Capítulo 3

La estructura fractal de los mercados de capitales

Los fractales han tenido un profundo impacto en el análisis estadístico que no ha sido ampliamente reconocido. La naturaleza no es una serie de patrones repetitivos sino que está caracterizada por una aleatoriedad local y un orden global. Cada fractal en la vida real es diferente en detalle pero similar en concepto. cada Manzano es distinto (tamaño, color, número de ramas etc.) pero todos los Manzanos son fácilmente reconocibles como grupo. Los fractales están governados por una estructura estadística global, mientras que mantienen aleatoriedad local. Para el estudio económico y de mercado, esto puede tener un fuerte impacto.

3.1. Introducción a los fractales

El desarrollo de la geometría fractal ha sido de los sucesos matemáticos mas fascinantes de los últimos tiempos, con este desarrollo los matemáticos han podido crear imágenes naturales con unas simples reglas; de esta simplicidad surge la complejidad y los fractales le han dado una cierta belleza al caos. El darnos cuenta de que los sistemas no lineales producen fractales resulta muy interesante. La mayor parte de la naturaleza y las series de tiempo son mejor descritas con fractales. La naturaleza es *no lineal* y los fractales son la geometría del caos.

La visión Fractal del mundo es muy diferente a la que fue planteada por Euclides, fueron los griegos quienes al llevar el conocimiento y la ciencia a

la cultura occidental, trataron de buscar un orden a todo, figuras puras que estaban *por debajo* de la caótica estructura del mundo, fueron ellos quienes nos inculcaron a buscar estas formas geométricas puras en el aparente caos del mundo. Asimismo hoy en día los economistas buscan un orden detrás de la estructura caótica de la transacciones diarias en un mercado. Los Griegos tenían un fervor casi obsesivo por relacionar el orden de los números con el orden del universo, y fue Euclides quien recopiló trabajos y leyes de Pitágoras, Aristóteles y otros, haciendo un sistema de todos ellos. Esta estructura básica con axiomas, teoremas y pruebas fue usada para crear la geometría plana que no es muy distinta a la que conocemos hoy en día, miles de años después.

Las figuras que produce este sistema, redujeron la naturaleza a puntos, líneas, planos y superficies perfectas y lisas, ninguna tenía hoyos ni asperezas, para ellos la naturaleza podía producir cosas perfectas, completas y simétricas como conos, esféras cilíndros y bloques en un plano tridimensional. Sin embargo la naturaleza parece aborrecer la simetría tanto como el equilibrio, las figuras naturales no son ni siquiera aproximaciones de formas euclidianas. Si quisiéramos dibujar una montaña con una computadora usando geometría clásica necesitaríamos miles de líneas y curvas que ocuparían una gran cantidad de memoria RAM[1]. Pero usando geometría fractal, puede replicarse una montaña de manera dramáticamente real repitiendo unas cuantas reglas.

Benoît Mandelbrot puede considerarse el padre de los fractales, que al igual que Euclides, recopiló ideas de otros matemáticos que encontraban *monstruos* que no podían definir con geometría clásica. Combinando todo esto creo una especie de geometría basada en la asimetría y desigualdad.

Tal vez podemos ver el fracaso de la geometría Euclidiana de la siguiente manera: en esta geometría en cuanto más nos acerquemos a un objeto más simple se vuelve, Un cubo tridimensional se vuelve un plano bidimensional y así hasta llegar a un punto. Sin embargo los objetos naturales se vuelven cada vez más complejos, en cuanto más cerca uno les mire. hasta su estructura atómica y subatómica. Así son los fractales, entre más nos acerquemos más detalles encontramos .

Entonces, ¿Qué son los fractales? Mandelbrot originalmente los definió basandose en su dimensión topológica. Pero más tarde rechazó esta definición. Podemos usar la siguiente:

> Los fractales son objetos en donde las partes están de alguna manera relacionadas al todo.

[1]Random Access memory.

