Capítulo 2

Preliminares

El objetivo principal del siguiente capítulo es proveer al lector de definiciones básicas en lógica matemática para que los resultados del trabajo de tesis sean entendibles. Este capítulo expone las definiciones de lenguaje formal, sistemas axiomáticos, lógicas multivaluadas y propiedades generales de la lógica.

Debido a que gran parte de la tesis es estudiar distintas familias de lógicas se hace una pequeña referencia en como denotar extensiones de las mismas. Al final de este capítulo se incluye una pequeña introducción a la lógica paraconsistente y nociones filósificas del porqué de estas lógicas y la relevancia actual. Para mayor información el lector puede consultar los capítulos 1 y 2 de [18, 19] respectivamente.

2.1. Definiciones Básicas de Lógica

El objetivo principal de la lógica matemática es entender un sistema lógico desde el punto de vista matemático. Esto representa la comprensión de la estructura misma del sistema, como lo es su *lenguaje* y *relaciones* que se cumplen dentro del sistema, así como también los alcances y limitaciones de la misma. Es importante observar que, como objeto de estudio, el lenguaje utilizado para estudiar un sistema lógico se diferencía del lenguaje definido en el objeto. A lo largo del documento de tesis se utilizará nuestro *metalenguaje* mediante el lenguaje cotidiano y el *lenguaje* de un sistema lógico mediante símbolos previamente definidos con el objetivo de hacer clara las diferencias entre ambos.

De manera general, un *lenguaje proposicional* $\mathscr{L}$ se define mediante un conjunto numerable (contable) de *variables proposicionales* o *variables atómicas* y un conjunto finito de *conectivos lógicos* de diferentes aridades, es decir $\mathscr{L} = \{f_1^{n_1}, ..., f_k^{n_k}\}$. Una *constante proposicional* es un conectivo de aridad 0. Se le llama variable atómica con la finalidad de denotar un sentido de no descomposición, es decir, estas variables no pueden ser expresadas en el lenguaje de ninguna otra manera mas que por sí mismas. A oposición de esto encontramos *reglas de formación* que permite *combinar* un número arbitrario de variables atómicas mediante los conectivos lógicos para generar *fórmulas* que también se encuentran dentro del lenguaje. Por instancia tenemos al lenguaje de la *lógica positiva*, donde encontramos los operadores binarios usuales de disyunción, conjunción e implicación, $\mathscr{L}^+ = \{\vee^2, \wedge^2, \rightarrow^2\}$. Se le llama positiva ya que no se incluye el operador de la negación, $\neg^1$, o en su defecto no posee a la constante proposicional $\perp$. Se observará que para ciertas lógicas tener una o la otra manera de expresar la negación de una fórmula son equivalentes [19]. Como observación en el formalismo de [19] se menciona indicar la aridad de los conectivos mediante supraíndices; en este trabajo de tesis se tiene por convención agregar los supraíndices la primera vez que sean definidos los conectivos en el lenguaje, siendo omitidos en desarrollos subsecuentes con la finalidad de lograr una notación clara siempre y cuando no se presenten posibles ambigüedades.

Las reglas de formación para este lenguaje son mediante una definición *inductiva*, esto es dada una fórmula en el lenguaje se indican todas las maneras de como obtender fórmulas válidas mediante el usuo de los conectivos. Resumiendo lo anterior a continuación se expresa el lenguaje de la lógica positiva en el sentido de [24]:

Definición 2.1.1. *Las fórmulas del lenguaje de la lógica proposicional $\mathscr{L}^+$, denotado $\mathscr{L}^+_{PROP}$, es el menor conjunto tal que:*

(i) *p_i pertenece a $\mathscr{L}^+_{PROP}$ $(i \in \mathbb{N})$, siendo p_i una variable atómica.*

(ii) *Si α y β se encuentran en $\mathscr{L}^+_{PROP}$, entonces $(\alpha \vee \beta), (\alpha \wedge \beta), (\alpha \rightarrow \beta)$ también se encuentran en $\mathscr{L}^+_{PROP}$.*

Ejemplo 2.1.1. *Sea $\{a, b, c, ...\}$ el conjunto de variables atómicas para $\mathscr{L}^+_{PROP}$.*

1. *Debido a que a y b son fórmulas de $\mathscr{L}^+_{PROP}$ entonces $(a \vee b)$ es una fórmula de $\mathscr{L}^+_{PROP}$.*

2. *Debido a que* c *y* $(a \vee b)$ *son fórmulas de* $\mathscr{L}^{+}_{PROP}$ *entonces* $(c \rightarrow (a \vee b))$ *es una fórmula de* $\mathscr{L}^{+}_{PROP}$.

