

# Capítulo 2

## La Geometría Fractal, la Simetría y la Repetición de Patrones

*"Si se les mira adecuadamente, las matemáticas han de ser no sólo correctas, sino la expresión de la más alta belleza (...) y poseen la perfección de la más grandiosa de las obras de arte."*

Bertrand Russell

## 2.1 La Geometría Fractal

La geometría es la rama de la matemática que se encarga del estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio<sup>1</sup>. Se deriva de la palabra griega *geometría* (γεωμετρία), que significa medida de la tierra y fue usada por primera vez por Herodoto, historiador griego del siglo V a.C, quien en su gran épica sobre las guerras persas dice que en el antiguo Egipto, la “*geometría*” fue utilizada para encontrar la distribución correcta de la tierra después de los desbordamientos del Nilo.

La geometría ha jugado un papel importantísimo en el proceso de la descripción de los fenómenos naturales, además de ser la base fundamental para el desarrollo de la matemática moderna y de otras ciencias como la física.

La geometría moderna tiene su base en la geometría euclidiana, cuya modelación radica en nociones elementales como punto, recta y círculo, a partir de los cuales se constituyen las formas geométricas básicas que a su vez nos permiten modelar y estudiar estructuras grandiosas. En este tipo de geometría, en cuanto más nos acerquemos a las cosas, más simples se vuelven. Pero sucede lo contrario con los objetos naturales, mientras más nos acercamos a ellos, más complejos y difíciles de comprender se tornan y es por la necesidad o necesidad del hombre de entender y modelar estos objetos de donde nace una nueva disciplina llamada Geometría Fractal.

Koch, Cantor y Peano fueron los primeros científicos en trabajar con fractales, pero fue a finales de la década de los setenta y principio de los ochentas que Benoit B. Mandelbrot<sup>2</sup>, quien tuvo el mérito de intuir y después definir la idea de los fractales como

---

<sup>1</sup> Diccionario de la Real Academia Española

<sup>2</sup> Centro de Investigación Thomas J. Watson, Yorktown Heights Nueva York.

formas de explicación de la realidad, a través de sus trabajos dedicados a medir la costa de Gran Bretaña.

En sus primeros trabajos Mandelbrot no se atreve a conceptualizar la idea de fractal, solo se encarga de definir a aquellos objetos que comparten la característica de ser rugosos y a la vez autosimilares. Lo que busca es categorizar a aquellos elementos que se encuentran entre los cuerpos euclidianos regulares, que nos son comunes, y las figuras que se conocen como caóticas, es decir que son rugosas y que no tienen un patrón geométrico regular.

Respecto a esta nueva clase de ciencia y a su antecesora, la geometría euclidiana, Mandelbrot dice: "*... la geometría fractal no distingue, a propósito, entre conjuntos matemáticos (la teoría) y objetos naturales (la realidad). Incomparablemente más afín al mundo físico que la geometría euclidiana.*"<sup>3</sup>

Los fractales son objetos geométricos compuestos a su vez de objetos también de tamaño y orientación variable, pero de aspecto similar, y combinan irregularidad y estructura con la particularidad de que si un objeto fractal es aumentado, los elementos que aparecen vuelven a tener el mismo aspecto, independientemente de cual sea la escala utilizada; es decir, cumplen con el principio de auto similitud.

Los fractales se basan en la geometría compleja y esta complejidad asegura que sean localmente aleatorios y globalmente deterministas. La información que los genera es relativamente poca y se basa en un principio de retroalimentación que crea iteraciones infinitas, determinadas por ciertos parámetros de entrada. Respecto la característica de infinitud Antonio Escotado dice: "*Las cosas de incalculable complejidad se llaman fractales y tienen en común presentar longitudes infinitas dentro de áreas finitas*".<sup>4</sup>

El concepto principal de esta nueva geometría es el de dimensión fractal o de Hausdorff y es muy importante porque representa la conexión con el mundo real. Esta

---

<sup>3</sup> [www.geometríafractal.com](http://www.geometríafractal.com)

<sup>4</sup> Alberto Escotado. 1999. Caos y Orden

propiedad del objeto se refiere a qué tanto ocupa el objeto del espacio que lo contiene, y puede adquirir valores continuos en el espacio de número reales entre 0 y 3. Es importante recalcar que la dimensión fractal o fraccionaria no existiría ni sería comprendida si nos limitáramos al mundo de la geometría elemental.

