedge \alpha^o$

Teorema 3.5.1. *([8]) En C_1 son demostrables las siguientes fórmulas:*

1. $\alpha \to (\neg^*\alpha \to \beta)$ *Principio de Explosión*
2. $\alpha \vee \neg^*\alpha$ *Tercero Excluso*

Demostración. 1. Se observa que en C_1 es fácil observar que $\alpha, \neg\alpha \wedge \alpha^o, \neg\beta \vdash_{C_1} \alpha$, $\alpha, \neg\alpha \wedge \alpha^o, \neg\beta \vdash_{C_1} \neg\alpha$ y $\alpha, \neg\alpha \wedge \alpha^o, \neg\beta \vdash_{C_1} \alpha^o$. Por el teorema 3.2.3 se

[5] Es decir, se cumple el Teorem de Sustitución 2.1.4

sigue que $\alpha, \neg\alpha \wedge \alpha^o \vdash_{C_1} \neg\neg\beta$. Adicionalmente en C_1 se tiene el esquema de axioma (A12) $\vdash_{C_1} \neg\neg\alpha \to \alpha$. De lo anterior y Modus Ponens se tiene que $\alpha, \neg\alpha \wedge \alpha^o \vdash_{C_1} \beta$. Usando el Teorema de la Deducción en lo anterior se tiene que $\vdash_{C_1} \alpha \to ((\neg\alpha \wedge \alpha^o) \to \beta)$. Sustituyendo por la definición 3.5.1 en lo anterior se tiene que $\vdash_{C_1} \alpha \to (\neg^*\alpha \to \beta)$ como se desea.

2. Por definición $\vdash_{C_1} (\alpha \vee \neg^*\alpha) \leftrightarrow (\alpha \vee (\neg\alpha \wedge \alpha^o))$. Aplicando distributividad de $\vee$ sobre $\wedge$ se tiene que $\vdash_{C_1} (\alpha \vee \neg^*\alpha) \leftrightarrow ((\alpha \vee \neg\alpha) \wedge (\alpha \vee \alpha^o))$. Como en C_1 se tiene el esquema de axioma (A11) entonces $\vdash_{C_1} (\alpha \vee \neg^*\alpha) \leftrightarrow (\alpha \vee \alpha^o)$. Por lo tanto para demostrar $\vdash_{C_1} \alpha \vee \neg^*\alpha$ una condición necesaria y suficiente es que $\vdash_{C_1} \alpha \vee \alpha^o$. Se demostrará lo último. Es fácil ver que:

$$\alpha^o \vdash_{C_1} \alpha \vee \alpha^o \tag{3.7}$$

Por otra parte por la definición 3.1.2 se tiene que $\vdash_{C_1} (\neg(\alpha^o)) \leftrightarrow (\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)))$. Gracias al esquema de axioma (A12) se obtiene de lo anterior que $\vdash_{C_1} (\neg(\alpha^o)) \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$, en particular $\vdash_{C_1} (\neg(\alpha^o)) \to \alpha$. Usando el Teorema de la Deducción se obtiene de la anterior $\neg(\alpha^o) \vdash_{C_1} \alpha$. *Debilitando* lo anterior se llega a:

$$\neg(\alpha^o) \vdash_{C_1} \alpha \vee \alpha^o \tag{3.8}$$

Finalmente utilizando demostración por casos de (3.7) y (3.8) se tiene que $\vdash_{C_1} \alpha \vee \alpha^o$, con lo cual $\vdash_{C_1} \alpha \vee \neg^*\alpha$ como se deseaba.

$\square$

Teorema 3.5.2. *Los conectivos $\{\to, \wedge, \vee, \neg^*\}$ en C_1 satisfacen todas los esquemas de axioma y las reglas de inferencia de **Lk**.*

Demostración. Como los axiomas (A1) y (A2) de C_1 se encuentran en **Lk** ($(A1)^+$ y $(A2)^+$ respectivamente) sólo es necesario encontrar una demostración para $(A3)^+$. Sabemos que $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\beta \to \neg\alpha) \to \alpha)$ y $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ son *intercambiables*, entonces se demostrará en C_1 que $\vdash_{C_1} (\neg^*\beta \to \neg^*\alpha) \to (\alpha \to \beta)$.

1. $\neg^*\beta \to \neg^*\alpha$ Hipótesis

2. α Hipótesis

3. $\alpha \to (\neg^*\alpha \to \beta)$ Por el Teorema 3.5.1
4. $\neg^*\alpha \to \beta$ Modus Ponens (2, 3)
5. $\neg^*\beta \to \beta$ Transitividad (1, 4)
6. $\beta \to \beta$ Teorema de Identidad
7. $(\beta \to \beta) \to ((\neg^*\beta \to \beta) \to ((\beta \vee \neg^*\beta) \to \beta))$ (A8)
8. $(\neg^*\beta \to \beta) \to ((\beta \vee \neg^*\beta) \to \beta)$ Modus Ponens (6, 7)
9. $(\beta \vee \neg^*\beta) \to \beta$ Modus Ponens (5, 8)
10. $\beta \vee \neg^*\beta$ Por el Teorema 3.5.1
11. β Modus Ponens (10, 9)
12. $\neg^*\beta \to \neg^*\alpha \vdash_{C_1} \alpha \to \beta$ Teorema de Deducción [1-11]
13. $\vdash_{C_1} (\neg^*\beta \to \neg^*\alpha) \to (\alpha \to \beta)$ Teorema de Deducción [1-12]

$\square$

3.6. Posibles Extensiones de C_1

Una extensión de una lógica L_1 en el sentido de [19] es una lógica L_2 tal que si $\vdash_{L_1} \varphi$ entonces $\vdash_{L_2} \varphi$. Naturalmente una extensión puede obtenerse al agregarse un conjunto de fórmulas a la lógica original. Observemos que la lógica **Lk** resulta ser una extensión de la lógica C_1, ya que basta agregar como esquema de axioma $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ a C_1 para obtener a **Lk**. En esta sección nuestro interés es sobre extensiones paraconsistentes de C_1.