Observando los ejemplos y de acuerdo a la definición 2.1.1 observamos que existe un procedimiento efectivo para verificar si una fórmula se encuentra dentro del lenguaje de $\mathscr{L}^{+}_{PROP}$ [18]. Verificar que una fórmula no se encuentra en $\mathscr{L}^{+}_{PROP}$ resulta un problema más complicado, por instancia observamos que $((a \vee \vee)$ no se encuentra en lenguaje de $\mathscr{L}^{+}_{PROP}$ del ejemplo 2.1.1. Podemos razonar de tal manera dado que $((a \vee \vee)$ no es una fórmula *bien formada*. Para un demostración formal de lo anterior se puede consultar la sección de Apéndices (A.0.1).

Una lógica, además de un lenguaje proposicional posee una estructura que lo define mediantes *reglas de inferencia*. Una regla de inferencia R_i es una relación entre fórmulas del lenguaje [18]. Específicmente cada regla de inferencia R_i posee una cantidad arbitraria j de fórmulas tales que para cada conjunto de j fórmulas y cada fórmula $\mathscr{A}$ se puede determinar si las j fórmulas están en la relación R_i con respecto a $\mathscr{A}$. Si ese fuese el caso decimos que $\mathscr{A}$ es una consecuencia directa de las j fórmulas en virtud de R_i. Existen muchas reglas de inferencia, algunas de estas son [25]:

Reglas de Inferencia	Nombre de la regla
$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$, $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$	Simplificación
$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$, $\dfrac{\beta}{\alpha \vee \beta}$	Adición
$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$	Conjunción
$\dfrac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$	*Modus Ponens*
$\dfrac{\neg\beta \quad \alpha \rightarrow \beta}{\neg\alpha}$	*Modus Tollens*
$\dfrac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$	Silogismo hipotético
$\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\alpha}{\beta}$	Silogismo disyuntivo
$\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \neg\alpha \vee \gamma}{\beta \vee \gamma}$	Resolución
$\dfrac{\alpha \vee \beta \quad \alpha \rightarrow \gamma \quad \beta \rightarrow \gamma}{\gamma}$	Dilema

2.1.1. Definiciones Recursivas

Como observamos en la definición 2.1.1 es posible definir un concepto mediante una definición inductiva. Un concepto relacionado para definir un objeto es mediante *definiciones recursivas* el cual, como se muestra [24], es equilavente con la definición inductiva. Por otra parte, las definiciones recursivas permiten definir conceptos de una manera más intuitiva en el sentido propio del concepto como subfórmulas, rango, longitud de fórmula, entre otros [1].

Teorema 2.1.1. *[Definición de Recursividad [24]] Sean $H_\Box : A^2 \to A$ un mapeo dado y sea H_{atom} un mapeo del conjunto de variables atómicas al conjunto A, por tanto existe un mapeo único $F : \mathscr{L}^+_{PROP} \to A$ tal que:*

(i) $F(\varphi) = H_{atom}(\varphi)$ *si* φ *es una variable atómica*

(ii) $F((\varphi \Box \psi)) = H_\Box(F(\varphi), F(\psi))$

A continuación se muestran unos ejemplos de definiciones recursivas que serán de utilidad durante el trabajo de tesis:

Definición 2.1.2. *([24]) El* rango $r(\varphi)$ *de una fórmula esta definido como:*

(i) $r(\varphi) = 0$ *si* φ *es una variable atómica*

(ii) $r((\varphi \Box \psi)) = max(r(\varphi), r(\psi)) + 1$

Definición 2.1.3. *([24]) El* conjunto de subfórmulas $Sub(\varphi)$ *esta dado por:*

(i) $Sub(\varphi) = \{\varphi\}$ *si* φ *es atómico*

(ii) $Sub((\varphi \Box \psi)) = Sub(\varphi) \cup Sub(\psi) \cup \{\varphi \Box \psi\}$

Decimos que una fórmula φ' es subformula de φ si $\varphi' \in Sub(\varphi)$. Adicionalmente una fórmula p es *variable prima* de φ si p es una variable atómica y es subfórmula de φ.

