Apéndice A

Demostraciones Auxiliares

Teorema A.0.1. $((a \vee \vee)$ *no es una fórmula de* $\mathscr{L}^{+}_{PROP}$

Demostración. La prueba es por contradicción. Supongamos que $((a \vee \vee)$ es una fórmula de $\mathscr{L}^{+}$. Queremos ver que existe un conjunto $X = \mathscr{L}^{+} - \{((a \vee \vee)\}$ que también satisface las condiciones (i) y (ii) de la definición 2.1.1. Sabemos que p_i es fórmula de $\mathscr{L}^{+}$, también se cumple que p_i es fórmula de X. Si α, β son fórmulas de X, entonces α, β también son fórmulas de $\mathscr{L}^{+}$ por contención. Como $\mathscr{L}^{+}$ satisface (ii), es decir $(\alpha \Box \beta)$ es una fórmula de $\mathscr{L}^{+}$ y $((a \vee \vee)$ no es de la forma $(\alpha \Box \beta)$, entonces $(\alpha \Box \beta)$ es una fórmula de X. Observamos que X cumple (i) y (ii) pero es un conjunto con menos elementos que $\mathscr{L}^{+}$, entonces $\mathscr{L}^{+}$ no es el menor conjunto que satisface (i) y (ii). Por tanto $((a \vee \vee)$ no puede ser una fórmula de $\mathscr{L}^{+}$. $\square$

Teorema A.0.2 (Transitividad)**.** $\vdash_{\boldsymbol{Lp}} (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

Demostración. Basta de mostrar que $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \vdash_{\mathbf{Lp}} \alpha \to \gamma$. Posterior a ello se aplicarían dos veces el teorema de la Deducción.

1. $\alpha \to \beta$ — Hipótesis
2. $\beta \to \gamma$ — Hipótesis
3. $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to (\beta \to \gamma))$ — $(A1)$
4. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ — Modus Ponens(2, 3)

5. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ $(A1)$

6. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ Modus Ponens(4, 5)

7. $\alpha \to \gamma$ Modus Ponens(1, 6)

□

Teorema A.0.3 (Swap)**.** $\vdash_{\boldsymbol{Lp}} (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$

Demostración. Basta demostrar que $\alpha \to (\beta \to \gamma) \vdash_{\mathbf{Lp}} \beta \to (\alpha \to \gamma)$. Posterior a ello se aplicaría una vez el teorema de la Deducción.

1. $\alpha \to (\beta \to \gamma)$ Hipótesis

2. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ $(A2)$

3. $(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$ Modus Ponens(1, 2)

4. $\beta \to (\alpha \to \beta)$ $(A1)$

5. $\beta \to (\alpha \to \gamma)$ Transitividad(4, 3)

□

Teorema A.0.4. *Si a C_1 se agrega el esquema de axioma $(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ entonces la lógica resultante no es paraconsistente.*

Demostración. Se mostrará que si a C_1 se agrega dicho esquema de axioma (denotado aquí como T) se deduciría el esquema de axioma $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

1. $((\alpha \wedge \neg\alpha) \to \alpha) \to (((\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$ T

2. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \alpha$ (A3)

3. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg\alpha$ (A4)

4. $((\alpha \wedge \neg\alpha) \to \neg\alpha) \to \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ Modus Ponens(2, 1)

5. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ Modus Ponens(3, 4)

□

Definición A.0.1. *Una lógica X satisface el* Teorema de la Sustitución *si:* $\vdash_X \alpha \leftrightarrow \beta$ *entonces* $\vdash_X \psi[\alpha/p] \leftrightarrow \psi[\beta/p]$ *para cualquier fórmula* $\alpha, \beta,$ *y* ψ *y para cualquier átomo* p *que apareza en* ψ *donde* $\psi[\alpha/p]$ *denota la fórmula resultante al cambiar toda ocurrencia de* p *por la fórmula* α.

Teorema A.0.5. *La lógica clásica satisface el* Teorema de la Sustitución.