En [9] se describe una extensión paraconsistente de C_1 conocida como C_1^+ en donde se reemplaza el esquema de axioma (A10) por el siguiente esquema de axioma:

$$(A10)^+ \quad (\alpha^o \vee \beta^o) \to ((\alpha \wedge \beta)^o \wedge (\alpha \vee \beta)^o \wedge (\alpha \to \beta)^o)$$

Se observa que en C_1^+ para *propagar* la consistencia de las fórmulas sólo es necesario que exista una subfórmula consistente. Aunque C_1^+ todavía no logra cumplir el Teorema de Sustitución, ciertamente es posible demostrar un mayor número de fórmulas que C_1, por instancia $\vdash_{C_1^+} \neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ mientra que $\nvdash_{C_1} \neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ [3]. Otra parte interesante de las investigaciones de tesis fue analizar de las propiedades habituales extensiones de C_1 que no resultan ser paraconsistentes. A continuación se enseñan algunas de estas:

Teorema 3.6.1. *Sea una lógica $C_1^{'}$ la extensión de C_1 que cumple con el Teorema de Sustitución. Se sigue que $C_1^{'}$ no es una extensión paraconsistente de C_1.*

Demostración. Supongamos que $C_1^{'}$ es paraconsistente. Es fácil de ver que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1'} \alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)$. Gracias al Teorema de Sustitución tenemos que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1'} \neg\alpha \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, el cual por la definición 3.1.2 se tiene que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1'} \neg\alpha \leftrightarrow \alpha^o$. Aplicando Modus Ponens a lo anterior y por idempotencia en $\wedge$ se tiene que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1'} \alpha^o$. Aplicando dos veces el Teorema de la Deducción en lo anterior se sigue que $\vdash_{C_1'} \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \alpha^o)$, el cual no es válido en C_1 (Teorema 3.3.2) ya que con tal proposición se deriva el principio de explosión. Contradicción, por tanto $C_1^{'}$ no es una extensión paraconsistente de C_1. □

Teorema 3.6.2. *Sea $C_1^{''}$ una extensión de la lógica C_1 agregándosele la siguiente ley de De Morgan: $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta)$. Se sigue que $C_1^{''}$ no es una extensión paraconsistente de C_1.*

Demostración. Supongamos que $C_1^{''}$ es una extensión paraconsistente. Tomando un caso particular del nuevo esquema de axioma se tiene que $\vdash_{C_1''} (\neg\alpha \vee \neg(\neg\alpha)) \rightarrow \neg(\alpha \wedge (\neg\alpha))$. Por la definición 3.1.2 lo anterior corresponde a $\vdash_{C_1''} (\neg\alpha \vee \neg(\neg\alpha)) \rightarrow \alpha^o$. Debido a que en $C_1^{''}$ se tiene el esquema de axioma (A11) en particular $\vdash_{C_1''} \neg\alpha \vee \neg(\neg\alpha)$, por Modus Ponens con lo anterior se llega a $\vdash_{C_1''} \alpha^o$. Por monotonía se tiene que $\alpha, \neg\alpha \vdash_{C_1''} \alpha^o$. Aplicando dos veces el Teorema de la Deducción a lo anterior se obtiene $\vdash_{C_1''} \alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \alpha^o)$ el cual no es válido desde C_1 (Teorema 3.3.2). Contradicción, por lo tanto $C_1^{''}$ no es una extensión paraconsistente de C_1. □

Teorema 3.6.3. *Sea $C_1^{'''}$ una extensión de la lógica C_1 agregándosele el siguiente esquema de axioma: $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$. Se sigue que $C_1^{'''}$ es una extensión paraconsistente de C_1.*

Demostración. El resultado se sigue de observar la siguiente valuación para C_1''', donde los valores designados son 1 y 2.

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	1
0	2	2	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
1	2	1	1	1
2	0	0	0	1
2	1	1	1	1
2	2	1	1	1

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0
2	2

Con la valuación anterior puede verificarse que $\nvdash_{C_1'''} \neg(\alpha\wedge\neg\alpha)$ y $\nvdash_{C_1'''} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$.

□

3.7. La Jerarquía C_n

En [10] da Costa introdujo una familia de lógicas paraconsistentes a partir de C_1 la cual denominó como la jerarquía C_n.

$$C_0, C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots, C_\omega$$

En donde la lógica C_ω, cual sólamente consta de los esquemas de axioma (A1)-(A8) y (A11)-(A12) de C_1, se indica como aparente *límite* de esta jerarquía. Sin embargo, en [6] se aclaran razones por la cual C_ω representa un *límite inferior* y no un *límite deductivo*. Previo a su definición es necesario introducir definiciones necesarias las cuales se presentan a continuación.

