Capítulo 6

Predicciones modificando la fórmula de Feder.

En este capítulo presentamos los resultados finales[1] de un método de predicción para el Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores, basado en una fórmula que simula el Movimiento Browniano Fraccionario. El método que se presenta a continuación representa una notable mejora en cuanto a la exactitud de las predicciones y el número de simulaciones que deben hacerse para realizar el estudio, comparado con la tesis de Carlos Alberto García [4], para la Licenciatura de Actuaría, en la UDLA en 1996.

6.1. H y el Movimiento Browniano Fraccionario.

Podemos explicar el movimiento Browniano Fraccionario como una función $V_H(t)$, con la propiedad:

$$\Delta V_H \propto \Delta t^H \tag{6.1}$$

Con $\Delta t = t_2 - t_1, \Delta V_H = \Delta V_H(t_2) - \Delta V_H(t_1)$, y $0 < H < 1$. Para $H = \frac{1}{2}$, obtenemos el movimiento Browniano, para $H > \frac{1}{2}$, tenemos como ya mencionamos, persistencia y para $H < \frac{1}{2}$, antipersistencia. De manera más exacta[2], el movimiento browniano fraccionario es un proceso aleatorio $V : [0, \infty] \hookrightarrow \Re$, en algún espacio probabilístico tal que:

[1] Resultados preliminares fueron presentados en[20].

[2] Ver[2], sección 16.7

- con probabilidad 1, V es continuo y $V(0) = 0$.
- para cualquier $t > 0$, y $h > 0$, el incremento $V(t+h) - V(t)$ tiene la distribución normal con media cero y varianza h^{2H}.

Como ya sabemos, la gráfica del movimiento Browniano fraccionario con exponente de Hurst H tendrá dimensión $D = 2 - H$.

6.2. Simulando Series de Tiempo Fractales.

En 1988 Feder [3] produjo una fórmula para crear series de tiempo fractales, de una secuencia de números Gaussianos aleatorios. La fórmula es:

$$B_H(t) - B_H(t-1) =$$

$$\frac{n^{-H}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}\{\sum_{i=1}^{n} i^{H-\frac{1}{2}}\xi_{(1+n(M+t)-i)} + \sum_{i=1}^{n(M-1)}((n+i)^{H-\frac{1}{2}} - i^{H-\frac{1}{2}})\xi_{(1+n(M-1+t)-i)}\} \tag{6.2}$$

Aquí $\{\xi_i\}$ es un conjunto de variables aleatorias con varianza unitaria y media cero. M es el número de periodos de tiempo, la unidad de tiempo se divide en n intervalos[3].

Feder obtuvo esta fórmula usando una versión discreta [11], de la siguiente integral [12].

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}\int_{-\infty}^{t}(t-t')^{H-\frac{1}{2}}dB(t') \tag{6.3}$$

Esta integral nos dice que los valores de la función $B_H(t)$ dependen de todos los incrementos previos $dB(t')$ en el tiempo $t' < t$ de un proceso Gaussiano ordinario $B(t)$ con media cero y varianza unitaria. Basándose en la fórmula (6.2) para los incrementos del movimiento Browniano Fraccionario, el Dr. Guillermo Romero[4] y Carlos Alberto García en [4] propusieron la siguiente fórmula para simular Browniano fraccionario:

[3] Ver[3], 9.6.

[4] Departamento de Física y Matemáticas, UDLA, Puebla.

$$B_H(t) =$$

$$\frac{n^{-H}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}\{\sum_{i=1}^{nt} i^{H-\frac{1}{2}}\xi_{(1+n(M+t)-i)} + \sum_{i=1}^{n(M-t)}((nt+i)^{H-\frac{1}{2}} - i^{H-\frac{1}{2}})\xi_{(1+nM-i)}\} \tag{6.4}$$

La fórmula (6.4) ha producido resultados experimentales satisfactorios (ver [15]). La usaremos en lo sucesivo.

6.3. Un método de Predicción para Series de Tiempo fractal.

Presentamos a continuación un método predictivo para series de tiempo fractal o movimiento browniano fraccionario. Fue aplicado a los rendimientos del Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de la Bolsa Mexicana de Valores. El método se puede resumir como sigue:

1. Primero, calculamos la dimensión $D = 2 - H$ de la gráfica correspondiente a los rendimientos del IPC, del 22 de Noviembre del 2002 al 16 de Febrero del 2004. Usamos el método de conteo de cajas implementado en el paquete Mathematica. Obtuvimos 312 observaciones (La Bolsa sólo opera en días hábiles), y un valor de H de .7812.

