Capítulo 1

Introducción

La lógica es una rama de la filosofía y una rama de las matemáticas. Desde la perspectiva filosófica la lógica se dedica a estudiar el razonamiento e inferencia válida. Por otra parte existe un interés en estudiar propiedades matemáticas en objetos tales como lenguajes formales, sistemas de deducción y semánticas [22] mediante el formalismo y rigor matemático. La lógica es una de las disciplinas científicas más antigüas que se tienen registro. Los primeros indicios de esta disciplina los encontramos en los trabajos de Aristóteles, quien manejaba el concepto de *silogismos* como mecanismo para derivar proposiciones de interés a partir de información dada. De esta manera primitiva, Aristóteles comienza lo que actualmente recibe el nombre de *lógica clásica* el cual sirve como pilar intelectual en el desarrollo del conocimiento humano. Este marco de referencia es de particular interés al incluir tres principios básicos de razonamiento, los cuales son:

(i) *Principio de Identidad*. Este principio establece que todo objeto se implica a si mismo. En palabras de Aristóteles menciona que toda entidad es *idéntica* a sí misma. En particular se menciona en [1] que no existe diferencia en el razonamiento en cuanto a llamar a un mismo objeto por distintos nombres siempre y cuando se trate del mismo objeto. Se hace una especial observación en que menciona que tal razonamiento solamente es posible siempre y cuando el objeto en cuestión tenga un número finito de definiciones distintas.

(ii) *Principio de la No Contradicción.* Una contradicción se establece cuando para cualquier proposición tanto la misma como su negación es verdadera. Este principio nos indica que la situación anterior no puede ser nunca el caso, esto es “dos o mas proposiciones contradictorias no pueden ser ciertas en el mismo sentido al mismo tiempo”.

(iii) *Principio del Tercero Excluído.* Indica que toda proposición o la negación de ésta es verdadera. Aristóteles menciona en [1] que no existen situaciones intermedias de contrariedad, por lo que debemos ser capaces de afirmar o rechazar la veracidad de cualquier proposición.

Resulta muy interesante encontrar que estos principios básicos establecen en conjunción una serie de propiedades que hacen de este marco un sistema deductivo ideal para el trabajo científico y de aplicaciones prácticas. Concretamente estos principios hacen que la lógica clásica sea: *no trivial*, en el sentido que hace una distinción clara de lo es y no es verdadero; *explosiva*, ya que ante una contradicción es posible derivar cualquier proposición; y *consistente* ya que el sistema no permite derivar contradicciones, precisamente por el principio de la no contradicción.

Gran parte del conocimiento en la actualidad está estructurado bajo los esquemas aristótelicos. En su momento estas ideas impactaron fuertemente a todas las áreas de la ciencia. Gracias a ello el uso de la lógica clásica fue reforzada como mecanismo en el descubrimiento de la veracidad de ciertas proposiciones de interés. Sin embargo recientemente encontramos situaciones en las que, motivadas por razones filosóficas o tecnológicas, determinados formalismos son de gran utilidad ya que establecen un marco ideal para satisfacer las necesidades axiomáticas que ciertas teorías necesitan. Algunas de las motivaciones en general al estudio de lógicas no clásicas es precisamente cumplir estas necesidades.

A lo largo de la historia se ha observado estos *cambios de paradigma*. Por citar algunos ejemplos tenemos el caso de la geometría euclideana, teoría determinada esencialmente mediante cinco postulados. De especial atención era el quinto postulado, conocido actualmente como el postulado de las *líneas paralelas* la cual indica que dado una línea y un punto en el plano existe al menos una línea que al prolongarse en el plano no se intersecta con la primera. Fue de gran interés para los matemáticos de la época encontrar si este último postulado era derivable a partir de los primeros cuatro. No fue hasta principios del siglo XIX donde los matemáticos

János Bolyai y Nikolai Ivanovich Lobachevsky de manera independiente propusieron tener una geometría en donde el postulado no fuese válido. Como resultado se encontraron las llamadas *geometrías no - euclideanadas*, en donde el espacio geométrico esencialmente deja de ser plano.