Definición 3.7.1. *([10]) Se realiza una definición recursiva para α^n:*

(i) $\alpha^0 =_{def} \alpha$

(ii) $\alpha^{n+1} =_{def} (\alpha^n)^o$

Definición 3.7.2. *(Operador de n-consistencia [10]) Se realiza una definición recursiva para $\alpha^{(n)}$:*

(i) $\alpha^{(1)} =_{def} \alpha^1$

(ii) $\alpha^{(n+1)} =_{def} \alpha^{(n)} \wedge \alpha^{n+1}$

Finalmente los cambios radicales entre cada lógica son fundamentalmente sobre los esquemas de axioma (A9) y (A10) de modo siguiente:

$(A9)^n$ $\beta^{(n)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$

$(A10)^n$ $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \vee \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \rightarrow \beta)^{(n)})$

Existen propiedades interesantes en esta jerarquía de lógicas. Una de ellas es que, como en C_1, puede definirse una *negación* fuerte para cada C_i. Correspondientemente existe una manera de expresar la negación clásica de **Lk** a partir de la negación fuerte de la jerarquía de C_n.

Definición 3.7.3. *(Negación Fuerte de C_n [8])* $\neg^{(n)}\alpha =_{def} \neg\alpha \wedge \alpha^{(n)}$

Lemma 3.7.1. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que* $\neg(\alpha^n) \vdash_{C_\omega} \alpha$

Demostración. Por inducción sobre n.

Caso Base (n = 1). De acuerdo con la definición 3.7.1 tenemos que $\neg(\alpha^1) \vdash_{C_\omega} \neg(\alpha^o)$. Del mismo modo, por la definición 3.1.2 lo anterior puede expresarse como $\vdash_{C_\omega} \neg(\alpha^o) \leftrightarrow \neg(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$. Por lo tanto $\neg(\alpha^1) \vdash_{C_\omega} \neg(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$. Como en cada C_ω se tiene el esquema de axioma (A12) $\vdash_{C_\omega} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ de Modus Ponens con lo anterior se sigue que $\neg(\alpha^1) \vdash_{C_\omega} \alpha \wedge \neg\alpha$. Como en C_ω se tiene el esquema de axioma (A3) $\neg(\alpha^1) \vdash_{C_\omega} \alpha$ como se desea.

Paso Inductivo. Asumimos por hipótesis de inducción que $\neg(\alpha^n) \vdash_{C_\omega} \alpha$. De acuerdo con la definición 3.7.1 tenemos que $\neg(\alpha^{n+1}) \vdash_{C_\omega} \neg(\alpha^n)^o$, lo cual es $\vdash_{C_\omega} \neg(\alpha^n)^o \leftrightarrow \neg\neg(\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n))$. De esto es fácil demostrar que $\neg(\alpha^{n+1}) \vdash_{C_\omega} \neg(\alpha^n)$, y por transitividad con la hipótesis inductiva se tiene que $\neg(\alpha^{n+1}) \vdash_{C_\omega} \alpha$ □

Lemma 3.7.2. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que* $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^n$

Demostración. Podemos que ver que $\alpha^n \vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^n$. Por otra parte, debido al lemma 3.7.1 tenemos que $\neg(\alpha^n) \vdash_{C_\omega} \alpha$, por tanto $\neg(\alpha^n) \vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^n$. Aplicando demostración por casos tenemos que $\vdash \alpha \vee \alpha^n$ □

Lemma 3.7.3. *Para toda $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^{(n)}$*

Demostración. Por inducción sobre n.

Caso base (n = 1). A partir del lemma 3.7.1 tenemos que $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^o$, lo cual es $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^{(n)}$ para $n = 1$.

Paso Inductivo. Asumimos por hipótesis de inducción $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^{(n)}$. Gracias al lemma 3.7.2 tenemos que $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^{n+1}$. Entonces $\vdash_{C_\omega} (\alpha \vee \alpha^{(n)}) \wedge (\alpha \vee \alpha^{n+1})$. Aplicando la ley distributiva de $\wedge$ sobre $\vee$ en lo anterior tenemos que $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee (\alpha^{n+1} \wedge \alpha^{(n)})$, lo cual es por definición $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^{(n+1)}$. □

Teorema 3.7.4 (Tercero Excluso)**.** *En C_ω, tenemos que $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \neg^{(n)}\alpha$*

Demostración. En C_ω tenemos lo siguiente:

$$\vdash_{C_\omega} (\alpha \vee \neg^{(n)}\alpha) \leftrightarrow (\alpha \vee (\alpha \wedge \alpha^{(n)}))$$

$$\vdash_{C_\omega} (\alpha \vee \neg^{(n)}\alpha) \leftrightarrow (\alpha \vee \neg\alpha) \wedge (\alpha \vee \alpha^{(n)})$$

$$\vdash_{C_\omega} (\alpha \vee \neg^{(n)}\alpha) \leftrightarrow \alpha \vee \alpha^{(n)}$$

Por tanto una condición necesaria y suciente para $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \neg^{(n)}\alpha$ es que $\vdash_{C_\omega} \alpha \vee \alpha^{(n)}$, pero lo anterior es cierto gracias al lemma 3.7.3. □

Teorema 3.7.5 (Reductio Ad Absurdum)**.** *En C_n tenemos que:*

$$(\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta), (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \neg\beta), (\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta^{(n)}) \Rightarrow \Gamma \vdash \neg\alpha$$