2. A continuación usamos nuestra fórmula de simulación, mediante el paquete Mathematica, para producir 225 series de tiempo fractales. Simulamos 25 gráficas, de 30 datos, para cada uno de los siguientes valores de H, .7449, .757, .7691, .7812, .7933, .8054, .8175, .8296, .8447.

3. Después estudiamos la evolución de las gráficas simuladas con respecto a la real, en los 15 siguientes días (operativos) a partir del 17 de febrero del 2004. Ajustamos la escala de las gráficas simuladas, para tener el mismo máximo y mínimo de la gráfica del IPC. Entonces escogemos las gráficas que permanecen por más tiempo en la ϵ - vecindad tubular de la gráfica real, para los siguientes valores de ϵ: 50,25,$\frac{25}{2}$,$\cdots$,$\frac{25}{16}$.

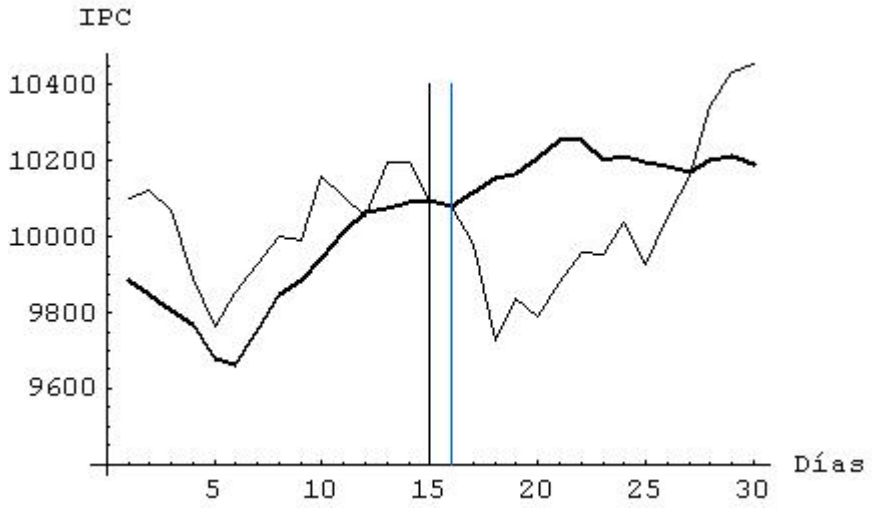

Figura 6.1: La mejor predicción a un día, la línea más gruesa es la predicción, mientras que la más ligera es la gráfica real del IPC, el día del ajuste (15) está marcado con una línea vertical, y el día 16 con una línea vertical azul. Esta predicción tuvo un error de sólo .0027 % con respecto al IPC.

6.4. Resultados Gráficos, Método de Predicción a Corto Plazo.

Presentamos a nivel gráfico los resultados del método explicado en la sección anterior, con una operación adicional: Aplicamos una translación vertical, de manera que los valores en el día 15 sean iguales al valor de la gráfica real del IPC, el mismo día.

Aplicamos el método 50 veces, haciendo uso de un equipo de cómputo SUN, obteniendo 102 simulaciones y gráficas.

6.4.1. Análisis a 1 día

Las 2 mejores predicciones.

Las siguientes predicciones (ver figuras 6.1 y 6.2) fueron las mejores predicciones cuando el objetivo fue predecir a 1 día después del ajuste en el día 15 (es decir tratarán de predecir el valor del IPC en el día 16).