Demostración. Se hará inducción sobre la longitud de la fórmula ψ.

1. Caso base: ψ es un fórmula atómica. Si ψ es una fórmula atómica entonces $\psi = p$ ó $\psi \neq p$. Si $\psi = p$ entonces $\psi[\alpha/p] = \alpha$ y $\psi[\beta/p] = \beta$, con esto $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash \psi[\alpha/p] \leftrightarrow \psi[\beta/p]$. Si $\psi \neq p$ entonces $\psi[\alpha/p] = \psi = \psi[\beta/p]$, por lo que $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash \psi \leftrightarrow \psi$.

2. Paso Inductivo:

   a) Sub - Caso 1: ψ es la forma $\psi_1 \Box \psi_2$. Por hipótesis de inducción:

   $$\begin{aligned} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta &\Rightarrow \vdash \psi_1[\alpha/p] \leftrightarrow \psi_1[\beta/p] \\ &\Rightarrow \vdash \psi_2[\alpha/p] \leftrightarrow \psi_2[\beta/p] \end{aligned}$$

   Por la definición 2.1.4 se tiene que $(\psi_1 \Box \psi_2)[\varphi/p_i] = \psi_1[\varphi/p_i] \Box \psi_2[\varphi/p_i]$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ respectivamente $\psi_1[\alpha/p], \psi_1[\beta/p], \psi_2[\alpha/p], \psi_2[\beta/p]$. Notamos que sólamente es necesario demostrar que:

   $$\begin{aligned} \vdash (\psi_1 \Box \psi_2)[\alpha/p] \leftrightarrow (\psi_1 \Box \psi_2)[\beta/p] &\Leftrightarrow \vdash \psi_1[\alpha/p] \Box \psi_2[\alpha/p] \leftrightarrow \psi_1[\beta/p] \Box \psi_2[\beta/p] \\ &\Leftrightarrow \vdash \alpha_1 \Box \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \Box \beta_2 \end{aligned}$$

   1) Sub - sub caso 1: $\Box = \wedge$ Lo que se desea demostrar es que $\vdash \alpha_1 \wedge \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \wedge \beta_2$.
   ($\Leftarrow$)

1.	$\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$	Hipótesis Inductiva
2.	$\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$	Hipótesis Inductiva
3.	$\alpha_2 \wedge \beta_2$	Hipótesis
4.	α_2	Eliminación $\wedge$ (3)

5. β_2 Eliminación $\wedge$ (3)
6. $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ Eliminación $\wedge$ (1)
7. $\beta_2 \rightarrow \beta_1$ Eliminación $\wedge$ (2)
8. $\vdash \alpha_1$ Modus Ponens (4, 6)
9. $\vdash \beta_1$ Modus Ponens (5, 7)
10. $\vdash \alpha_1 \wedge \beta_1$ Introducción $\wedge$ (8, 9)
11. $\vdash \alpha_2 \wedge \beta_2 \rightarrow \alpha_1 \wedge \beta_1$ Teorema de Deducción (3, 10)

($\Rightarrow$) Análogo a la prueba anterior

2) Sub - sub caso 2: $\square = \vee$ Lo que se desea demostrar es que $\vdash \alpha_1 \vee \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \vee \beta_2$

($\Leftarrow$)

1. $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ Hipótesis Inductiva
2. $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$ Hipótesis Inductiva
3. $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ Eliminación $\wedge$ (1)
4. $\beta_2 \rightarrow \beta_1$ Eliminación $\wedge$ (2)
5. $\alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \vee \beta_1$ Axiom
6. $\beta_1 \rightarrow \alpha_1 \vee \beta_1$ Axiom
7. $(\alpha_2 \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1)) \rightarrow ((\beta_2 \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1)) \rightarrow ((\alpha_2 \vee \beta_2) \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1)))$ Axiom
8. $\alpha_2 \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1)$ Transitividad(3, 5)
9. $\beta_2 \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1)$ Transitividad(4, 6)
10. $(\beta_2 \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1)) \rightarrow ((\alpha_2 \vee \beta_2) \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1))$ Modus Ponens(7, 8)
11. $(\alpha_2 \vee \beta_2) \rightarrow (\alpha_1 \vee \beta_1)$ Modus Ponens(9, 10)