Al principio las geometrías no - euclideanas mostraban un interés puramente matemático carente de aplicaciones útiles ya que la dominancia de Euclides durante tanto tiempo fue evidente en la práctica. Sin embargo, años posteriores mostraron utilidad, citando el ejemplo de la teoría de la relatividad general de Einstein, el cual explica que el espacio físico obece a una geometría no - euclideana y que la geometría euclideana es sólo una buena aproximación solamente si el campo de gravedad es débil [23].

En lógica situaciones similares han ocurrido. Por citar ejemplos, en el particular caso de la lógica intuicionista, una lógica no clásica desarrollada a principios del siglo XX por el matemático y filósofo L.E.J. Brouwer, la noción de verdad se centra a partir del *concepto de prueba* como mecanismo único para la determinación de la validez de una proposición. Brouwer decía que para exhibir la existencia de un objeto matemático no basta con simplemente derivar una contradicción y demostrar lo inevitable, sino que el ejercicio mismo de la construcción del objeto en cuestión es la manera de asegurar su existencia. Por tanto podemos observar que en el sentido intuicionista el principio del tercero excluído no se cumple ya que para ello necesitariamos una prueba de α ó una prueba de $\neg\alpha$, lo cual no siempre es posible obtener.

El objetivo principal en el programa de Brouwer era claramente separar las matemáticas de la lógica, por un concepto de *matemáticas constructivas*, en donde el principio del tercero excluído es interpretado de manera equivalente a afirmar que todo problema en matemáticas tiene solución, un resultado que prontamente fue rechazado gracias a los trabajos de Kurt Gödel, especialmente por sus teoremas de incompletitud publicados en 1931 en donde se determina que ciertas proposiciones son indecidibles para axiomáticas consistentes y completas. Aunque la primera impresión de estos resultados parecieren negativos surgieron ideas alrededor de ellos lo cual nos lleva en la actualidad a poseer una mejor comprendimiento sobre la teoría funciones recursivas (computabilidad), categorías de complejidad, algoritmos, matemáticas computacionalmente acotadas, etc.

Otra ejemplo bien conocido de lógicas no clásicas es el caso de la lógica difusa. Esta lógica no obedece el Principio del Tercero Excluído ya que permite a una proposición tener un mayor número de valores de verdad [14]. Las aplicaciones en ingeniería han sido notables en esta lógica, resaltando algunas como control difuso, análsis de ambigüedad en el procesamiento de lenguaje natural, cómputo suave en el sentido de precisar métodos que toleren la sub optimalidad de un problema. La valuación de una fórmula se indica como una función real continua. Adicionalmente posee una estructura de interés, ya que paradojas, como la paradoja del barbero o la paradoja del mentiroso, no son problemáticas en esta lógica. Esto se debe a que en muchas lógicas es común que una fórmula no es equivalente de ninguna manera a su propia negación, cosa que no siempre es cierta en este tipo de lógica difusa.

La lógica paraconsistente es una lógica no clásica que permite expresar teorías inconsistentes pero no triviales [10]. Los beneficios de un sistema axiomático de tales características permite la descripción de teorías que no son explosivas en el sentido clásico, es decir a partir de una contradicción es derivable cualquier fórmula, sino que es posible seguir infiriendo información a partir de proposiciones contradictorias. La concepción de la lógica paraconsistente comienza con los trabajos de Jean Lukasiewicz y Nicolai I. Vasielev alrededor de 1910 y 1911 respectivamente en donde se propuso la posibilidad de encontrar lógicas interesantes excluyendo el *principio de la no contradicción*.