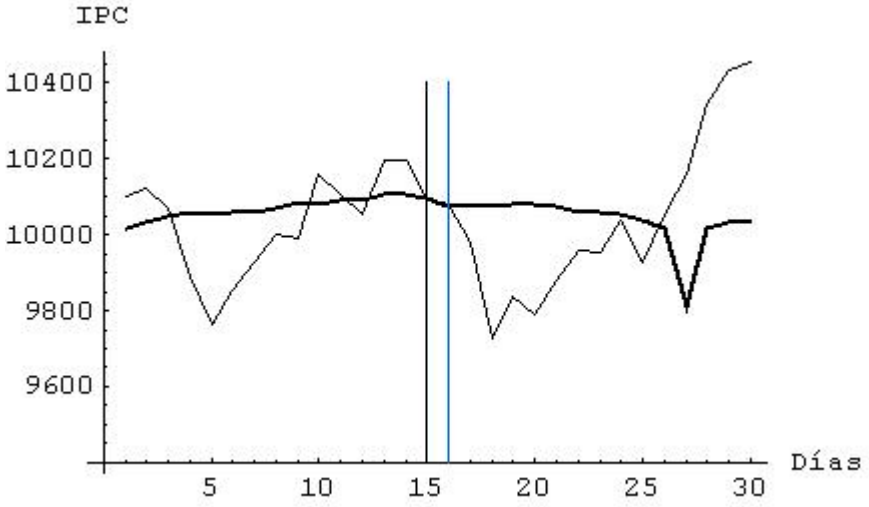

Figura 6.2: La 2da. mejor predicción a un día, la línea más gruesa es la predicción, mientras que la más ligera es la gráfica real del IPC, el día del ajuste (15) está marcado con una línea vertical, y el día 16 con una línea vertical azul. Esta predicción tuvo un error de sólo .013 % con respecto al IPC.

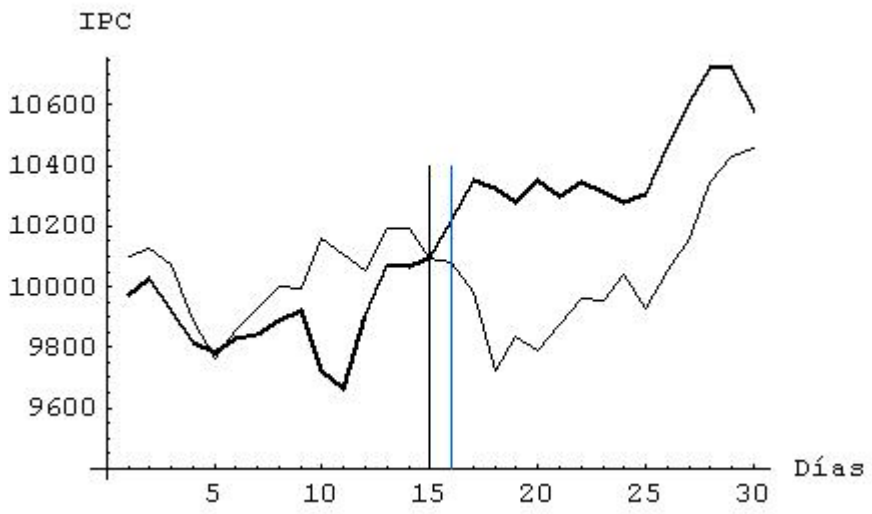

Figura 6.3: La peor predicción a un día, la línea más gruesa es la predicción, mientras que la más ligera es la gráfica real del IPC, el día del ajuste (15) está marcado con una línea vertical, y el día 16 con una línea vertical azul. Esta predicción tuvo un error de 1.38 % con respecto al IPC.

Como podemos ver, las predicciones son excelentes, con un error por debajo del .02 %.

Las 2 peores predicciones.

Las siguientes predicciones fueron las peores (ver figuras 6.3 y 6.4) predicciones cuando el objetivo fue predecir a 1 día después del ajuste en el día 15 (es decir tratarán de predecir el valor del IPC en el día 16).

6.4.2. Análisis a 3 días

Las 2 mejores predicciones.

Las siguientes predicciones fueron las mejores (ver figuras 6.5 y 6.6) cuando el objetivo fue predecir a 3 días después del ajuste en el día 15 (es decir tratarán de predecir el valor del IPC en el día 18).

Como podemos ver, las predicciones son muy buenas, con un error por debajo del 1 %.