Demostración. Similar al teorema 3.2.3. □

Teorema 3.7.6 (Explosive Principle)**.** *En C_n tenemos que:*

$$\vdash_{C_n} \alpha \rightarrow (\neg^{(n)}\alpha \rightarrow \beta)$$

Demostración. De acuerdo con la definición 3.7.3: $\alpha, \neg^{(n)}\alpha, \neg\beta \vdash_{C_n} \neg\alpha \wedge \alpha^{(n)}$, por tanto $\alpha, \neg^{(n)}\alpha, \neg\beta \vdash_{C_n} \neg\alpha$; $\alpha, \neg^{(n)}\alpha, \neg\beta \vdash_{C_n} \alpha^{(n)}$ y $\alpha, \neg^{(n)}\alpha, \neg\beta \vdash_{C_n} \alpha$. Con lo anterior y por el teorema 3.7.5 es fácil ver que $\alpha, \neg^{(n)}\alpha \vdash_{C_n} \neg\neg\beta$. Debido a que en C_n posee el esquema de axioma (A12) y Modus Ponens podemos demostrar que $\alpha, \neg^{(n)}\alpha \vdash_{C_n} \beta$. Finalmente, aplicando dos veces el Teorema de la Deducción en lo anterior tenemos que$\vdash_{C_n} \alpha \to (\neg^{(n)}\alpha \to \beta)$. □

Teorema 3.7.7. *Los conectivos $\{\to, \wedge, \vee, \neg^*\}$ en C_n satisfacen todas los esquemas de axioma y las reglas de inferencia de **Lk**.*

Demostración. Cualquier lógica en C_n extendiende los esquemas de axioma de C_ω. Por tanto, sólo es necesario observar que en C_n se tiene $(\neg^{(n)}\alpha \to \neg^{(n)}\beta) \to (\beta \to \alpha)$:

1. $\neg^{(n)}\alpha \to \neg^{(n)}\beta$	Hipótesis
2. β	Hipótesis
3. $\beta \to (\neg^{(n)}\beta \to \alpha)$	Teorema 3.7.6
4. $\neg^{(n)}\beta \to \alpha$	Modus Ponens(2, 3)
5. $\neg^{(n)}\alpha \to \alpha$	Transitividad(1, 4)
6. $\alpha \to \alpha$	Teorema de Identidad
7. $(\alpha \to \alpha) \to ((\neg^{(n)}\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \vee \neg^{(n)}\alpha) \to \alpha))$	(A8)
8. $(\neg^{(n)}\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \vee \neg^{(n)}\alpha) \to \alpha)$	Modus Ponens(6, 7)
9. $(\alpha \vee \neg^{(n)}\alpha) \to \alpha$	Modus Ponens (5, 8)
10. $\alpha \vee \neg^{(n)}\alpha$	Teorema 3.7.4
11. α	Modus Ponens (9, 10)
12. $\neg^{(n)}\alpha \to \neg^{(n)}\beta, \beta \vdash_{C_n} \alpha$	1-11
13. $\neg^{(n)}\alpha \to \neg^{(n)}\beta \vdash_{C_n} \beta \to \alpha$	Teorema de Deducción (12)
14. $\vdash_{C_n} (\neg^{(n)}\alpha \to \neg^{(n)}\beta) \to (\beta \to \alpha)$	Teorema de Deducción (13)

□

Es de particular interés observar que conforme la cadena de lógicas disminuye su poder expresivo, esto es, que para cada lógica C_i las demás lógicas siguientes a éste se encuentran contenidas en C_i. En [11] se construyen una generalización de la valuación presentada en el teorema 3.3.1 para mostrar que lo anterior mencionado. A continuación se definirá la valuación construida en [11] (llamada T_n) y se mostrar propiedades que cumple para observar con claridad el objetivo de la prueba principal.

Definición 3.7.4. *(Valuaciones T_n [11]) Sea T_1 la valuación definida en el teorema 3.3.1 ($\boldsymbol{P}^1$). Se presenta una definición recursiva para la valuación T_n correspondiente a la lógica C_n en la cual se agrega el valor $n+2$ cómo único valor no designado a partir de la valuación T_{n-1}.*

(1) Conjunción: Si los conjuntados tienen valuaciones distintos, la conjunción de ambos será el mayor valor de los conjuntados; si los valores son iguales, este será la valuación de la conjunción.

(2) Disyunción: Si los disyuntos tienen valuaciones distintas, la disyunción de ambos será el menor valor de los disyuntados; si los valores son iguales, este será la valuación de la disyunción.

(3) Implicación: Si las valuaciones son distintas, la implicación tomará el valor del consecuente; si son iguales, el valor de la implicación será de 1.

Para la negación, da Costa definió la siguiente valuación de T_n:

α	1	2	3	...	n	$n+1$	$n+2$
$\neg\alpha$	$n+2$	1	2	...	$n-1$	n	1

Es necesario resaltar que las reglas anteriores se refieren a nuevos arreglos de valores, del cual resulta de agregar un nuevo valor. Sin embargo no se realizan cambios en la nuevas tablas respecto a los valores ya obtenidos por las valuaciones de orden $n-1$ o menor. Con estas valuaciones da Costa demostró que cada C_i contiene propiamente a C_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots$. A continuación se presenta una caracterización del operador de negación, el operador de consistencia y el operador de n-consistencia para las lógicas de la jerarquía C_n.

