Capítulo 1

Preliminares

En este primer capítulo introduciremos de manera general el término Cálculo Fraccionario. Trataremos de dejar en claro a qué hace referencia este último y daremos un par de razones en relación a por qué en primera instancia nos puede parecer una mala elección de palabras. De la misma forma echaremos un vistazo a través de su historia y mencionaremos algunos de los primeros resultados y quiénes fueron sus descubridores. Y por último, mencionaremos algunas funciones que aparecen de forma natural en él y un par de definiciones que nos serán de gran apoyo mientras se vaya avanzando.

1.1. ¿Cálculo Fraccionario?

Para cualquier persona que tenga nociones de cálculo elemental toparse con el símbolo $D = \frac{d}{dx}$ no representa ningún problema. Incluso si nos tomamos la libertad de escribir $D^n = \frac{d^n}{dx^n}$ se tiene conocimiento del concepto planteado y la metodología operativa que se está efectuando, siempre y cuando $n \in N$. Sin embargo, podemos preguntarnos si existe la posibilidad de que los índices de iteración de los operadores de diferenciación y de integración, n, disminuyan sus restricciones y encuentren lugar en otro conjunto de elementos, por ejemplo $n \in \Re$. Para fines de esta sección nos bastará con saber que la respuesta a esta pregunta es afirmativa y que además ha dado pie a una "nueva" rama del Análisis Matemático llamada Cálculo Fraccionario.

El matemático Igor Podlubny [10] afirma que el nombre de Cálculo Fraccionario no es más que otro de los términos equivocados que suele usar la Matemática. En este sentido él mismo define a esta última como el arte de dar nombres desorientadores a las cosas, pero que aún así resguarda la esen-

cia de las mismas. Por tal motivo podemos pensar que éste no es el nombre ideal para transmitir la idea encerrada detrás de él; sin embargo, sí es el más elemental.

Cuando hablamos de Cálculo Fraccionario no nos referimos a operaciones relacionadas con fracciones. Tampoco se quiere dar a entender una fracción del cálculo de orden entero que conocemos —*diferencial*, *integral*, *variacional*—. Al hablar de cálculo fraccionario se habla de la teoría de operadores que describen procesos de derivación e integración de órdenes arbitrarios. Esta teoría a su vez es la generalización de los operadores de derivación e integración clásicos y las consecuencias tanto teóricas como prácticas productos de ella.

De aquí en adelante el símbolo

$$D^{\alpha} f(t)$$

representará la derivada fraccionaria de orden $\alpha \in \Re$ de la función f, mientras que

$$I^{\alpha} f(t)$$

denotará la integral fraccionaria de orden $\alpha \in \Re$ aplicada a f.

Como podemos ver, señalar el nombre como fraccionario no parece algo coherente, pues los números reales están constituidos por más elementos aparte de los números racionales. Un nombre más adecuado, que dejaremos como alternativo, será entonces Cálculo de orden arbitrario, el cual usaremos de manera indistinta a lo largo del trabajo.

Con lo anterior, podemos aventurarnos en intuir que si llevamos estos operadores al terreno de las ecuaciones diferenciales (integrales) podremos encontrar una generalización de éstas, las cuales se convertirán en *ecuaciones diferenciales* (*integrales*) *fraccionarias*.

1.2. Un poco de historia

No existe nada que haga del nacimiento del Cálculo Fraccionario un misterio histórico. Su nacimiento está basado en el mismo principio que ha impulsado a muchos de los avances matemáticos, es decir, está basado meramente en la curiosidad. Y así fue como a través de una carta fechada el 30 de septiembre de 1695 el Marqués de L'Hopital le preguntó a Leibniz: "¿qué sucedería si en la notación $\frac{d^n y}{dx^n}, \quad n = \frac{1}{2}$?". A lo que Leibniz contestó: "una aparente paradoja de la que se extraerán consecuencias útiles algún día". En la literatura este hecho ha sido concebido como el nacimiento del Cálculo Fraccionario.

Posteriormente algunos matemáticos emprendieron investigaciones para definir formalmente la derivada fraccionaria de una función cualquiera. Euler y Laplace figuran entre los primeros personajes que encontraron algunas aproximaciones. Sin embargo, no fue sino hasta 1819 que S.F. Lacroix [16] dedicó dos hojas, de las 700 de su libro, a explorar la posibilidad de que la función $y = x^m$ tuviera una derivada de orden generalizado. Para ello lo primero que se definió fue la derivada de orden n.