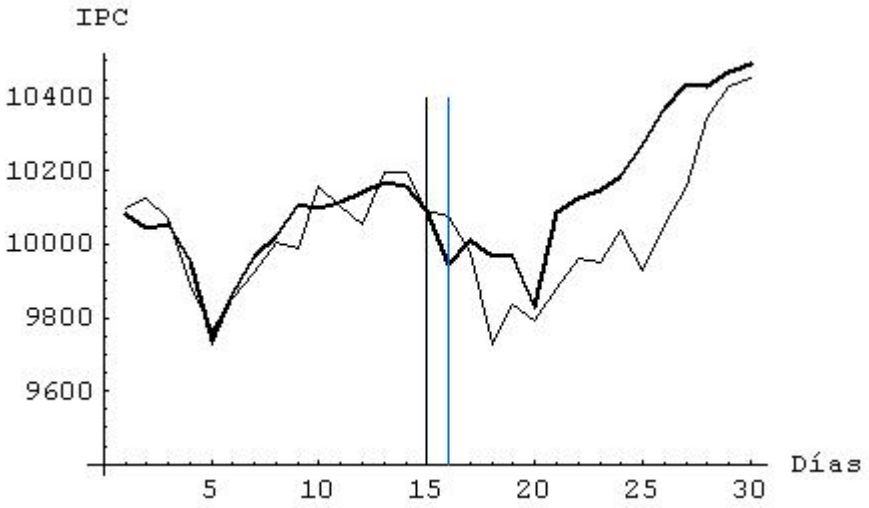

Figura 6.4: La 2da. peor predicción a un día, la línea más gruesa es la predicción, mientras que la más ligera es la gráfica real del IPC, el día del ajuste (15) está marcado con una línea vertical, y el día 16 con una línea vertical azul. Esta predicción tuvo un error de 1.34 % con respecto al IPC.

Las 2 peores predicciones.

Las siguientes predicciones fueron las peores (ver figuras 6.7 y 6.8) cuando el objetivo fue predecir a 3 días después del ajuste en el día 15 (es decir tratarán de predecir el valor del IPC en el día 18).

A pesar de ser las peores predicciones, vemos que el error se encuentra muy por debajo del 10 %, por lo que podemos concluir que el método es altamente efectivo con el ajuste a corto plazo, sobre todo prediciendo a un día.

6.5. Predicción a Largo Plazo

La predicción a largo plazo, es, por su propia naturaleza, una tarea más ardua, pues la curva predictiva se aleja cada vez más, del punto inicial de donde partió, y por lo tanto su fuerza predictiva se debilita, pues la historia *individual* de cada curva va tomando más fuerza, y no su apego a su *hermana fractal*, la curva real del IPC.

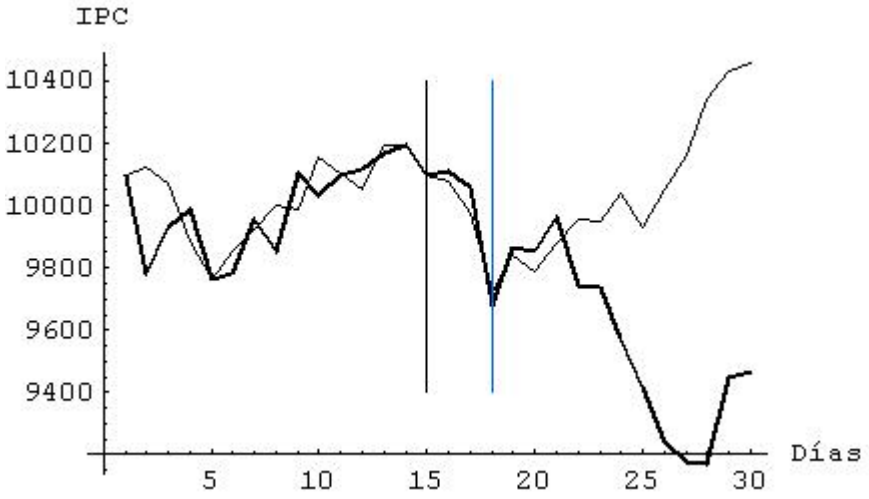

Figura 6.5: La mejor predicción a tres días, la línea más gruesa es la predicción, mientras que la más ligera es la gráfica real del IPC, el día del ajuste (15) está marcado con una línea vertical, y el día 18 con una línea vertical azul. Esta predicción tuvo un error de 0.505 % con respecto al IPC.