[1] Las definiciones aquí presentadas corresponden para el lenguaje proposicional de $\mathscr{L}^+$. Extender las definiciones para lógicas con diferentes conectivos de distintas aridades basta con incluir mapeos n-arios y extender las definiciones recursivas para cada conectivos

Definición 2.1.4 (Definición de Sustitución [24]). *La sustitución* $\psi[\varphi/p_i]$ *se define mediante:*

(i) $\psi[\varphi/p_i] = \begin{cases} \psi, & \text{si } \psi \text{ es variable atómica y } \varphi \neq p_i \\ \varphi, & \text{si } \varphi = p_i \end{cases}$

(ii) $(\psi_1 \Box \psi_2)[\varphi/p_i] = \psi_1[\varphi/p_i] \Box \psi_2[\varphi/p_i]$

2.1.2. Sistemas Axiomáticos

Por *lógica* entendemos a un conjunto de fórmulas cerrado bajo la regla de inferencia *Modus Ponens* y sustitución:

1. Sustitución: $\varphi(\psi_1, ..., \psi_n)$ es obtenida de $\varphi(p_1, ..., p_n)$ donde cada variable proposicional p_i de φ es sustituida [2] por una fórmula ψ_i. Decimos que $\varphi(\psi_1, ..., \psi_n)$ es una *instancia de* φ.

2. *Modus Ponens*: β es obtenida a partir de las fórmulas α y $\alpha \to \beta$.

Un *axioma* es una fórmula designada dentro de un lenguaje. Una *demostración* en el lenguaje $\mathscr{L}$ es una secuencia $\mathscr{A}_1, ..., \mathscr{A}_n$ de fórmulas tal que para cada i, ya sea que $\mathscr{A}_i$ es un axioma de $\mathscr{L}$ o es consecuencia directa de alguna de las fórmulas anteriores en virtud de alguna de las reglas de inferencia. Un *teorema* de $\mathscr{L}$ es una fórmula $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}$ tal que existe una demostración de la cual la última fórmula es $\mathscr{A}$. De manera general no existe procedimiento efectivo alguno para verificar si una fórmula es un teorema de una lógica [18], sino que es un resultado de la ingeniosidad en la utilización de los axiomas y las reglas de inferencia para la producción de resultados válidos del lenguaje.

Para extender una lógica utilizamos la operación $+$, esto es, sea L una lógica y X un conjunto de fórmulas denotamos por $L + X$ a la menor lógica que contiene a L y a todas las fórmulas de X. Adicionalmente a cada lógica L se le asocia una *relación de inferencia* (o *relación de consecuencia*) denotada $\vdash_L$. Para un conjunto de fórmulas X y una fórmula φ, la relación $X \vdash_L \varphi$ indica que φ se obtuvo a partir de los elementos de X o a partir de los axiomas de L en un número finito de pasos

[2] Esto es posible extendiendo la definición 2.1.4 a n-variables

usando las reglas de inferencia de L. Cuando la lógica en cuestión es previamente definida y no existen ambigüedad en la interpretación es válido omitir el subindice en la relación de inferencia como $\vdash$.

Existen muchas maneras de caracterizar a una lógica, ya sea mediante un conjunto de axiomas y reglas de inferencia o mediante un acercamiento semántico mediante *tablas de verdad*. El primer caso se refiere a la caracterización de un *sistema axiomático*. La lógica positiva, **Lp**, emplea un sistema axiomático utilizando propiamente a los conectivos de $\mathscr{L}^+$ y cuya única regla de inferencia es Modus Ponens. Esta axiomática es la siguiente:

(A1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$

(A2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

(A3) $(\alpha \wedge \beta) \to \alpha$

(A4) $(\alpha \wedge \beta) \to \beta$

(A5) $(\alpha \to (\beta \to (\alpha \wedge \beta)))$

(A6) $\alpha \to (\alpha \vee \beta)$

(A7) $\beta \to (\alpha \vee \beta)$

(A8) $(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\alpha \vee \beta) \to \gamma))$