Para calcular la dimensión fractal, también conocida como dimensión Hausdorff-Besicovitch se utiliza la siguiente fórmula:

$$D_H = \log N / \log (P/p)$$

Donde:

N : número de unidades

P : tamaño del objeto

p: tamaño de la unidad

Por ejemplo:



$$D_H = \log 16 / \log (1/1/9) \approx 1.26$$

Para modelar un fractal es necesario encontrar el patrón o la ley de recursividad entre las formas que se repiten, es decir encontrar el objeto básico y la ley de formación y

establecer el algoritmo gráfico. Formalmente se dice que se hace una iteración y es representada de manera general como:

$$X_{n+1}=f(X_n)$$

Por ejemplo:

$$X_{n+1}=X_n^3$$

Al aplicarla sobre un valor inicial, por ejemplo  $X_0=2$ , los cálculos serían  $X_1=(2)^3=8$ ,  $X_2=(8)^3=512$ ,  $X_3=(512)^3=134217728$  y así sucesivamente.

A la secuencia de números que se genera de la iteración se le llama *órbita* de la iteración, en nuestro caso sería:

$$2 \rightarrow 8 \rightarrow 512 \rightarrow 134217728 \rightarrow \dots \rightarrow \infty$$

Al punto al que se tiende a llegar ( $\infty$  en este caso) se le llama *atractor*.

Si se hubiese elegido como punto inicial  $X_0=1$ , el resultado sería siempre el mismo, 1, es decir, la órbita estaría constituida por un solo punto, y a este punto se le llama *punto fijo*.

Las imágenes de los fractales obtienen sus formas y colores cuando se les asigna un rango de colores a una serie de puntos, dependiendo de su comportamiento mientras se resuelve la ecuación, con la ayuda indispensable de la computadora, ya que ésta es la única manera de captarlos visualmente. Existen varias posibilidades al momento de asignar los valores que determinarán los colores:

- si el resultado se aproxima a cero
- si tiende al infinito
- si oscila entre varios estados

- si no exhibe ningún patrón discernible

En el primer caso ocurre dentro de los límites que comprenden la figura fractal; el segundo, fuera de sus límites; y los tercero y cuarto ocurren en la frontera.

Un ejemplo básico de un fractal es triángulo de Sierpinski. Este es uno de los fractales más simples que hay, fue inventado por Waclaw Sierpinski en 1919 y resulta de tomar un triángulo sólido equilátero, quitar un triángulo invertido dentro del original y repetir el proceso en cada triángulo sólido restante.



## 2.2 La Geometría Fractal en la Naturaleza y las Ciencias

*“...poseemos ahora una matemática tal que verdaderamente se puede ver en ella una especie de reflejo del pensamiento divino que crea el Universo”*

Adolphe Buhl

Es importante decir que los fractales no son exclusivos de las Matemáticas, sino que pueden ser usados en otras disciplinas. El origen y estudio de distintos fenómenos explicados por los modelos fractales corresponde determinarlos a las diferentes disciplinas donde se planteen, por ejemplo el Doctor Guillermo Romero <sup>5</sup>, junto con

---

<sup>5</sup> Guillermo Romero Meléndez, Mauricio Barroso Castorena, Jorge Huerta González, Manuel Santiago Bringas, Carlos García Valdez. The Fractal Structure, Efficiency, and Structural Change: The Case of the Mexican Stock Market.

otros autores, descubrieron evidencia contundente de que el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa de Valores tiene estructura fractal.

Como en todas las ramas, en su inicio existió cierto escepticismo ante el valor científico de esta disciplina, que fue acusada de ser excesivamente empírica, e incluso de tener poco rigor formal. Aunque hay que recordar que lo mismo les sucedió a importantes teorías de las matemáticas en su momento.

En la naturaleza, los objetos fractales aparecen en base a dos circunstancias: una de ellas en situación de frontera en la que se incluyen todos los casos en que entran en contacto dos medios, ya sean humanos, naturales, físicos o químicos o en dos superficies diferentes como fronteras entre países, nubes, riberas de ríos. Y la otra situación es la de árbol, que es en aquellos casos en los que se produce una ramificación con auto similitud, es decir, arbustos, plantas, tejidos arteriales, riachuelos, etcétera.

Gracias a los descubrimientos de la teoría del caos y de la geometría fractal, los científicos han podido comprender cómo sistemas, que anteriormente se creían caóticos, tienen patrones predecibles. Una de las aportaciones más importantes ha sido la capacidad de modelar fenómenos naturales como nubes, plantas, cadenas de montañas y fenómenos atmosféricos, entre otros.

Esta teoría también ha contribuido en campos tan diversos que no tienen nada que ver con la naturaleza, tales como la lingüística, la psicología, las finanzas e incluso tiene aplicaciones en el mundo del arte y especialmente en la música.

Los fractales no sólo son objetos, también se observan en la forma dinámica evolutiva de los sistemas complejos, dinámica que consta de ciclos, que a su vez forman parte de ciclos más complejos, que a su vez forman parte del desarrollo de la dinámica de otro gran ciclo.