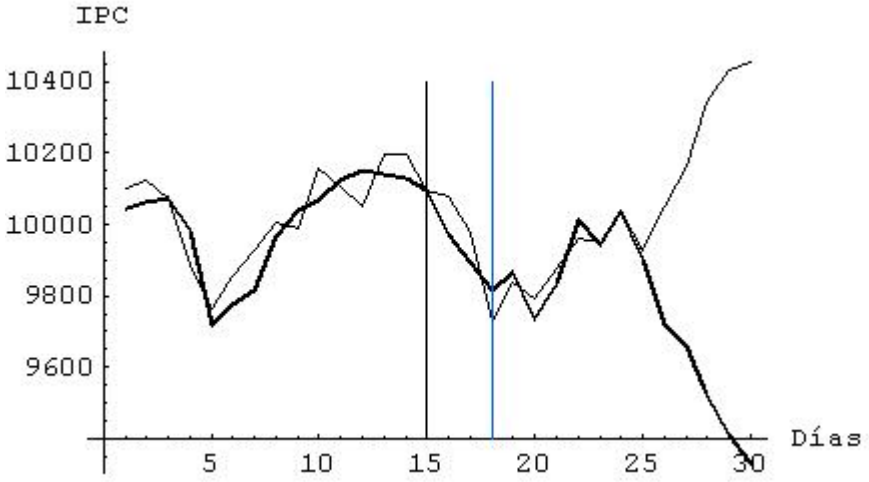

Figura 6.6: La segunda mejor predicción a tres días. El error aumentó a .93 %.

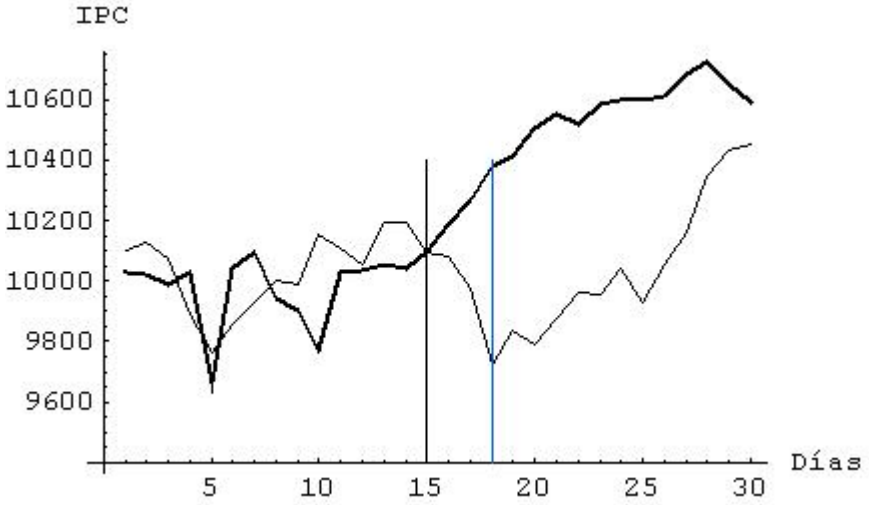

Figura 6.7: La peor predicción a tres días, la línea más gruesa es la predicción, mientras que la más ligera es la gráfica real del IPC, el día del ajuste (15) está marcado con una línea vertical, y el día 18 con una línea vertical azul. Esta predicción tuvo un error de 6.7 %.

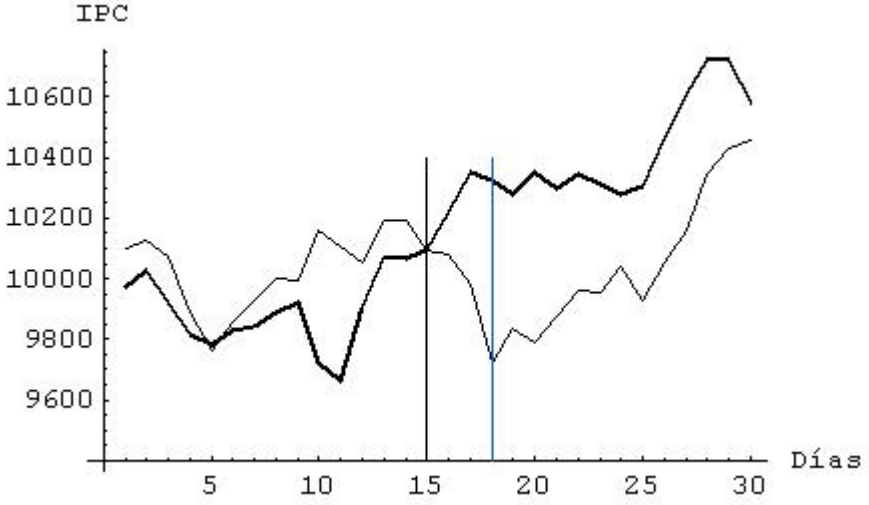

Figura 6.8: La segunda peor predicción a tres días. El error disminuyó a 6.1 %.