Partiendo de $y = x^m$ se obtuvo que

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}$$

con m, n enteros positivos y $m \geq n$.

A partir de este resultado es correcto usar la función gamma de Euler (1707-1783), Γ, para sustituir los factoriales y aprovecharla para cambiar el orden de derivación n por $\alpha \in (0,1)$ y al entero m por un número $a \in \Re_+$. Esto es

$$\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a-\alpha+1)} x^{a-\alpha}$$

Si hacemos que $\alpha = \frac{1}{2}$ el resultado es

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} x^{a-\frac{1}{2}}$$

Como ejemplo concreto es muy sencillo considerar la función $y = x$ y calcular su derivada de orden $\alpha = \frac{1}{2}$. El resultado es

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} y}{dx^{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

que al menos tiene sentido operativamente hablando si restringimos los valores de x a $x \geq 0$.

Algunos años después Liouville (1809-1882) se unió a las investigaciones inspirado por trabajos de Fourier y Abel, quienes también encontraron aproximaciones y utilizaron la integral en un sentido generalizado. El punto de partida de Liouville está basado en las derivadas de funciones exponenciales y como caso particular utilizó las derivadas de orden entero m de e^{ax}

$$D^m e^{ax} = a^m e^{ax}$$

con $a \in \Re$. Con este resultado intercambió m por un número p arbitrario para formular

$$D^p e^{ax} = a^p e^{ax}$$

y posteriormente aplicarla a funciones que pueden ser desarrolladas en series del tipo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$$

obteniendo la expresión

$$D^p f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^p e^{a_n x}$$

que representa la derivada de orden generalizado p. Esta fórmula es conocida como la primera definición de Liouville y está restringida a los valores de p para los cuales la sumatoria anterior converge.

A pesar de que las 2 definiciones que hemos planteado son consistentes en su formulación, ninguna estaba dispuesta a consolidarse como la versión definitiva. Debido a que ambas cuentan con un carácter limitado, pues sólo son válidas sobre un conjunto muy restringido de funciones y carecen de interpretación física, la atención se desplazó enteramente en tratar de desarrollar una integral de orden arbitrario. A este respecto los resultados de *Cauchy* son especialmente importantes para la generación de la teoría fundamental del Cálculo Fraccionario.

Por último cabe destacar que en el año de 1974 se llevó a cabo la primera conferencia internacional sobre Cálculo Fraccionario en la Universidad de New Haven. El auditorio constó de 94 investigadores sobre el tema y se presentaron 26 contribuciones. Posteriormente se realizaron eventos parecidos en Glasgow (1984), Tokyo (1989) y Varna (1996). De 1975 a la fecha se han publicado alrededor de 600 artículos y se han creado 2 revistas especializadas: "Fractional Calculus and Applied Analysis" y "Journal of Fractional Calculus".

1.3. Funciones frecuentes en el Cálculo Fraccionario

Para el desarrollo de las definiciones de los *operadores fraccionarios* es necesario introducir algunas funciones que, como se verá más adelante, juegan un papel muy importante en la teoría de derivación e integración de orden arbitrario. Estas funciones son la función Gamma de Euler, la función Beta, la función de Mittag-Leffler y el operador Transformada de Laplace.

1.3.1. Función Gamma $\Gamma(z)$

La interpretación más simple que podemos dar de esta función es que constituye la generalización del factorial de todo número real, aunque el argumento de ésta sea en general un número complejo. La función $\Gamma(z)$ está definida a través de una integral impropia como sigue

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^{z-1} du, \qquad Re(z) > 0 \tag{1.1}$$

la cual converge en la mitad derecha del plano complejo.

Si se tuviera el caso en que z es un entero positivo se puede escribir a Γ de la siguiente manera

$$\Gamma(z) = (z-1)! \tag{1.2}$$

Una propiedad básica

La propiedad más conocida y más utilizada tal vez sea la siguiente

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{1.3}$$

que al usar (1.2) resulta

$$\Gamma(z+1) = z! \qquad \forall z \in N \tag{1.4}$$

La ecuación (1.4) puede ser fácilmente probada mediante el uso de la integración por partes.