Definición 3.7.5. *Para T_n tenemos que:*

$$v_n(\neg\alpha) = \begin{cases} n+2 & si\ v_n(\alpha) = 1 \\ 1 & si\ v_n(\alpha) = n+2 \\ v_n(\alpha) - 1 & De\ otra\ manera \end{cases}$$

Lemma 3.7.8. *Para T_n tenemos que $v_n(\alpha) = v_n(\alpha \wedge \neg\alpha)$ si $v_n(\alpha) \in \{3, ..., n+1\}$ y $n \geq 2$.*

Demostración. Por inducción sobre n.

Caso Base (n = 2): Usando T_1 tenemos que v_1:

α	$\neg\alpha$	$\alpha \wedge \neg\alpha$	$\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$
1	3	3	1
2	1	1	3
3	1	3	1

Paso Inductivo: Asumimos $v_n(\alpha) = v_n(\alpha \wedge \neg\alpha)$ en T_n por hipótesis de inducción. Por otra parte, en T_{n+1} podemos ver que $v_{n+1}(\neg\alpha) = v_{n+1}(\alpha) - 1$ debido a la definición 3.7.5. Podemos ver que cualquier conjunción entre α y $\neg\alpha$ la valuación en v_{n+1} tendrá los mismos valores que v_n ya que ninguno de las valuaciones incluye al valor no-designado. Es decir $v_{n+1}(\alpha \wedge \neg\alpha) = v_n(\alpha \wedge \neg\alpha)$, y gracias a la hipótesis inductiva tenemos $v_{n+1}(\alpha \wedge \neg\alpha) = v_n(\alpha)$. En este intervalo de valores $v_n(\alpha) = v_{n+1}(\alpha)$, por tanto $v_{n+1}(\alpha \wedge \neg\alpha) = v_{n+1}(\alpha)$ como se desea. □

Lemma 3.7.9. *En T_n tenemos que:*

$$v_n(\alpha^o) = \begin{cases} 1 & si\ v_n(\alpha) = 1 \\ n+2 & si\ v_n(\alpha) = 2 \\ v_n(\neg\alpha) & De\ otra\ manera \end{cases}$$

Demostración. Por casos: Caso $v_n(\alpha) = 1$. A partir de la definición 3.7.5 tenemos que $v_n(\neg\alpha) = n+2$. La nueva regla de conjunción aplica en la conjunción de α y $\neg\alpha$ ya que se encuentra el nuevo valor. Por tanto $v_n(\alpha \wedge \neg\alpha) = n+2$. Regresando a la definición 3.7.5 podemos ver que $v_n(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = 1$.

Caso $v_n(\alpha) = 2$. De la definición 3.7.5 tenemos que $v(\neg\alpha) = 1$. Los valores 1 y 2 pertenecen al conjunto original de valores en T_1, por tanto la conjunción para estos valores obecen a la valuación T_1, $v_n(\alpha \wedge \neg\alpha) = 1$. Aplicando nuevamente la definición 3.7.5 podemos ver que $v_n(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = n + 2$.

Caso $v_n(\alpha) \neq 1, 2$. SubCaso $v_n(\alpha) = n + 2$. De la definición 3.7.5 tenemos que $v_n(\neg\alpha) = 1$. La nueva regla de conjunción aplica en la conjunción de α y $\neg\alpha$ ya que se encuentra el nuevo valor. Por tanto $v_n(\alpha \wedge \neg\alpha) = n + 2$. Finalmente regresando a la definición 3.7.5 vemos que $v_n(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = 1 = v_n(\neg\alpha)$

SubCaso $v_n(\alpha) \in \{3, 4, ..., n + 1\}$. Si $n = 1$ sólo debemos verifica en T_1. Si $n \geq 2$ entonces por el lemma 3.7.8 vemos que $v_n(\alpha \wedge \neg\alpha) = v_n(\alpha)$. Por tanto $v_n(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = v_n(\neg\alpha)$ como se desea. $\square$

Lemma 3.7.10. *Para T_n tenemos que*

$$v_n(\alpha^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \textit{if } v_n(\alpha) = 1 \textit{ ó } v_n(\alpha) = n + 2 \\ n + 2 & \textit{De otra manera} \end{cases}$$

Demostración. Por casos:

Caso $v_n(\alpha) = 1$. Gracias al lemma 3.7.9 tenemos que $v_n(\alpha^o) = 1$. Observamos el operador de consistencia mapea de 1 a 1. Por tanto $v_n(\alpha^o) = 1$ para cualquier n. Adicionalmente, la conjunción $v_n(\alpha^0 \wedge \alpha^o \wedge \cdots \wedge \alpha^{o \ldots o})$ únicamente involucra al valor 1. Por tanto sólo usando la valuación T_1 se determina el valor de la conjunción, el cual resulta en 1.

Caso $v_n(\alpha) = n{+}2$. A partir del lemma 3.7.9 podemos ver que $v_n(\alpha^o) = v_n(\neg\alpha) = 1$. También notamos que en este caso $v_n(\alpha^{(n)}) = 1$ por las mismas razones que el caso anterior.

Caso $v_n(\alpha) \neq 1, n{+}2$. Subcaso $v_n(\alpha) = 2$. Del lemma 3.7.9 tenemos $v_n(\alpha^o) = n{+}2$. Podemos ver que $v_n(\alpha^{(n)}) = n + 2$ debido a que $v(\alpha^o)$ involucra al nuevo valor $n + 2$ y la nueva regla para la conjunción se aplica, escogiendo como valor resultante $n + 2$.