($\Rightarrow$) Análogo a la prueba anterior

3) Sub - sub caso 3: $\square = \rightarrow$ Lo que se desea demostrar es que $\vdash \alpha_1 \rightarrow \beta_1 \leftrightarrow \alpha_2 \rightarrow \beta_2$

($\Rightarrow$)

1. $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ Hipótesis Inductiva
2. $\beta_1 \leftrightarrow \beta_2$ Hipótesis Inductiva
3. $\alpha_1 \rightarrow \beta_1$ Hipótesis

4. $\alpha_2 \to \alpha_1$ — Eliminación $\wedge$ (1)
5. $\beta_1 \to \beta_2$ — Eliminación $\wedge$ (2)
6. $\alpha_2 \to \beta_1$ — Transitividad(4, 3)
7. $\alpha_2 \to \beta_2$ — Transitividad(6, 5)
8. $(\alpha_1 \to \beta_1) \to (\alpha_2 \to \beta_2)$ — Teorema de Deducción(7)

($\Leftarrow$) Análogo a la prueba anterior

b) Sub - Caso 2: ψ es la forma $\neg\psi_1$. Por hipótesis de inducción:

$$\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash \psi_1[\alpha/p] \leftrightarrow \psi_1[\beta/p]$$

Sea α', β' respectivamente $\psi[\alpha/p], \psi[\beta/p]$. Por tanto, lo que necesitamos demostrar es que

$$\begin{aligned} \vdash \alpha \leftrightarrow \beta &\Rightarrow \vdash (\neg\psi)[\alpha/p] \leftrightarrow (\neg\psi)[\beta/p] \\ &\Rightarrow \vdash \neg(\psi[\alpha/p]) \leftrightarrow \neg(\psi[\beta/p]) \\ &\Rightarrow \vdash \neg\alpha' \leftrightarrow \neg\beta' \end{aligned}$$

Como en lógica clásica tenemos que si $\vdash \alpha \to \beta$ entonces $\vdash \neg\beta \to \neg\alpha$ la prueba es completa.

□

Teorema A.0.6. $\vdash_{\boldsymbol{Lk}} \neg\neg\alpha \to \alpha$

Demostración. Un demostración en el sistema de Hilbert es el siguiente:

1. $(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha)$ — $(A3)^+$
2. $\neg\neg\alpha \to (\neg\alpha \to \neg\neg\alpha)$ — $(A1)^+$
3. $\neg\neg\alpha \to ((\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha)$ — Transitividad(2, 1)
4. $(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \alpha)$ — Swap(3)
5. $\neg\alpha \to \neg\alpha$ — Teorema de Identidad
6. $\neg\neg\alpha \to \alpha$ — Modus Ponens(5, 4)

$\square$

Teorema A.0.7. $\vdash_{\boldsymbol{Lk}} \alpha \to \neg\neg\alpha$

Demostración. Un demostración en el sistema de Hilbert es el siguiente:

1. $(\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to ((\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha)$ $\quad (A3)^+$
2. $\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ $\quad$ Teorema A.0.6
3. $(\neg\neg\neg\alpha \to \alpha) \to \neg\neg\alpha$ $\quad$ Modus Ponens(2, 1)
4. $\alpha \to (\neg\neg\neg\alpha \to \alpha)$ $\quad (A1)^+$
5. $\alpha \to \neg\neg\alpha$ $\quad$ Transitividad(4,3)