Algunos valores inmediatos de $\Gamma(z)$ son los siguientes

- $\Gamma(2) = 1$
- $\Gamma(3) = 3!$
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Mediante el uso de la función *Gamma* podemos definir una nueva función, la cual tiene la forma

$$\Phi(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \forall t \in \Re \tag{1.5}$$

que resulta muy importante para plantear la integral generalizada.

1.3.2. Función Beta

Esta función fue estudiada principalmente por Euler y Legendre; sin embargo, su nombre le fue dado por Jacques Binet. La función *Beta* resulta de una combinación de Γ evaluada en distintos valores. Su definición clásica es la siguiente

$$B(p,q) = \int_0^1 (1-u)^{p-1} u^{q-1} du, \qquad \forall p,q \in \Re_+ \tag{1.6}$$

y cumple la siguiente propiedad

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(q,p)$$

1.3.3. Función de Mittag-Leffler

Esta función es una generalización de la *exponencial* representada en serie de potencias. Su uso se ha adecuado con buenos resultados en el territorio de las ecuaciones diferenciales de orden arbitrario y muchos investigadores en el tema la consideran como la análoga a la exponencial en ecuaciones diferenciales ordinarias. La función de Mittag-Leffler se define como sigue

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \forall \alpha, \beta \in \Re_+, z \in C \tag{1.7}$$

Nótese que cuando se evalúa $E_{1,1}(z)$ obtenemos e^z, que resulta ser sólo un caso pasticular.

1.3.4. Transformada de Laplace

Si se ha estado en contacto con las bases de las ecuaciones diferenciales ordinarias, se sabrá que la Transformada de Laplace constituye una he-

rramienta muy importante en la solución de esta clase de ecuaciones. Su definición está dada mediante

$$Ł\{f\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s), \qquad s \in \Re \tag{1.8}$$

La Transformada de Laplace de una función f existe si la integral (1.8) converge. Lo cual se cumple siempre que f sea al menos seccionalmente continua y de orden exponencial. Asimismo, F(s) está definida para los números reales $s > a$, donde a es una constante que depende del comportamiento de crecimiento de f

Transformada de Laplace de la derivada de orden "n" de una función f

En muchos problemas aplicados resulta necesario encontrar la transformada de la derivada de una función con el fin de utilizar condiciones iniciales con interpretación física conocida. La ecuación

$$Ł\{f^n\}(s) = s^n F(s) - \sum_{k=o}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \tag{1.9}$$

donde $F(s)$ viene de (1.8), plasma este resultado y nos será de gran utilidad para encontrar aplicaciones de los *operadores fraccionarios*.

Convolución de funciones

La convolución de 2 funciones está definida mediante el producto de la forma

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau \tag{1.10}$$

y es un método muy usado en varios problemas importantes de la Matemática.

Su transformada de Laplace está dada en

$$Ł\{f * g\}(s) = Ł\{f\}(s) Ł\{g\}(s) \tag{1.11}$$

1.4. Definiciones, resultados y notaciones

Para estudiar las propiedades de los operadores de derivación e integración fraccionaria es necesario citar un par de definiciones y un teorema que nos ayuden a generar un mejor entendimiento. La primera es la definición del espacio de funciones $L_1(a,b)$ y la segunda es la de espacio $f \in C^m[a,b]$, además del Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue.

1.4.1. Definición de Espacio $L_1(a,b)$

El espacio $L_1(a,b)$ está formado por las funciones medibles $f : [a,b] \to \Re$ para las que $|f(x)|$ es integrable Lebesgue. Esto es, $\int_a^b |f(x)|dx < \infty$. La norma de cualquier elemento f de este espacio se define como

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$$

1.4.2. Definición de espacio $C^m[a,b]$

Al espacio de funciones $f : [a,b] \to \Re$ que tienen m-ésima derivada continua en $[a,b]$ se le denota por $C^m[a,b]$.

Esta definición será fundamental para la construcción del operador de derivación fraccionaria.

1.4.3. Teorema de la Convergencia Dominada de Lebesgue

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables convergentes casi donde quiera a una función f medible y de valor real. Si existe una función integrable g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, entonces f es integrable y

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

1.4.4. Notaciones

De ahora en adelante asumiremos las siguientes notaciones a lo largo del trabajo:

$$[a,b] \subset \Re, \qquad \alpha \in \Re_+, \qquad m = -[-\alpha]$$

Donde $[-\alpha]$ la parte entera de $-\alpha$.