Subcaso $v_n(\alpha) \in \{3, 4, ..., n + 1\}$. Notamos que en este caso $v_n(\alpha^o) = v_n(\neg\alpha) = v_n(\alpha) - 1$. Si $v_n(\alpha) = \lambda$ entonces necesitamos $(\lambda - 2) - \textit{aplicaciones}$ del operador de consistencia para evaluar a 2, es decir $v_n(\alpha^{\overbrace{o \cdots o}^{\lambda - 2}}) = 2$. En la siguiente aplicación se obtendría el valor $n{+}2$ de acuerdo con el lemma 3.7.9. Por tanto, el mayor valor de T_n se encuentra en algún conjuntado de $\alpha^o \wedge \alpha^{oo} \wedge ... \wedge \alpha^{\overbrace{o \cdots o}^{n}}$. Por tanto $v_n(\alpha^{(n)}) = n{+}2$ como se desea. $\square$

Lemma 3.7.11. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que* $\nvdash_{C_n} \alpha^n$

Demostración. Por casos:

Caso $n = 1$. Sólo es necesario verificar T_1.

Caso $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Se mostrará que si $v_n(\alpha) = n + 1$ entonces $v_n(\alpha^n) = n + 2$. Si $v_n(\alpha) = n + 1$ entonces $v_n(\alpha^o) = v_n(\neg\alpha) = v_n(\alpha) - 1$ de acuerdo al lemma 3.7.9 y definición 3.7.5. Para evaluar a 2 se necesitan $(n - 1) -$ *aplicaciones* del operador de consistencia. En la siguiente aplicación del operador de consistencia se evaluará a $n+2$ de acuerdo al lemma 3.7.9. Por tanto se necesitan $n-$*aplicaciones* para evaluar al único valor no-designado en T_n, es decir $v_n(\alpha^n) = n + 2$ como se desea. □

Lemma 3.7.12. $\vdash_{C_n} \alpha^{n+1}$

Demostración. Podemos ver que $\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n) \vdash_{C_n} \alpha^{(n)}$ debido al lemma A.0.13. Debido a A.0.12 tenemos $\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n) \vdash_{C_n} \alpha^{n-1} \wedge \neg(\alpha^{n-1})$. De lo anterior, en particular $\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n) \vdash_{C_n} \neg(\alpha^{n-1})$. Debido al lemma A.0.11 tenemos que $\vdash_{C_n} \neg(\alpha^{n-1}) \rightarrow (\alpha \wedge \neg\alpha)$, por lo tanto $\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n) \vdash_{C_n} (\alpha \wedge \neg\alpha)$. Finalmente utilizando el teorema 3.7.5 tenemos $\vdash_{C_n} \neg(\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n))$, lo cual es $\vdash_{C_n} \alpha^{n+1}$. □

Lemma 3.7.13. $\vdash_{C_{n+1}} x$ *implica que* $\vdash_{C_n} x$

Demostración. Sólo es necesario verificar que $(A9)^{n+1}$ y $(A10)^{n+1}$ son demostrables en C_n

Se demostrará que $\vdash_{C_n} \beta^{(n+1)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta))$

1. $\beta^{(n)} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta))$ — $(A9)^n$
2. $\beta^{(n+1)}$ — Hipótesis
3. $\beta^{(n+1)} \leftrightarrow (\beta^{n+1} \wedge \beta^{(n)})$ — Definición 3.7.2
4. $(\beta^{n+1} \wedge \beta^{(n)}) \rightarrow \beta^{(n)}$ — (A4)
5. $\beta^{(n)}$ — Transitividad (3, 4) y Modus Ponens with 2
6. $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta))$ — Modus Ponens(5, 1)

Se demostrará que $\vdash_{C_n} (\alpha^{(n+1)} \wedge \beta^{(n+1)}) \rightarrow (\alpha\Box\beta)^{(n+1)}$, donde $\Box \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

1. $(\alpha^{(n+1)} \wedge \beta^{(n+1)})$ Hipótesis
2. $(\alpha^{(n+1)} \wedge \beta^{(n+1)}) \to \alpha^{(n+1)}$ (A3)
3. $(\alpha^{(n+1)} \wedge \beta^{(n+1)}) \to \beta^{(n+1)}$ (A4)
4. $\alpha^{(n+1)}$ Modus Ponens(1, 2)
5. $\beta^{(n+1)}$ Modus Ponens(1, 3)
6. $\alpha^{(n+1)} \leftrightarrow (\alpha^{n+1} \wedge \alpha^{(n)})$ Definición 3.7.2
7. $\beta^{(n+1)} \leftrightarrow (\beta^{n+1} \wedge \beta^{(n)})$ Definición 3.7.2
8. $\alpha^{n+1} \wedge \alpha^{(n)}$ Modus Ponens(4, 6)
9. $\beta^{n+1} \wedge \beta^{(n)}$ Modus Ponens(5, 7)
10. $(\alpha^{n+1} \wedge \alpha^{(n)}) \to \alpha^{(n)}$ (A4)
11. $(\beta^{n+1} \wedge \beta^{(n)}) \to \beta^{(n)}$ (A4)
12. $\alpha^{(n)}$ Modus Ponens(8, 10)
13. $\beta^{(n)}$ Modus Ponens(9, 11)
14. $\alpha^{(n)} \to (\beta^{(n)} \to (\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}))$ (A5)
15. $\beta^{(n)} \to (\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)})$ Modus Ponens(12, 14)
16. $\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}$ Modus Ponens(13, 15)
17. $(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha \Box \beta)^{(n)}$ $(A10)^n$
18. $(\alpha \Box \beta)^{(n)}$ Modus Ponens(16, 17)
19. $(\alpha \Box \beta)^{n+1}$ Lemma 3.7.12
20. $(\alpha \Box \beta)^{(n)} \to ((\alpha \Box \beta)^{n+1} \to ((\alpha \Box \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \Box \beta)^{n+1}))$ (A5)
21. $(\alpha \Box \beta)^{n+1} \to ((\alpha \Box \beta)^{(n)} \wedge (\alpha \Box \beta)^{n+1})$ Modus Ponens(18, 20)

