Capítulo 5

(MFCQ) y algoritmos de minimización de puntos interiores

5.1 (MFCQ) y sucesiones de puntos interiores

En este capítulo relacionaré los algoritmos de minimización de puntos interiores con (MFCQ). Esto será construyendo una sucesión de puntos interiores a partir del cumplimiento de (MFCQ) en un punto $\bar{x} \in M$ que es mínimo local de (Q).

Mostraré que siempre que (MFCQ) se cumple en $\bar{x} \in M$ con $\bar{x}$ mínimo local de (Q), existe una sucesión de puntos interiores $\{x^k\}$ que converge a $\bar{x}$.

Daré un ejemplo de $M \subset R^2$, donde (MFCQ) se cumple en $\bar{x} \in M$ y existe una sucesión $\{x^k\} \subset M^0$, con M^0 denotando al interior de M, que converge a $\bar{x}$.

Ejemplificaré también el caso en que no se cumple (MFCQ) en $\bar{x}$ pero si existe una sucesión de puntos interiores que converge a $\bar{x}$. Y por último, cuando no se cumple (MFCQ) en $\bar{x}$ ni existe sucesión alguna de puntos interiores que se aproxime a $\bar{x}$.

Ejemplo 5.1: Sea

$$M = \{(x, y) \in R^2 \mid g_1(x, y) = 4y - x^2 - y^2 \geq 0, \;\; g_2(x, y) = 2y - x^2 - y^2 \geq 0\}$$

y $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$.

Ver la Figura 5.1.

Los gradientes de las funciones g_1 y g_2 son

$Dg_1(x, y) = (-2x, 4 - 2y)$

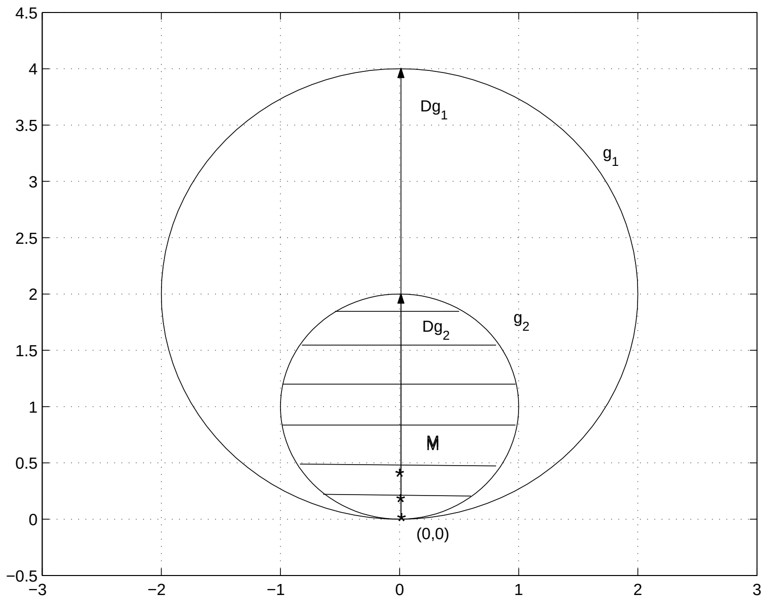

Figura 5.1: M en la intersección de dos círculos

y

$Dg_2(x, y) = (-2x, 2 - 2y)$.

Sustituyendo $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$ obtenemos

$Dg_1(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 4)$

$Dg_2(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$

y obviamente se cumple (MFCQ) en $\binom{0}{0}$.

Además existe una sucesión de puntos interiores

$$\{x^k\} = \{(0, \frac{1}{2}),\ (0, \frac{1}{4}),\ (0, \frac{1}{8}),\ ...\ \}$$

que converge a $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$.

Ejemplo 5.2: Sean

$$M = \{(x, y) \in R^2\ \mid\ g_1(x, y) = x^2 - y \geq 0,\ \ g_2(x, y) = x^2 + y \geq 0\}$$

y $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$.