En **Lp** los conectivos $\wedge$ y $\vee$ cumplen propiedades usuales de idempotencia, asociatidad, distributividad y conmutatividad [19]. Es posible definir a la *lógica clásica* **Lk**, en el sentido de [18], cuyo lenguaje es $\mathscr{L} = \mathscr{L}^+ \cup \{\neg^1\}$, caracterizado mediante los siguientes axiomas y cuya única regla de inferencia es Modus Ponens:

$(A1)^+$ $(\alpha \to (\beta \to \alpha))$

$(A2)^+$ $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

$(A3)^+$ $(((\neg\beta) \to (\neg\alpha)) \to (((\neg\beta) \to \alpha) \to \beta))$

Es de particular interés que si una lógica X posee los axiomas de esquema $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{A}))$ y $(\mathscr{A} \to (\mathscr{B} \to \mathscr{C})) \to ((\mathscr{A} \to \mathscr{B}) \to (\mathscr{A} \to \mathscr{C}))$ y como única regla de inferencia Modus Ponens entonces X satisface el *Teorema de la Deducción* el cual indica que si $\Gamma, \mathscr{A} \vdash_X \mathscr{B}$ entonces $\Gamma \vdash_X \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ [18]. A continuación se mostrarán ejemplos de pruebas en los sistemas de lógica positiva y lógica clásica ejemplificando así el concepto de prueba:

Teorema 2.1.2 (Teorema de la Identidad)**.** $\vdash_{\boldsymbol{Lp}} \alpha \to \alpha$

Demostración. Una prueba de $\alpha \to \alpha$ en **Lp** es:

1. $\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$ $(A1)$
2. $(\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to ((\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha))$ $(A2)$
3. $(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to \alpha)$ Modus Ponens (1, 2)
4. $\alpha \to (\alpha \to \alpha)$ $(A1)$
5. $\alpha \to \alpha$ Modus Ponens (4, 3)

□

Una demostración puede utilizar dentro de la secuencia de fórmulas empleadas en el razonamiento subsequencias pertenecientes a otras demostraciones [18]. Ejemplificando lo anterior enseguida se muestra una demostración donde se hace uso de las pruebas “Transitividad” y “Swap”, las cuales se pueden encontrar en el apéndice A (A.0.2 y A.0.3 respectivamente).

Teorema 2.1.3 (Principio de Explosión)**.** $\vdash_{\boldsymbol{Lk}} \alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$

Demostración. Una prueba de $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ en **Lk** es:

1. $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$ $(A3)^+$
2. $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ $(A1)^+$
3. $\alpha \to (\neg\beta \to \alpha)$ $(A1)^+$
4. $\neg\alpha \to ((\neg\beta \to \alpha) \to \beta)$ Transitividad(2, 1)

5. $(\neg\beta \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \beta)$ Swap(4)

6. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ Transitividad(3, 5)

$\square$

En general existe gran cantidad de sistemas axiomáticos, cada uno caracterizando a una lógica correspondiente. En el caso de la lógica clásica observamos que la axiomática utiliza únicamente los conectivos $\{\to, \neg\}$. Las definiciones de los operadores disyunción y conjunción están dados como *abreviaciones* de los conectivos anteriores. Por instancia en lógica clásica se tiene a la conjunción $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ como $\neg(\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B})$ y a la disyunción $(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ como $(\neg\mathscr{A}) \to \mathscr{B}$. Como veremos adelante en muchas ocasiones se desea definir un conectivo en el lenguaje que satisfaga ciertas propiedades deseables, en ocasiones es posible o no encontrar una correspondencia con los operadores usuales.

2.2. Lógicas Multivaluadas

Para interpretar los resultados de la lógica proposicional existe una estructura simple basada en mapeos del conjunto de fórmulas a un conjunto de valores de interpretación, reflejando de esta manera el sentido lógico del lenguaje de la lógica [24]. Estas funciones son denominanadas *valuaciones*. Para definir una valuación sobre un lenguaje se establece ya sea de manera recursiva o inductiva o sobre las fórmulas del lenguaje. A continuación se muestra una definición recursiva de una valuación para la lógica **Lk**.