$\square$

Teorema A.0.8. $\vdash_{\boldsymbol{Lk}} \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Demostración. Se recuerda que la conjunción de dos fórmulas $(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$ en **Lk** se abrevia como $\neg(\mathscr{A} \to \neg\mathscr{B})$, por cual basta demostrar que $\vdash_{\mathbf{Lk}} \neg(\neg(\alpha \to \neg(\neg\alpha)))$. Por el Teorema A.0.7 se tiene $\vdash_{\mathbf{Lk}} \alpha \to \neg\neg\alpha$, con lo cual nuevamente por el Teorema A.0.7 $\vdash_{\mathbf{Lk}} (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg(\alpha \to \neg\neg\alpha)$. Aplicando Modus Ponens a las dos fórmulas anteriores se obtiene $\vdash_{\mathbf{Lk}} \neg\neg(\alpha \to \neg\neg\alpha)$ como se deseaba. $\square$

Teorema A.0.9. $\neg\alpha \to \beta \vdash_{C_1} \alpha \vee \beta$

Demostración. Podemos ver que en C_1 tenemos $\alpha, \neg\alpha \to \beta \vdash \alpha \vee \beta$ ya que $\vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$. Por otra parte si aplicamos *Modus Ponens* a $\neg\alpha, \neg\alpha \to \beta \vdash \beta \Rightarrow \neg\alpha, \neg\alpha \to \beta \vdash \alpha \vee \beta$. Utilizando demostración por casos finalmente tenemos que $\neg\alpha \to \beta \vdash \alpha \vee \beta$. $\square$

Teorema A.0.10. *En C_1 las siguientes fórmulas no se cumplen:*

1. $\neg(\alpha \vee (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow \neg((\alpha \vee \beta) \vee \gamma)$ *Asociatividad de $\vee$ bajo la negación*
2. $\neg(\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow \neg((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)$ *Asociatividad de $\wedge$ bajo la negación*
3. $\neg(\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)) \leftrightarrow \neg((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma))$ *Distributividad de $\vee$ respecto a $\wedge$ bajo la negación*

4. $\neg(\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)) \leftrightarrow \neg((\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma))$ *Distributividad de $\wedge$ respecto a $\vee$ bajo la negación*

5. $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \neg(\beta \vee \alpha)$ *Conmutatividad de $\vee$ bajo la negación*

6. $\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \neg(\beta \wedge \alpha)$ *Conmutatividad de $\wedge$ bajo la negación*

Demostración. El resultado se sigue de observar la siguiente la siguiete valuación para C_1, en donde los valores designados son 1 y 2:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$
0	0	2	0	0
0	1	1	0	1
0	2	2	0	2
1	0	0	0	2
1	1	1	2	1
1	2	2	1	2
2	0	0	0	2
2	1	2	2	2
2	2	2	2	2

α	$\neg\alpha$
0	2
1	1
2	0

□

Lemma A.0.11. *En C_ω tenemos* $\vdash_{C_\omega} \neg(\alpha^n) \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$

Demostración. Por inducción sobre n:

Caso Base (n = 1):

1. $\neg(\alpha^o)$ Hipótesis

2. $\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha))$ Definición 3.1.2 (1)

3. $\neg(\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)) \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$ (A12)

4. $\alpha \wedge \neg\alpha$ Modus Ponens (2, 3)

Paso Inductivo:

1. $\neg(\alpha^n) \to (\alpha \wedge \neg\alpha)$ Hipótesis Inductiva

2. $\neg(\alpha^{n+1})$ Hipótesis

3. $\neg(\neg(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n))$ Definición 3.7.1 (2)

4. $\neg(\neg(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n)) \to (\alpha^n \wedge \neg\alpha^n)$ (A12)

5. $(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n)$ Modus Ponens (3, 4)

6. $(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n) \to \neg(\alpha^n)$ (A4)

7. $\neg(\alpha^n)$ Modus Ponens (5, 6)

8. $(\alpha \wedge \neg\alpha)$ Modus Ponens (7, 1)

□

Lemma A.0.12. *En C_n tenemos $\vdash_{C_\omega} \neg(\alpha^n) \to (\alpha^{n-1} \wedge \neg\alpha^{n-1})$*