Los gradientes de g_1 y g_2 son

$Dg_1(x, y) = (2x, -1)$

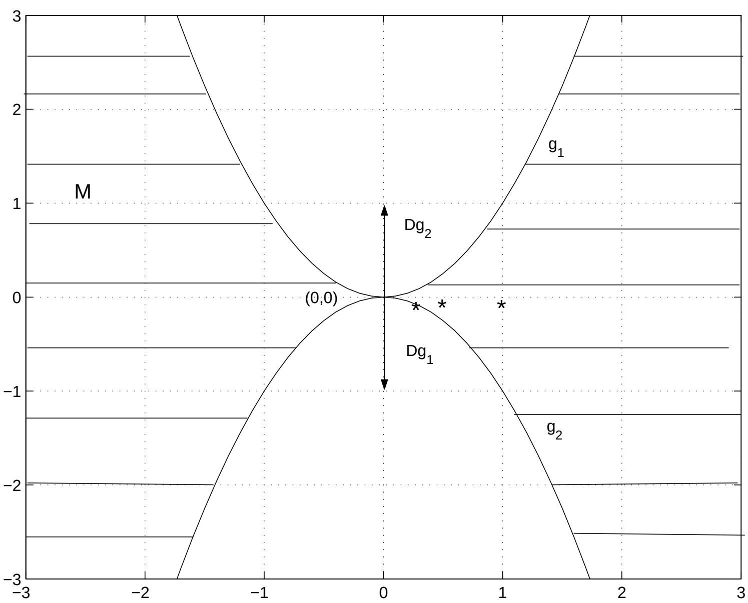

Figura 5.2: M es la parte exterior de dos parábolas.

y

$Dg_2(x, y) = (2x, 1)$.

En la Figura 5.2 se pueden apreciar M y los gradientes de g_1 y g_2.

Sustituyendo $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$ obtenemos

$Dg_1(\bar{x}, \bar{y}) = (0, -1)$

$Dg_2(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 1)$.

No existe vector alguno $w \in R^2$ tal que:

$$Dg_j(\bar{x}, \bar{y})w > 0 \quad j \in J_0(\bar{x}, \bar{y}) = \{1, 2\}$$

Por lo tanto, no se cumple (MFCQ) en $(0, 0)$. Sin embargo, si hay una sucesión de puntos interiores

$$\{x^k\} = \{(1, 0),\ (\frac{1}{2}, 0),\ (\frac{1}{4}, 0)\ ...\}$$

que converge a $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$.

Ejemplo 5.3: Sean

$$M = \{(x, y) \in R^2 \mid g_1(x, y) = 2y - x^2 - y^2 \geq 0,\ \ g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2y \geq 0\}$$

y $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$.

M está descrito en la Figura 5.3.

Los gradientes de g_1 y g_2 son

$Dg_1(x, y) = (-2x, 2 - 2y)$

$Dg_2(x, y) = (2x, 2y - 2)$.

Sustituyendo $(\bar{x}, \bar{y}) = \binom{0}{0}$ obtenemos

$Dg_1(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 2)$

$Dg_2(\bar{x}, \bar{y}) = (0, -2)$.

No existe vector alguno $w \in R^2$ tal que:

$$Dg_j(\bar{x}, \bar{y})w > 0 \quad j \in J_0(\bar{x}, \bar{y}) = \{1, 2\}.$$

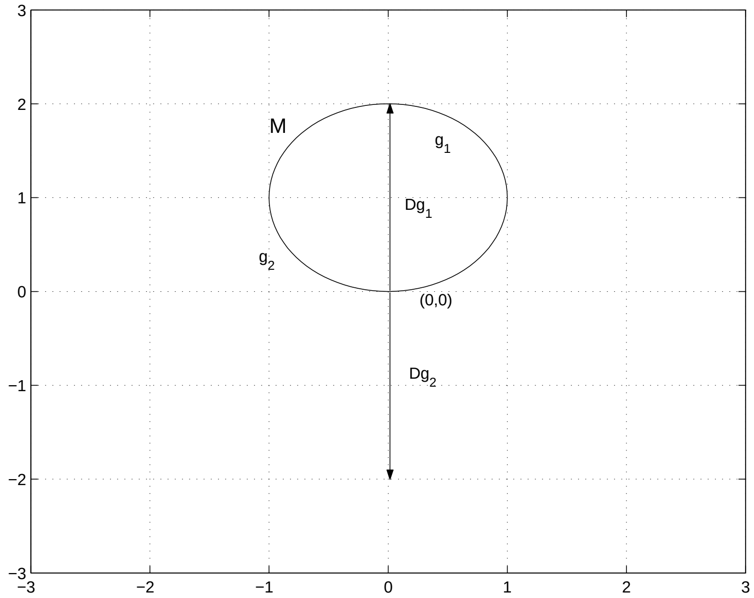

Figura 5.3: En este caso M carece de puntos interiores.

Por lo tanto, no se cumple (MFCQ) en $\binom{0}{0}$.

Además, como

$$M^0 = \{(x, y) \in R^2 \ | \ g_1(x, y) = 2y - x^2 - y^2 > 0, \ \ g_2(x, y) = x^2 + y^2 - 2y > 0\} = \emptyset,$$

no puede haber una sucesión de puntos interiores $\{x^k\}$.