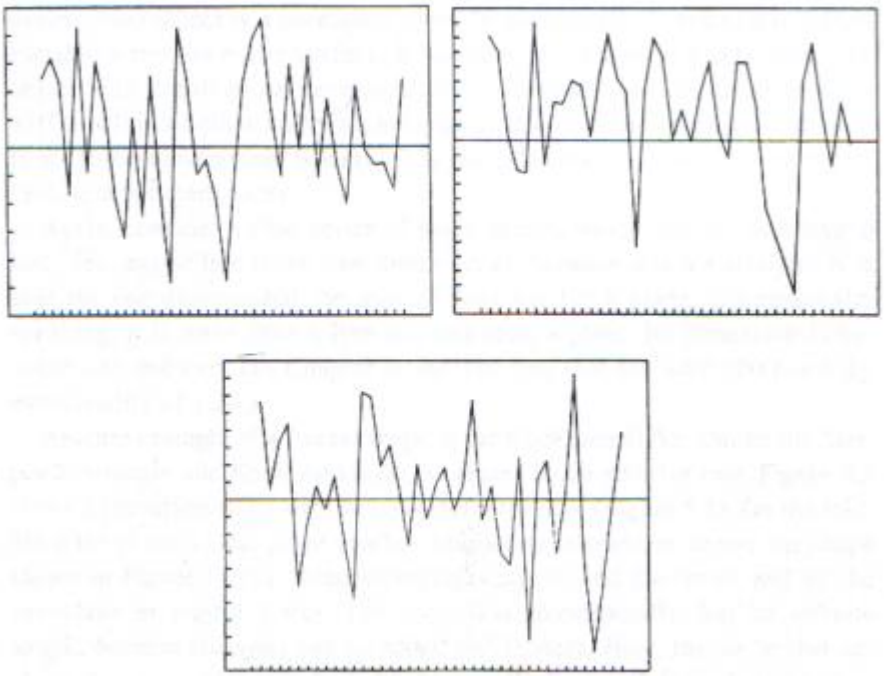

Figura 3.1: Autosimilitud en los rendimientos del S&P 500: rendimientos diarios, semanales y mensuales.¿Puede usted adivinar cúal es cada uno?

Los fractales son auto-referenciales o auto-similares. Uno de los más fáciles de notar puede ser un árbol, donde cada rama, que a su vez posee ramas más pequeñas, se parece al árbol completo.

Las figuras fractales muestran autosimilitud con respecto al espacio, asimismo las series de tiempo fractal muestran *autosimilitud estadística con respecto al tiempo*. Veamos la siguiente figura. En ella se muestran series de tiempo que corresponden a los rendimientos del S&P 500 en diferentes escalas de tiempo, diario, semanal, mensual. Sin poner las escalas en los ejes X e Y es praticamente imposible distinguir unos de otros, y vemos que los fractales y la autosimilitud aparecen en el mundo financiero.

3.2. Imágenes Fractales

Una imagen fractal se puede generar de distintas formas. La manera más simple es tomar una regla sencilla e iterarla una y otra vez. Veamos la figura

Figura 3.2: El famoso triangulo de Sierpinski resulta de tomar un triangulo sólido equilatero, quitar un triangulo invertido dentro del triangulo original, y repetir el proceso sobre cada parte sólida restante.

3.2, donde esto ocurre.

Si quitamos un triángulo equilátero invertido del centro del original, tendremos otros tres trángulos sólidos, en el mismo espacio con un hueco en el centro, al siguientes paso tendremos 9 triangulos sólidos y 4 huecos de triangulos invertidos, etc. Tenemos complejidad infinita dentro de un espacio finito. Este fractal, es llamado el triángulo de Sierpinski. Ahora, si tratamos de aplicar la geometría euclidiana a esta figura, no podremos, ya que no es una línea, de una dimensión ni tampoco un triangulo sólido de dos dimensiones, pues tiene agujeros. Su dimensión está entre 1 y 2. Es aproximadamente 1.58, una dimensión fraccionaria o fractal. Este tipo de dimesiones no enteras son típicas en los fractales.