Definición 2.2.1. *Una función $v : \mathscr{L}_{PROP} \to \{0,1\}$ es una* valuación *de* ***Lk*** *si*

$$v(\varphi \wedge \psi) = min(v(\varphi), v(\psi))$$

$$v(\varphi \vee \psi) = max(v(\varphi), v(\psi))$$

$$v(\varphi \to \psi) = 0 \Leftrightarrow v(\varphi) = 1 \ y \ v(\psi) = 0$$

$$v(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow v(\varphi) = v(\psi)$$

$$v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi)$$

Intuitivamente lo anterior captura la idea de tener un *valor de verdad* codificado como cierto bajo la valuación 1 y por el contrario la falsedad bajo 0. Si una valuación solamente es definida para variables atómicas es, gracias a la definición 2.1.1, extendible para todas las fórmulas [24], de esto se sigue que existen $2^{\mathbb{N}}$ posibles valuaciones, ya que por la definición 2.1.1 la cantidad de variables atómicas es un conjunto contable. Usualmente para estos objetivos se definen *tablas de verdad* o *matrices lógicas* [3] las cuales indican la valuación respectiva de los conectivos en el lenguaje.

Ejemplo 2.2.1. *Se definen las matrices lógicas para la lógica **Lk**:*

$\wedge$	***0***	***1***
0	*0*	*0*
1	*0*	*1*

$\vee$	***0***	***1***
0	*0*	*1*
1	*1*	*1*

$\rightarrow$	***0***	***1***
0	*1*	*1*
1	*0*	*1*

$\leftrightarrow$	***0***	***1***
0	*1*	*0*
1	*0*	*1*

$\neg$	
0	*1*
1	*0*

Notamos que en la valuación definida en 2.2.1 indica que la función posee una imagen en un conjunto $\{0, 1\}$. Sin embargo es posible definir una *multivaluación* en donde la imagen correspondiente a la función en cuestión posee un mayor número de elementos. Formalmente, una lógica **L** en el sentido semántico es una 3-tupla $\langle \mathscr{L}_{PROP}, Val, Sel \rangle$, donde $\mathscr{L}_{PROP}$ es un lenguaje proposicional, Val es un conjunto de valores $\{0, \ldots, m\} \quad (0 \leq m)$ y Sel es un subconjunto de Val. Intuitivamente Sel cumple ser aquellos valores *designados*, los cuales se interpretan como *verdaderos*. Una multivaluación se denota como un mapeo $v_m : \mathscr{L}_{PROP} \rightarrow Val$.

Definición 2.2.2. *(Definición de Tautología [24])*

1. *Una fórmula φ es una tautología si $v_m(\varphi) \in Sel$ para toda valuación v_m.*

2. *Denotamos por $\models \varphi$ que "φ es una tautología".*

Las lógicas multivaluadas son una generalización de las tablas de verdad, una manera de definir una lógica desde el punto de vista semántico. Por convención se utilizará valuación en lugar de multivaluación a excepción que exista ambigüedad en el escrito con el fin de evitar sobre escritura por notación.

[3]La diferencia entre ambas estructuras es que las tablas de verdad se presentan mediante una lista de las posibles valuaciones para el conectivo mientras que la matriz lógica se presenta como un producto cartesiano de dimensión respectiva a la aridad del conectivo

2.2.1. Independencia de Axiomas

Definición 2.2.3. *Dado un conjunto de axiomas X, un subconjunto Y de axiomas de X es* independiente *si alguna fórmula en Y no es demostrable mediante las reglas de inferencia definidas en X mediante todos los axiomas que no están en Y.*

Las técnicas usuales para demostrar que un axioma es independiente de un conjunto de axiomas es encontrar una *invariante*, es decir, encontrar una valuación (o multivaluación) de tal manera que se satisfaga en el conjunto complemento de Y pero no en Y. A continuación se presenta una demuestra que el axioma $(A3)^+$ es independiente en la lógica **Lk**.