A continuación veremos si el cumplimiento de (MFCQ) en un mínimo local $\bar{x}$ de (Q) asegura la existencia de una sucesión $\{x^k\}$ de puntos interiores tal que en dichos puntos se satisfaga los supuestos d), e) y f) de la página 18 además del enunciado (3.7).

5.2 Sucesión de puntos interiores a partir de (MFCQ)

Mi suposición es que siempre cuando se cumple (MFCQ) en $\bar{x}$ mínimo local de (Q), existe una sucesión de puntos interiores $\{x^k\}$ para los que los supuestos del capítulo 3 y el enunciado (3.5) son ciertos. Propondré la manera de construir dicha sucesión.

Antes debo incluir el siguiente teorema.

Teorema 6:

Si (MFCQ) se cumple en $\bar{x} \in M$ y dado un vector $\xi \in R^n$, tal que:

$$Dg_j(\bar{x})\xi > 0 \qquad j \in J_0(\bar{x}).$$

Entonces existe $\bar{t} > 0$ tal que, para toda $t \in (0, \bar{t}\,]$

$$g_j(\bar{x} + t\xi) > 0 \qquad j \in J.$$

Demostración:

Haremos la prueba por contradicción.

Supongamos que (MFCQ) se cumple en $\bar{x}$ con el vector ξ y además, para toda $\bar{t} > 0$ existe $t \in (0, \bar{t}\,]$ tal que hay un $j \in J$ en forma que

$$g_j(\bar{x} + t\xi) \leq 0.$$

Para una sucesión $\{\bar{t}^k\}$ con $\bar{t}^k \to 0$, $\bar{t}^k > 0$; a cada $\bar{t}^k \in \{\bar{t}^k\}$ le correspondería un valor $t^k \in (0, \bar{t}^k]$ y un subíndice $j_k \in J$ de modo que

$$g_{j_k}(\bar{x} + t^k\xi) \leq 0$$

entonces hay una sucesión infinita $\{t^k\}$, $t^k \to 0$, $t^k > 0$, con

$$g_{j_k}(\bar{x} + t^k\xi) \leq 0.$$

Esto significa que para t^1 existe un subíndice $j_1 \in J$ tal que

$$g_{j_1}(\bar{x} + t^1\xi) \leq 0,$$

para t^2

$$g_{j_2}(\bar{x} + t^2\xi) \leq 0$$

y así sucesivamente.

Como el número de subíndices j_k es infinito (uno para cada t^k), pero la cantidad de índices distintos de J es finita, entonces al menos un subíndice debe repetirse una cantidad infinita de veces. Podemos suponer, sin perder la generalidad, que dicho subíndice es 1.

Ignorando todas aquellas j_k que sean diferentes de 1, seguimos teniendo una subsucesión $\{t^k\}$, $t^k \to 0$, $t^k > 0$ de manera que

$$g_1(\bar{x} + t^k\xi) \leq 0.$$

Hay dos casos.

Caso I: $1 \notin J_0(\bar{x})$, $g_1(\bar{x}) > 0$.

Caso II: $1 \in J_0(\bar{x})$, $g_1(\bar{x}) = 0$.

Caso I:

Como

$$\lim_{k\to\infty} (\bar{x} + t^k\xi) = \bar{x}$$

por consiguiente

$$\lim_{k\to\infty} g_1(\bar{x} + t^k\xi) = g_1(\bar{x})$$

donde $g_1(\bar{x}) \leq 0$ por la continuidad de g_1, pero contradice la hipótesis de que $g_1(\bar{x}) > 0$.

Caso II:

Dada la hipótesis inicial del teorema, $\xi \in R^n$ cumple con:

$$Dg_1(\bar{x})\xi > 0.$$

La función que definiremos como $G(t) = g_1(\bar{x} + t\xi)$ depende sólo de la variable t y es continuamente derivable en el intervalo $[0, t]$.

Entonces, por el teorema del valor medio, hay una $\tilde{t}^k \in (0, t^k)$, para toda $t^k \in \{t^k\}$, tal que:

$$DG(\tilde{t}^k) = \frac{G(t^k) - G(0)}{t^k - 0}$$

o lo que es lo mismo

$$Dg_1(\bar{x} + \tilde{t}^k\xi)\xi = \frac{g_1(\bar{x} + t^k\xi) - g_1(\bar{x})}{t^k - 0}$$

Recordemos que $g_1(\bar{x}) = 0$, por lo que finalmente tenemos:

$$Dg_1(\bar{x} + \tilde{t}^k\xi)\xi = \frac{g_1(\bar{x} + t^k\xi)}{t^k}$$

Cuando $k \to \infty$, $\tilde{t}^k \to 0$; pues si $k \to \infty$, $t^k \to 0$ y $\tilde{t}^k \in (0, t^k)$.