## 2.3 La geometría fractal en las Artes

*“Las matemáticas, cuando se las comprende bien, poseen no solamente la verdad, sino también la suprema belleza”*

Bertrand Russell

La complejidad, simetría y balance de los fractales tiene un gran atractivo. A pesar de esto, el tipo de belleza que manejan parece un distinto tipo de estética, cuyas reglas son válidas únicamente desde el punto de vista matemático y computacional, es decir, esta estética y la asociada con las artes tradicionales son vistas como dos cosas totalmente diferentes.

Sin embargo, el revisar la estética “tradicional” desde este nuevo campo de conocimiento, permite descubrir nuevas relaciones y perspectivas. De hecho, el concepto de “belleza” según la estética tradicional y la “belleza” producida por iteraciones matemáticas tienen más cosas en común de las que se piensa.

Sin duda alguna, el esfuerzo y dedicación, seguidos por la satisfacción que implica ver un trabajo u obra terminados son iguales tanto para artistas como para científicos, como cita el matemático de la Universidad de Cambridge G.Hardy:

*"Los patrones creados por los matemáticos deben implicar la misma dedicación por alcanzar la belleza que aquellos de los poetas y los pintores. Tal como con los colores y las palabras, se deben encontrar arreglos armoniosos para las ideas. La primera prueba, es la belleza; en este mundo no hay lugar para matemáticas feas".<sup>6</sup>*

---

<sup>6</sup> [www.demasiadoarte.blogspot.com](http://www.demasiadoarte.blogspot.com)



La belleza o elegancia es un valor que ha atraído a muchos matemáticos, pero son los fractales los que han causado gran conmoción, simplemente porque son una representación visual de lo abstracto. Gracias a esto se puede afirmar que se han abierto puertas hacia una nueva perspectiva de lo que es estético.

El término belleza se ha relacionado íntimamente con el término de simetría y proporción. La Sección Áurea<sup>7</sup> ha sido un gran parte aguas para poder determinar la calidad de una composición, es decir, los objetos que la poseen pueden considerarse “estéticos” y armoniosos.

Desde los cuadros de Da Vinci, pasando por famosas catedrales, es posible ver en la tradición europea el uso de la Sección Áurea. A su vez, en la naturaleza se tienen innumerables ejemplos y patrones que obedecen esta regla: las espirales en las conchas marinas, las semillas de girasol, etc. De hecho, la Sección Áurea tiene una gran relación con la “Serie de Fibonacci”<sup>8</sup> y con la propiedad de autosemejanza de los fractales.

Esta relación nos permite afirmar que la belleza fractal y la estética tienen más intersecciones de las que se creen, y que cualquier objeto ya sea natural o creado por el hombre que cumpla con las propiedades de la Sección Áurea tienen también un poco de “belleza fractal”.

En cuestiones artísticas, por dar un ejemplo, en el ensayo “Order in Pollock’s Chaos”<sup>9</sup> se presentó un estudio, donde se demostró el sorprendente hecho de que las obras del reconocido pintor estadounidense Jackson Pollock poseen la cualidad de “dimensión fractal”. Las creaciones de Pollock (1912-1956) son reconocidas por su estilo “drip painting”<sup>10</sup>, relacionado con corrientes artísticas de la época como el surrealismo y el

---

<sup>7</sup> División armónica de una recta en extrema razón, es decir, el segmento menor es al segmento mayor como éste lo es a su totalidad.

<sup>8</sup> Cada número de la serie es el resultado de la suma de los dos anteriores.

<sup>9</sup> Revista *Scientific American*. Diciembre 2002

<sup>10</sup> Aplicación directa de la pintura al lienzo colocado en el suelo. Este método inmediato y directo fue creado por Jackson Pollock.

automatismo. Con este método, se podría decir que Pollock desobedecía las reglas de composición tradicionales y perseguía una expresión directa del inconsciente. De alguna forma, es posible afirmar que los trabajos de este artista fueron uno de los elementos que transformaron el panorama artístico hacia la posmodernidad. Aún así, las obras de Pollock fueron demeritadas, ya que, según los críticos, carecían de composición y por ende de valor artístico, ya que tenían el aspecto de poder haber sido hechas con una máquina, o por medio de un proceso aleatorio. Sin embargo, es a partir del estudio del Doctor Richard Taylor que se logra determinar con seguridad que la técnica de Pollock no puede tacharse de aleatoria y carente de forma. Es decir, que la "potencia" estética de sus cuadros radica realmente en una composición interna de naturaleza fractal. Mas allá de esto, se sabe que Pollock comenzó a experimentar con esta técnica alrededor de 1947, fecha por mucho anterior a los años 70's en que Mandelbrot acuñara el termino "fractal". Curiosamente, otras obras "automáticas", o las obras de aquellos autores que han pretendido imitar el estilo "drip painting" de Pollock no poseen la misma cualidad fractal que las del pintor. Por si esto fuera poco, el estudio demuestra cómo, conforme pasaba el tiempo, la técnica de Pollock iba mejorando, y paulatinamente el valor de la dimensión fractal de sus creaciones se incrementaba. Al ver la progresión de sus obras bajo la luz de este análisis, podemos concluir que quizá Pollock no perseguía un efecto aleatorio, más bien sus cuadros son una expresión de una composición fractal.