Demostración. 1. $\neg(\alpha^n) \leftrightarrow \neg(\neg(\alpha^{n-1} \wedge \neg\alpha^{n-1}))$ Definición 3.7.1

2. $\neg(\neg(\alpha^{n-1} \wedge \neg\alpha^{n-1})) \to \alpha^{n-1} \wedge \neg\alpha^{n-1}$ (A12)

3. $\neg(\alpha^n) \to \alpha^{n-1} \wedge \neg\alpha^{n-1}$ Transitividad (1, 2)

□

Lemma A.0.13. *En C_ω tenemos $\vdash_{C_\omega} (\alpha^n \wedge \neg\alpha^n) \to \alpha^{(n)}$*

Demostración. Por inducción sobre n:

Caso Base (n = 1):

1. $(\alpha^1 \wedge \neg\alpha^1)$ Hipótesis

2. $(\alpha^1 \wedge \neg\alpha^1) \to \alpha^1$ (A3)

3. $\alpha^1 \leftrightarrow \alpha^{(1)}$ Definición 3.7.2

4. α^1 Modus Ponens (1, 2)

5. $\alpha^{(1)}$ Modus Ponens (4, 3)

Paso Inductivo:

1. $(\alpha^n \wedge \neg\alpha^n) \rightarrow \alpha^{(n)}$ — Hipótesis de Inducción
2. $(\alpha^{n+1} \wedge \neg(\alpha^{n+1}))$ — Hipótesis
3. $(\alpha^{n+1} \wedge \neg(\alpha^{n+1})) \rightarrow \neg(\alpha^{n+1})$ — (A4)
4. $\neg(\alpha^{n+1}) \rightarrow (\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n))$ — Lemma A.0.12
5. $\alpha^n \wedge \neg(\alpha^n)$ — Transitividad(3, 4) y Modus Ponens con (2)
6. $\alpha^{(n)}$ — Modus Ponens (5, 1)
7. $(\alpha^{n+1} \wedge \neg(\alpha^{n+1})) \rightarrow \alpha^{n+1}$ — (A3)
8. α^{n+1} — Modus Ponens (2, 7)
9. $\alpha^{(n)} \rightarrow (\alpha^{n+1} \rightarrow (\alpha^{(n)} \wedge \alpha^{n+1}))$ — (A5)
10. $\alpha^{(n)} \wedge \alpha^{n+1}$ — Modus Ponens (6, 9) y Modus Ponens con (8)
11. $\alpha^{(n+1)}$ — Definición 3.7.2

$\square$

Lemma A.0.14. *En C_ω tenemos que $\alpha^{(n+1)} \vee \beta^{(n+1)} \vdash_{C_\omega} \alpha^{(n)} \vee \beta^{(n)}$*

Demostración. No es difícil observar que $\alpha^{n+1} \wedge \alpha^{(n)} \vdash_{C_\omega} \alpha^{(n)}$. Como en C_ω tenemos el axioma de esquema (A6) y por Modus Ponens con lo anterior tenemos $\alpha^{n+1} \wedge \alpha^{(n)} \vdash_{C_\omega} \alpha^{(n)} \vee \beta^{(n)}$. Usando un razonamiento similar tenemos que $\beta^{n+1} \wedge \beta^{(n)} \vdash_{C_\omega} \alpha^{(n)} \vee \beta^{(n)}$. Utilizando demostración por casos tenemos que $(\alpha^{n+1} \wedge \alpha^{(n)}) \vee (\beta^{n+1} \wedge \beta^{(n)}) \vdash_{C_\omega} \alpha^{(n)} \vee \beta^{(n)}$, el cual por la definición 3.7.2 es $\alpha^{(n+1)} \vee \beta^{(n+1)} \vdash_{C_\omega} \alpha^{(n)} \vee \beta^{(n)}$. $\square$

Teorema A.0.15. *Los axiomas de C_n son tautologías bajo la valuación definida en T_n*

Demostración. Se demostrará que los axiomas de propios de C_ω y C_n cumplen con el enunciado anterior, ya que es fácil observar que las definiciones para los conectivos satisfacen lógica positiva.