22. $(\alpha\Box\beta)^{(n)} \wedge (\alpha\Box\beta)^{n+1}$ Modus Ponens(19, 21)

23. $(\alpha\Box\beta)^{(n+1)}$ Definition 3.7.2(22)

$\square$

Teorema 3.7.14. *Para toda $i = 1, 2, ...,$ tenemos que*

$$C_{i+1} \subset C_i$$

Demostración. Solamente es necesario verificar que las siguientes condiciones se cumplen:

1. Para cada fórmula x tal que $\vdash_{C_{n+1}} x$ entonces $\vdash_{C_n} x$. Ver lemma 3.7.13.

2. Existe una valuación sonora para cada C_n, en este caso T_n (teorema A.0.15), en donde existe una fórmula x tal que $\vdash_{C_n} x$ y $\nvdash_{C_{n+1}} x$, por instancia vemos que $\vdash_{C_n} \alpha^{n+1}$ y $\nvdash_{C_{n+1}} \alpha^{n+1}$ por el lemma 3.7.12

$\square$

3.8. Una Jerarquía Adicional

A lo largo de la investigación de tesis se encontró que es posible encontrar otras jerarquías posibles a C_n. En esta sección se describe una jerarquía que llamamos C_n^D en donde esencialmente a cada cálculo de C_n se agrega el siguiente esquema de axioma: $\alpha \to \neg\neg\alpha$. Consecuentemente se demuestra que esta jerarquía de lógicas es paraconsistente. El método de prueba es similar al anterior de C_n, sólo que se realizaron cambios respectivos en la lógica de nucleo es decir, se cambió a $\mathbf{P}^1$ por $\mathbf{P}^2$ [16] la cual se definirá a continuación y se realizó una ligera modificación a la negación para la valuación correspondiente a cada cálculo.

Definición 3.8.1. *([16]) Sea $\boldsymbol{P}^2$:*

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	3	1
1	2	1	1	1
2	2	1	1	1
3	2	1	3	1
1	3	3	3	1
2	3	3	3	1
3	3	1	3	3

α	$\neg\alpha$
1	3
2	2
3	1

En donde los valores designados son 1 y 2.

Definición 3.8.2. *Sea C_1^D la extensión de C_1 agregando el siguiente esquema de axioma:*

$(A12)^D \quad \alpha \to \neg\neg\alpha$

Naturalmente definimos C_n^D de la misma forma que C_n.

Definición 3.8.3. *Definimos la valuación de T_n^D de forma recursiva de la siguiente manera:*
Caso Base: T_1^D es $\boldsymbol{P^2}$.
Caso Inductivo: T_n^D se obtiene de la valuación de T_{n-1}^D agregando un nuevo valor $n+2$ el cual es el único valor no designado de T_n^D el cual cumple las siguientes reglas:

(1) Conjunción: De la misma forma que T_n (3.7.4).

(2) Disyunción: De la misma forma que T_n (3.7.4).

(3) Implicación: De la misma forma que T_n (3.7.4).

Para la negación se define la siguiente valuación de T_n^D:

α	1	2	3	...	n	$n+1$	$n+2$
$\neg\alpha$	$n+2$	2	2	...	$n-1$	n	1

Utilizando estas definiciones y la valuación T_n^D se demostrará que existe un comportamiento similar en T_n^D a T_n respecto a los operadores de consistencia y n - consistencia. La prueba sobre la jerarquía de C_n^D se sigue de manera similar que en la anterior prueba presentada para C_n.

Lemma 3.8.1. *En T_n^D tenemos que $v_n(\alpha) = v_n(\alpha \wedge \neg\alpha)$ si $v_n(\alpha) \in \{3, \ldots, n+1\}$ y $n \geq 2$.*

Demostración. Por inducción sobre n:
(Caso Base $n = 2$) Sólo es necesario revisar la valuación T_2^D.
(Paso Inductivo) Asumimos $v_n(\alpha) = v_n(\alpha \wedge \neg\alpha)$ por hipótesis de inducción. Observamos dos posibles casos:

(1) Caso $v_{n+1}(\alpha) \in \{3, \ldots, n+2\}$. En este caso, como T_{n+1}^D es obtenido de T_n^D, tenemos que $v_{n+1}(\alpha) = v_{n+1}(\alpha \wedge \neg\alpha)$ debido a la hipótesis de inducción.

(2) Caso $v_{n+1}(\alpha) = n+3$. Si $v_{n+1}(\alpha) = n+3$ entonces $v_{n+1}(\neg\alpha) = 1$. Como la nueva de para la conjunción se aplica entonces $v_{n+1}(\alpha \wedge \neg\alpha) = n+3$, lo cual es $v_{n+1}(\alpha)$, por tanto $v_{n+1}(\alpha) = v_{n+1}(\alpha \wedge \neg\alpha)$.