Teorema 2.2.1. *([18]) El axioma $(A3)^+$ es independiente de los axiomas $(A1)^+$ y $(A2)^+$ de la lógica **Lk***

Demostración. Consideremos la siguiente tabla:

A	$\neg A$
0	2
1	2
2	2

A	B	$A \to B$
0	0	0
1	0	0
2	0	0
0	1	1
1	1	0
2	1	1
0	2	2
1	2	0
2	2	0

En donde 0 es el único valor designado. No es difícil observar que los axiomas $(A1)^+$ y $(A2)^+$ se satisfacen con la valuación anterior presentada. También la regla de *Modus Ponens* se preserva ante el valor designado. Sin embargo para el axioma $(A3)^+$ existe una valuación que no lo satisface, por instancia se verifica que $v((\neg A_1 \to \neg A_2) \to ((\neg A_1 \to A_2) \to A_1) = 1$ cuando $v(A_1) = 1$ y $v(A_2) = 0$. □

En [18] se desmuestra también que $(A1)^+$ y $(A2)^+$ son independientes de manera similar que $(A3)^+$. El concepto de lógicas multivaluadas es de gran utilidad para encontrar independencia de axiomas en un sistema axiomático. Aunque esta técnica tiene sus limitaciones [12] gran parte del trabajo de tesis utiliza este razonamiento para encontrar una monotonía en la estructura de las lógicas por estudiar.

2.3. Aspectos Generales de Lógica

Cuando se estudian distintos sistemas lógicos es de gran utilidad determinar si los sistemas cumplen con determinadas propiedades para realizar una caracterización completa del poder expresivo del lenguaje, equivalencias o contenciones entre sistemas, cantidad de teoremas demostrables, entre otros. La lógica clásica comienza desde Plato y se concreta con los trabajos de Aristóteles en [1]. En ellos se fundamentan tres leyes conocidas en la actualidad como *las tres leyes clásicas del pensamiento* las cuales son:

- (i) Ley de identidad: El cual indica que todo objeto es idéntico a sí mismo y distinto de cualquier otro (i.e., $\vdash \alpha \to \alpha$).
- (ii) Ley de la no-contradicción: Refiere que no es el caso que dos proposiciones puedan ser simultáneamente verdaderas siendo opuestas del mismo sentido al mismo tiempo. De lo contrario se seguiría una *contradicción* (i.e., $\vdash \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$).
- (iii) Ley del tercero excluso: Indica que dos proposición que resulten contradictorias, sólo una debe ser verdadera (i.e., $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$).

A partir de estos *principios* gran parte del conocimiento humano encontró una estructura sólida el cual se preseva hasta en la actualidad. A esta estructura de conocimientos denominamos *teorías* (T) ya que esencialmente resulta ser un conjunto de proposiciones cerradas bajo una consecuencia lógica. A su vez, una teoría T es [5]:

- (i) *Contradictoria* si y sólo si existe al menos una contradicción en T, es decir, en T es demostrable tanto $\alpha \wedge \neg\alpha$. (i.e., $T \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$). De modo contrario T es *consistente*.
- (ii) *Trivial* si y sólo si toda fórmula β en el lenguaje de T es demostrable por T, es decir T demuestro todo (i.e., $T \vdash \beta$).

- (iii) *Explosiva* si y sólo si T es trivial en la presencia de una contradicción (i.e. $T \vdash (\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$)

No es difícil ver que desde lógica positiva $\vdash_{\mathbf{Lp}} (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow ((\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta)$ y $\vdash_{\mathbf{Lp}} ((\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta))$; es decir $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \beta)$ y $(\alpha \wedge \neg\alpha) \rightarrow \beta$ son *equivalentes en* ***Lp***, por lo cual observamos que una de las condiciones necesarias para establecer la *explosividad* en un sistema lógico es la *contradicción*. Si un sistema axiomático tuviera la facilidad de evitar contradicciones en sus teorías no siempre se daría el caso de encontrar explosión en los razonamientos. Con esta motivación es como surgen las lógicas paraconsistentes, los cuales son sistemas axiomáticos que permiten realizar deducciones ante teorías contradictorias, ya que éstas por construcción no siempre son explosivas.

En este capítulo se dieron definiciones de utilidad esenciales en el contexto de lógica matemática, específicamente la terminología correspondiente para la definición de lenguaje proposicional, definición recursiva y sistemas axiomáticos. Se mostraron algunos ejemplos de cómo realizar una prueba en sistemas axiomáticos conocidos, como la lógica positiva y la lógica clásica. Adicionalmente se hace mención acerca de las lógicas multivaluadas y una técnica muy común y frecuentemente utilizada en el trabajo de tesis para demostrar la independencia de fórmulas de un sistemas axiomático a partir de invariantes.