(A9) Por demostrar: $(\forall\alpha,\beta)(v_n(\beta^{(n)} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))) \neq n+2)$.

Asumimos $(\exists\alpha,\beta)(v_n(\beta^{(n)} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))) = n+2)$. Por la definición 3.7.4 tenemos que $v_n(\beta^{(n)}) \neq v_n((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha))$ y $v_n((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha)) = n+2$. De lo anterior tenemos por la definición 3.7.4 tenemos que $v_n(\alpha \to \beta) \neq v_n((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$ y $v_n((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha) = n+2$. Nuevamente por la definición 3.7.4 en lo anterior tenemos que $v_n(\alpha \to \neg\beta) \neq v_n(\neg\alpha)$ y que $v_n(\neg\alpha) = n+2$. Por la definición 3.7.5 en lo anterior tenemos que $v_n(\alpha) = 1$. Debido a que $v_n(\beta^{(n)}) \neq n+2$, entonces por el lemma 3.7.10 tenemos que $v_n(\beta^{(n)}) = 1$. Lo anterior implica que $v_n(\beta) = 1$ ó $v_n(\beta) = n+2$. De lo último se distinguen dos posibles casos:

Caso 1: $v_n(\beta) = 1$. De lo anterior por la definición 3.7.5 tenemos que $v_n(\neg\beta) = n+2$. Debido a esto podemos encontrar fácilmente que $v_n(\alpha \to \neg\beta) = n+2$. Sin embargo $v_n(\alpha \to \neg\beta) \neq v_n(\neg\alpha)$. Contradicción.

Caso 2: $v_n(\beta) = n+2$. De lo anterior podemos observar que $v_n(\alpha \to \beta) = n+2$. Sin embargo $v_n(\alpha \to \beta) \neq v_n((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha)$. Contradicción.

En todos los posibles casos se encontró una contradicción, por lo que $(\forall\alpha,\beta)(v_n(\beta^{(n)} \to ((\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha))) \neq n+2)$.

(A10) Por demostrar: $(\forall\alpha,\beta)(v_n((\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha\Box\beta)^{(n)}) \neq n+2)$, donde $\Box \in \{\wedge,\vee,\to\}$.

Asumimos que $(\exists\alpha,\beta)(v_n((\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \to (\alpha\Box\beta)^{(n)}) = n+2)$. Por la definición 3.7.4 tenemos de lo anterior que $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \neq v_n((\alpha\Box\beta)^{(n)})$ y que $v_n((\alpha\Box\beta)^{(n)}) = n+2$. De lo anterior se por el lemma 3.7.10 que $v_n(\alpha\Box\beta) \in \{2,\ldots,n+1\}$. Debido a que $\Box \in \{\wedge,\vee,\to\}$ se identifican tres posibles casos:

Caso 1: $\Box = \to$. De los resultados anteriores en la presente prueba se encuentra que existen ciertas condiciones en las valuaciones de $v_n(\alpha)$ y $v_n(\beta)$. En este caso $v_n(\alpha) \neq v_n(\beta)$, ya que si no fuera el caso la implicación evaluaría a 1. Adicionalmente se encuentra que $v_n(\alpha) \in \{1,\ldots,n+2\}$ y $v_n(\beta) \in \{2,\ldots,n+1\}$. De lo anterior se tiene, por el lemma 3.7.10 que $v_n(\beta^{(n)}) = n+2$. Por tanto la conjunción evalua a $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) = n+2$. Sin embargo $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \neq v_n((\alpha \to \beta)^{(n)})$. Contradicción.