□

Lemma 3.8.2. *En $T_n^{'}$ tenemos que:*

$$v_n(\alpha^o) = \begin{cases} 1 & \textit{if } v_n(\alpha) = 1 \\ n+2 & \textit{if } v_n(\alpha) = 2 \\ v_n(\neg\alpha) & \textit{De otra manera} \end{cases}$$

Demostración. Por casos:
Caso $v_n(\alpha) = 1$. Si $v_n(\alpha) = 1$ entonces $v_n(\neg\alpha) = n+2$. Como la nueva regla para la conjunción es aplicada tenemos que $v_n(\alpha \wedge \neg\alpha) = n+2$. De esto $v_n(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = 1$, lo cual es $v_n(\alpha^o) = 1$.
Caso $v_n(\alpha) = 2$. Si $v_n(\alpha) = 2$ entonces $v_n(\neg\alpha) = 2$. Revisando la valuación $\mathbf{P}^2$ podemos ver que $v_n(\alpha \wedge \neg\alpha) = 1$, de esto último tenemos que $v_n(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = n+2$, lo cual es $v_n(\alpha^o) = 1$.
Caso $v_n(\alpha) = n+2$. Si $v_n(\alpha) = n+2$ entonces $v_n(\neg\alpha) = 1$. La nueva regla para la

conjunción se aplica, por lo que $v_n(\alpha \wedge \neg\alpha) = n+2$. De esto $v_n(\alpha^o) = 1$ como en el caso $v_n(\alpha) = 1$. Pero también $v_n(\neg\alpha) = 1$, así que $v_n(\alpha^o) = v_n(\neg\alpha)$ como se desea.
Caso $v_n(\alpha) \in \{3, \dots, n+1\}$. Si $n = 1$ sólo es suficiente revisar T_1^D. Para $n \geq 2$ podemos ver por el lemma 3.8.1 que $v_n(\alpha) = v_n(\alpha \wedge \neg\alpha)$, entonces $v_n(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) = v_n(\neg\alpha)$, lo cual es $v_n(\alpha^o) = v_n(\neg\alpha)$ como se esperaba. □

Lemma 3.8.3. *En T_n' tenemos que:*

$$v_n(\alpha^{(n)}) = \begin{cases} 1 & \textit{if } v_n(\alpha) = 1 \textit{ or } v_n(\alpha) = n+2 \\ n+2 & \textit{De otra manera} \end{cases}$$

Demostración. Por casos:
Caso $v_n(\alpha) = 1$. Debido al lemma 3.8.2 $v_n(\alpha^o) = 1$ se observa que el operador de consistencia mapea de 1 a 1. Adicionalmente, la conjunción $v_n(\alpha^o \wedge \cdots \wedge \alpha^n)$ sólamente involucra al valor 1. Utilizando T_1^D podemos ver que lo último evalúa a 1.
Caso $v_n(\alpha) = n+2$. Gracias al lemma 3.8.2 $v_n(\alpha^o) = v_n(\neg\alpha) = 1$. Por tanto $v_n(\alpha^{(n)}) = 1$ debido al mismo razonamiento del caso anterior.
Caso $v_n(\alpha) = 2$. Podemos ver que $v_n(\alpha^{(n)}) = n+2$, debido a que $v_n(\alpha^o)$ involucra el nuevo valor no designado $n+2$.
Caso $v_n(\alpha) \in \{3, \dots, n+1\}$. Debido al lemma 3.8.2 $v_n(\alpha^o) = v_n(\alpha) - 1$. Sea $v_n(\alpha) = \lambda$; applicando $(\lambda - 2) - \textit{veces}$ el operador de consistencia a α obtenemos $v_n(\alpha^{\lambda-2}) = 2$. En la próxima aplicación del operador de consistencia a lo último tenemos $v_n(\alpha^{\lambda-1}) = n+2$ debido al lemma 3.8.2. Entonces $n+2$ es involucrado en la conjunción $\alpha^o \wedge \cdots \wedge \alpha^n$. Por tanto $v_n(\alpha^{(n)}) = n+2$. □

En este capítulo se estudiaron propiedades de C_1 tanto sus alcances como limitaciones, en el sentido de describir extensiones a esta lógica que resultan paraconsistentes y también las que dejan de serlo. Se discuten propiedades habituales para distintas lógicas y se observa el comportamiento de estos teoremas en C_1. El capítulo finaliza describiendo una jerarquía de lógicas paraconsistentes basadas en C_1 las cuales como característica particular son estrictamente más debiles que sus antecesoras, las cuales podrían ser de utilidad para aplicaciones específicas, en donde el grado de n - consistencia sea relevante.

Como observación relacionado a la jerarquía de lógicas en C_n observamos que estos sistemás, aunque cada vez se debilitan conforme el avanza la jerarquía, se obtiene por otra parte una mayor *seguridad* en la consistencia de la información. Como pudimos observar para que una fórmula en lógica clásica sea demostrable en C_1 es cuestión de agregar cada variable atómica de la fórmula con el operador de consistencia como vimos en el teorema 3.4.2. Por otra parte para cada cálculo en C_n se requiere, de manera similar agregar a cada variable atómica con el operador de n - consistencia, por lo que computacionalmente es más costoso. Ideas de como esta dan una intuición de mayor seguridad ante la posibilidad de encontrar explosividad en el razonamiento.