El descubrimiento de la calidad de fractal en las obras de Pollock aporta un nuevo sentido al concepto de estética. Este hecho abre todo un nuevo campo de investigación relacionado con la percepción humana de patrones fractales, reacciones emocionales posibles y la creación de nuevas formas de comunicación visual.

El concepto de "belleza" es comparable con un fractal; no importa la distancia desde la que se mire, siempre habrá un grado mayor de complejidad que admirar. Para ejemplificar esto, nada mejor que una cita del escritor argentino Jorge Luis Borges:

*"Un hombre se propone la tarea de dibujar el mundo. A lo largo de los años puebla un espacio con imágenes de provincias, de reinos, de montañas, de bahías, de naves, de islas,*

*de peces, de habitaciones, de instrumentos, de astros, de caballos y de personas. Poco antes de morir, descubre que ese paciente laberinto de líneas traza la imagen de su cara".<sup>11</sup>*

Igualmente, una de sus obras maestras, "El Aleph", constituye una colosal metáfora sobre la autosimilitud del universo, una cualidad de naturaleza fractal.

## **2.4 Repetición de Patrones**

A través de los años, el hombre ha ido descubriendo que la naturaleza posee muchas regularidades que pueden ser analizadas, predichas y explotadas. Con el paso del tiempo se han ido estableciendo leyes inmutables sobre el comportamiento del universo y la tarea de los científicos se ha enfocado en esclarecer dichas leyes para cualquier fenómeno en particular. En nuestros días todo el proceso de desarrollo y refinamiento de los patrones y relaciones que esconde el Universo se ha vuelto más fácil, probablemente porque las matemáticas actuales se utilizan en más áreas que antes, pero también porque se han vuelto esenciales en la vida cotidiana.

Ya sea en platos decorativos sumerios, la construcción de pirámides y monumentos mayas, las catedrales góticas o incluso obras del gran arquitecto modernista Gaudí se han hecho presentes la simetría y la repetición de patrones, gracias al valor estético que éstos manejan. Y es que éstas interesan tanto al matemático como al artista, ya que ambos están íntimamente asociados con una admiración por la forma estructurada, que es innata en el ser humano.

Con su trabajo, Escher logra llenar importantes vacíos que habían en relación con las Artes y la Matemática, al representar en su obra construcciones imposibles, la exploración de lo infinito, las combinaciones de motivos que se transforman gradualmente

---

<sup>11</sup> Jorge Luis Borges, 1999, El hacedor.

en formas totalmente diferentes e incluso se inspira en la teoría matemática de grupos, y en una excelente comprensión de la repetición de patrones y su evolución dinámica.

La belleza, como concepto implícito en la simetría, era ya una preocupación para muchos filósofos, desde la antigüedad hasta nuestros días.

Platón, uno de los más grandes buscadores de belleza habla de ella como una cualidad absoluta, que no depende de características físicas ni de percepciones y lo liga directamente al bien diciendo “*el bien se puede expresar en belleza, simetría y verdad*”.<sup>12</sup>

Aristóteles sostiene una concepción estética similar a la de Platón, aunque para él la belleza también se da en las cosas inmóviles, es contemplativa y parte del conocimiento de las cosas bellas concretas, cercanas al hombre; para caracterizar a la belleza, dice Aristóteles, son necesarios el orden y la simetría.

De aquí se puede ver que para el pensamiento griego, el estudio de la simetría propone elementos claves para el estudio y la determinación de la belleza en los objetos.

Artísticamente hablando, se tiene como referencia inicial el arte sumerio, en cuyos diseños y construcciones se puede apreciar cierto interés por el valor estético proyectado a través de la simetría, y cuya influencia se puede observar muchos siglos después en el arte.

De alguna u otra manera, todas las corrientes artísticas tienen cierta relación con la simetría, incluso aquellas que se inclinan por atenuarla, modificarla o hasta perderla, ya que para que haya asimetría se necesita la simetría como punto de referencia.

---

<sup>12</sup> Platon. Trad. Juan García Bacca. 1981. Filebo.