Se dice que la intuición de Mandelbrot al ver estas dimeniones, puede compararse con la invención del 0 por los matemáticos islámicos, o la invención de los números negativos por los hindues, ya que fue algo que siempre estuvo ahí, presente en la realidad. Esta visión, antes ignorada expande el poder analítico de las matemáticas. tendemos a creer que un objeto plano es de dos dimensiones, acabamos de ver que no es verdad. También tendemos a pensar que cualquier objeto con volumen, o cualquier sólido es tri-dimensional. sin embargo si tomamos una rebanada de queso con hoyos, para la geometría euclidiana ésta no es una figura tridimensional clásica (suave) pues se requieriría que *toda su superficie sea diferenciable*. Tomemos ahora la gráfica del Índice de una bolsa de valores que típicamente posee la forma de una línea continua con picos, hacia arriba y abajo. No tiene dimensión uno pues no es una línea recta, pero tampoco llena el plano, por lo que su dimensión está entre uno y dos. Otro ejemplo de un fractal es el copo de nieve de Koch. Para crearlo empezamos con un triángulo equilátero (ver figura 3.3), a continuación añadimos un triángulo equilátero al tercio medio de cada lado del triángulo original, se le quita la base y repetimos este proceso una y otra vez.

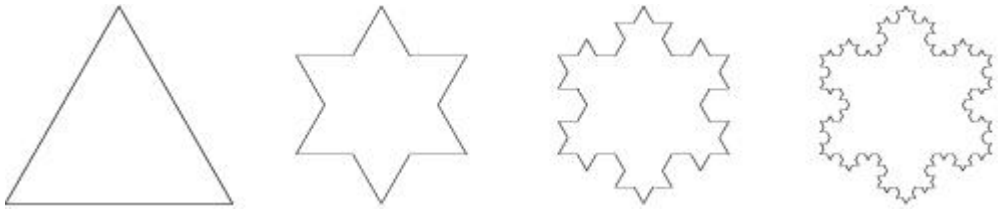

Figura 3.3: El copo de nieve de Koch.

A diferencia del triángulo de Sierpinski, esta vez usamos una regla aditiva. El copo de nieve, tiene longitud infinita, dentro un espacio finito pues los triángulos pueden ser agregados de manera infinita. Si nos acercaramos a la versión final, veríamos cada vez más detalle, en concreto, pequeñas partes a escala más pequeña, del copo de nieve.

Los dos fractales anteriores son simétricos, aunque nos ayudan a comprender mejor los fractales, no representan del todo al mercado de valores, pues en este encontramos más a menudo fractales *aleatorios*, no simétricos.

En la página II de esta tesis se puede observar, arriba, un fractal que no es del todo simétrico; generado con reglas simples, y llamado el *Árbol de Pitágoras*.

3.2.1. Fractales aleatorios.

Las costas o líneas costeras son un buen ejemplo de un fractal aleatorio. Si fuéramos en un avión, a medida que este descendiera podríamos ver cada vez más detalle , hasta que a determinada altura, podríamos ver cada roca. Todo el contorno de la costa es impredecible y posee diferentes formas, terminaciones y colores, de igual manera la gráfica de cotizaciones de una acción parece un contorno costero, a medida que nos acercamos percibimos más detalles. Los fractales aleatorios son combinaciones de iterar diferentes reglas a diferentes escalas.

Nuestros pulmones poseen un tallo principal llamado tráquea que a su vez tiene dos bifurcaciones, estas dos ramas poseen otras dos ramas más pequeñas. El tamaño de las ramas desciende según la ley exponencial, en promedio [16]. Esta escala es fractal pero no simétrica. Cada generación decrece en tamaño pero cada rama por si sola tiene tamaños diferentes. este fractal se guía por leyes naturales, no por leyes predeterminadas como las de Sierpinski. Estas leyes al parecer tienen que ver con la adaptabilidad, si

algún diámetro falla, habrá otros de diferentes tamaños que lo compencen. La selección natural parece preferir a los fractales. Esta combinación de azar con leyes deterministas también nos será útil para explorar los mercados de capitales.