Caso 2: $\Box = \wedge$. Las condiciones encontradas en este caso para las valuaciones son: $v_n(\alpha) \in \{1, \ldots, n+1\}$ y $v_n(\beta) \in \{1, \ldots, n+1\}$ y que no es el caso que $v_n(\alpha) = v_n(\beta) = 1$. De lo anterior se encuentra que alguno de los conjuntados de $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)})$ es distinto de 1. Por tanto por el lemma 3.7.10 alguno de los conjuntados de $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)})$ evalua a $n+2$, por lo cual $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) = n+2$. Sin embargo $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \neq v_n((\alpha \to \beta)^{(n)})$. Contradicción.

Caso 3: $\Box = \vee$. Las condiciones encontradas en este caso para las valuaciones son: $v_n(\alpha) \in \{2, \ldots, n+2\}$ y $v_n(\beta) \in \{2, \ldots, n+2\}$ y que no es el caso que $v_n(\alpha) = v_n(\beta) = n+2$. De lo anterior se encuentra que alguno de los conjuntados de $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)})$ es distinto de n + 2. Por tanto por el lemma 3.7.10 alguno de los conjuntados de $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)})$ evalua a $n+2$, por lo cual $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) = n+2$. Sin embargo $v_n(\alpha^{(n)} \wedge \beta^{(n)}) \neq v_n((\alpha \to \beta)^{(n)})$. Contradicción.

(A11) Por demostrar: $(\forall \alpha)(v_n(\alpha \vee \neg \alpha) \neq n+2)$.

Asumimos que $(\exists \alpha)(v_n(\alpha \vee \neg \alpha) = n+2)$. A continuación se consideran dos casos:

Caso 1: Asumimos que $v_n(\alpha) = v_n(\neg \alpha) = n+2$. Pero esto no es posible por la definición 3.7.5.

Caso 2: Asumimos que $v_n(\alpha) \neq v_n(\neg \alpha)$. Se consideran dos subcasos:

Sub Caso 1: Asumimos que $v_n(\alpha) = n+2$. Por la definición 3.7.5 junto con lo anterior se tiene que $v_n(\neg \alpha) = 1$. Por la tanto la disyunción evalúa a $v_n(\alpha \vee \neg \alpha) = 1$. Contradicción.

Sub Caso 2: Asumimos que $v_n(\neg \alpha) = n+2$. Por la definición 3.7.5 junto con lo anterior se tiene que $v_n(\alpha) = 1$. Por la tanto la disyunción evalúa a $v_n(\alpha \vee \neg \alpha) = 1$. Contradicción.

En todos los casos se encuentra una contradicción. Por lo tanto $(\forall \alpha)(v_n(\alpha \vee \neg \alpha) \neq n+2)$.

(A12) Por demostrar: $(\forall \alpha)(v_n(\neg\neg \alpha \to \alpha) \neq n+2)$.

Asumimos que $(\exists\alpha)(v_n(\neg\neg\alpha \to \alpha) = n+2)$. Por la definición 3.7.4 debido a la regla de la implicación se tiene que $v_n(\neg\neg\alpha) \neq v_n(\alpha)$ y $v(\alpha) = n+2$. De este último por la definición 3.7.5 tenemos que $v_n(\neg\alpha) = 1$. Aplicando nuevamente la definición 3.7.5 en lo anterior tenemos que $v_n(\neg\neg\alpha) = n+2$, pero $v_n(\neg\neg\alpha) \neq v_n(\alpha)$. Contradicción. Por tanto $(\forall\alpha)(v_n(\neg\neg\alpha \to \alpha) \neq n+2)$.

Modus Ponens Por demostrar que en T_n se preserva la regla de inferencia Modus Ponens. Asumimos que $v_n(\alpha)$ y $v_n(\alpha \to \beta)$ evalúan a un valor designado. Supongamos que $v(\beta)$ evalua a $n+2$ (el único valor no designado en T_n). Como $v_n(\alpha) \neq v_n(\beta)$ entonces $v_n(\alpha \to \beta) = n+2$, por la definición 3.7.4. Sin embargo esto contradice que $v_n(\alpha \to \beta)$ evaluaba a un valor designado. Contradicción, por tanto T_n preserva Modus Ponens.

$\square$