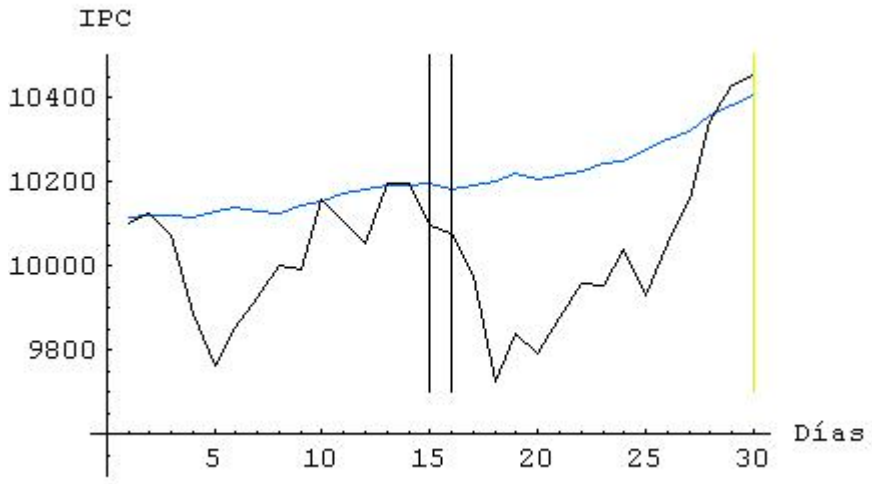

Figura 6.9: La mejor predicción con respecto al día 30, con un error de sólo .04 %. Se marca con dos líneas verticales negras el día del ajuste de signo, y con una línea vertical amarilla el día de predicción (30)

Sin embargo nuestras predicciones tuvieron resultados bastante satisfactorios. Al parecer nuestras simulaciones no olvidan que tienen un *pasado común* con el IPC. A continuación presentamos las dos mejores predicciones (ver figuras 6.9 y 6.10), que simularon mejor el comportamiento de la bolsa a un mes (30 días operativos, aproximadamente mes y $\frac{1}{2}$ en tiempo real.). El criterio de selección fue su apego a la curva real y su exactitud para predecir el valor real del IPC en el día 30. Cabe mencionar, que a largo plazo se realizó un ajuste de signo en el día 16, es decir, encontramos que si la curva simulada seguía una tendencia equivocada durante el primer día, esto se debía a que tomaba el signo (camino) equivocado, sin embargo, al reflejar la curva sobre el eje de las abcisas, se elimina este error, obteniendo mejores predicciones.(si la curva seguía el camino más adecuado por si sola, no era necesario el ajuste.)

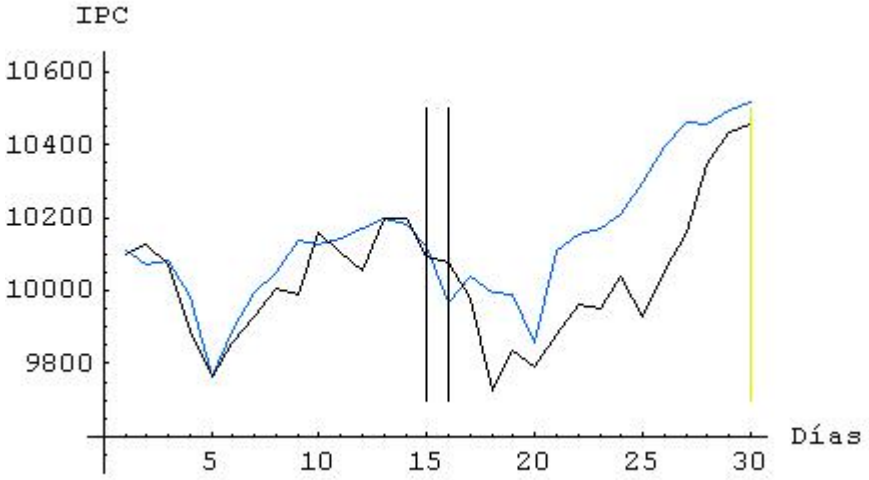

Figura 6.10: La segunda mejor predicción con respecto al día 30, tiene un error de sólo .05 %. Se marca con dos líneas verticales negras el día del ajuste de signo, y con una línea vertical amarilla el día de predicción (30)