Aunque la lógica paraconsistente es mas reciente en comparación con otras lógicas no clásicas podemos observar que posee una cantidad importante de trabajo que validan su relevancia. Las primeras aproximaciones formales en definir lógicas paraconsistente lo encontramos en los trabajos de Stanislaw Jaśkoski en 1948 mediante su conocida *lógica discursiva* en donde básicamente se plantea tener un conjunto de proposiciones de distantas fuentes donde todos pueden ser parcialmente consistentes entre sí. Jaśkoski indicó las siguientes condiciones que toda lógica paraconsistente debe de cumplir [15, 16]:

Jas1 Cuando sea aplicado a sistemas inconsistente no deberá siempre establecer la trivialización;

Jas2 Deberá ser lo suficiente expresiva para desarrollar inferencias prácticas;

Jas3 Deberá tener una justificación clara;

Como nota aclaratoria en [15] el autor expresa la posibilidad que las condiciones indicadas no determinen de manera unívoca los objetivos generales, obteniendo soluciones que satisfagan al problema en varios grados de validez. En particular se subraya la ambigüedad de **Jas3** de manera importante ya que existe una dificultad en satisfacer esta condición de manera objetiva. Diez años más tarde el matemático y filósofo Newton da Costa propone ligeras modificaciónes a las condiciones propuestas por Jaśkoski en donde expresa su concepto de paraconsistencia. Estas condiciones fueron las siguientes [16]:

daC1 El principio de la no contradicción, de la forma $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$, no debe ser un esquema válido;

daC2 A partir de dos fórmulas contradictorias, α y $\neg\alpha$, no deberá ser generalmente posible deducir cualquier fórmula β;

daC3 Debe ser lo suficientemente simple para extender a cálculo de predicados, con y sin igualdad;

daC4 Deberá contener la mayor cantidad de esquemas y reglas de inferencias que el cálculo proposicional clásico siempre y cuando estas no interfieran con las primeras condiciones;

Con ello da Costa define en [10] a la lógica C_1 junto con sus jerarquías tanto en el cálculo proposicional como en el de predicados con y sin igualdad. El éxito logrado por da Costa fue tal que C_1 es de las lógicas paraconsistentes más conocidas y mejor estudiadas. Sin embargo, uno de los puntos fuertemente criticados en C_1 es la falta de interpretación en el sentido de **Jas3** ya que una semántica para este sistema sólamente es posible mediante semánticas no funcionales [2], es decir que las tablas de verdad solamente satisfacen una dirección de la implicación en la evaluación de la proposición.

Como podemos ver en [5] la contrariedad y la trivialidad son equivalentes en una lógica si y solo si la lógica en cuestión es explosiva. De este modo la motivación de una lógica paraconsistente se hace evidente ya que al ser un marco axiomático *débilmente* *explosivo*, esto es que no siempre se da el caso de tener explosividad clásica, permite la distinción entre contrariedad y trivialidad, estableciendo así un estudio formal sobre las propiedades de la contradicción.

Estas propiedades son altamentes deseables en muchas áreas de la ciencia y en aplicaciones de ingeniería. Por citar unos ejemplos tenemos a la teoría de la mecánica cuántica. Esta teoría ha sido de difícil explicación *intuitiva* inclusive para los expertos ya que los resultados encontrados describen la realidad física microscópica, sin embargo contradice mucho al sentido aristotélico de lo que se concibe por realidad. Existen postulados en la mecánica cuántica que permiten al electrón encontrarse en un estado de *superposición* previamente a una medición. Notamos en este caso particular que la propiedad de superposición puede ser modelado como una propiedad contradictoria, por lo que una lógica paraconsistente podría fundamentar muchos de los procesos efectuados en esta teoría. En particular a lo largo de esta tesis se desea estudiar las propiedades de la lógica C_1 y extensiones de ésta tomando como motivación encontrar lógicas paraconsistentes que puedan ser de utilidad para entender el fenómeno de la *superposición de estados* en mecánica cuántica.

La organización de la siguiente tesis se estable a continuación: en el capítulo 2 se describirán los preliminares en el cual se presentarán conceptos básicos de lógica matemática para la lectura del trabajo posterior; en el capítulo 3 se describirá a la lógica proposicional C_1, la jerarquía propuesta por da Costa a ésta lógica, y algunos resultados relacionados a las extensiones de C_1; en el capítulo 4 se describirá la lógica de predicados con y sin igualdad en C_1; en el capítulo 5 se tendrá una discusión respecto a la lógica cuántica, la cual ha sido la lógica utilizada para describir procesos cuánticos hasta ahora; finalmente en el capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo, así como posibles líneas de investigación.