Usemos este hecho al sacar el límite de ambos lados de la pasada ecuación:

$$\lim_{k\to\infty} Dg_1(\bar{x} + \tilde{t}^k\xi)\xi = \lim_{k\to\infty} \frac{g_1(\bar{x} + t^k\xi)}{t^k}$$

Al ser $g_1(\bar{x} + t^k\xi) \leq 0$ y $t^k > 0$ en cada elemento de la sucesión $\{t^k\}$, obtenemos finalmente:

$$Dg_1(\bar{x})\xi \leq 0$$

lo cual contradice el supuesto de que $Dg_1(\bar{x})\xi > 0$.

En ambos casos llegamos a una contradicción, por lo tanto, la hipótesis original debe ser cierta.

Q.E.D.

Supongamos ahora que (MFCQ) se cumple en $\bar{x}$ mínimo local del problema (Q). Debe haber un vector $\xi \in R^n$, tal que:

$$D_j g(\bar{x})\xi > 0 \qquad j \in J_0(\bar{x}).$$

Entonces, por el teorema 6, existe $\bar{t} > 0$ tal que, para toda $t \in (0, \bar{t}\,]$

$$g_j(\bar{x} + t\xi) > 0 \qquad j \in J.$$

Cambiamos t por r, $\bar{t}$ por $\bar{r}$ y definimos:

$$x(r) = \bar{x} + r\xi$$

con $r \in (0,\ \bar{r}\,]$.

Mediante esta función se obtiene una sucesión de puntos interiores $\{x(r)\}$ donde

$$g_j(\bar{x} + r\xi) > 0 \qquad j \in J$$

para $r \in (0, \bar{r}]$.

Dicho de otro modo

$$g_j[x(r)] > 0 \qquad j \in J$$

con $r \in (0, \bar{r}]$.

Además $\{x(r)\} \to \bar{x}$ cuando $r \to 0$. Ya que

$$\lim_{r \to 0} x(r) = \bar{x} + 0\xi = \bar{x}$$

Y si defeinimos

$$v_j(r) = \frac{r}{g_j[x(r)]} = \frac{r}{g_j(\bar{x} + r\xi)}, \quad j \in J$$

ya tendríamos el punto hasta ahora hipotético $[x(r), v(r)]$ cercano a $(\bar{x}, \bar{v})$ del que se habla en el capítulo 3. Ahora hay que ver si esta construcción cumple con los supuestos d), e), f) y el enunciado (3.7) del capítulo 3.

Partamos del problema (Q) y digamos que (LICQ) se cumple en $\bar{x}$, mínimo local de (Q).

Sea $\xi \in R^n$ tal que:

$$D_j g(\bar{x})\xi > 0 \qquad j \in J_0(\bar{x}),$$

ξ debe existir, ya que por el teorema 1, si (LICQ) se cumple en $\bar{x}$, también (MFCQ) se cumple en $\bar{x}$.

Definamos

$$x(r) = \bar{x} + r\xi$$

$$v_j(r) = \frac{r}{g_j[x(r)]}, \qquad j \in J.$$

Por el teorema 6 se sabe que a partir de cierta $\bar{r} > 0$, $r \in (0, \bar{r}]$ cumplirá la desigualdad (3.1) del supuesto d), página 18.

Por la misma construcción, el enunciado (3.2) del supuesto d) se cumple.

Al cumplirse (3.1) y dado que $r > 0$, la desigualdad (3.3) del supuesto d), de la página 18, se cumple también. En lo que respecta al enunciado (3.4), puede tomarse como cierto. Se cumplirá cuando hallemos los mínimos de las funciones auxiliares $L_r(x)$ o P_{r_λ} según sea el caso. (3.5) se cumple si el supuesto e) es cierto.

El enunciado (3.7) del capítulo 3, es cierto para $x(r)$ y $v_j(r)$, $j \in J$ si esta construcción cumple con los supuestos e) y f) del capítulo 3.

El supuesto e) se cumple claramente, pues $\bar{x} + r\xi \to \bar{x}$, cuando $r \to 0$.

Veamos si se satisface el supuesto f) del capítulo 3, que dice:

f) Cuando $r \to 0$, $v_j(r) \to \bar{v}_j$, $j \in J_0(\bar{x})$.

Se que, para $(\bar{x}, \bar{v})$ tenemos

$$Df(\bar{x}) - \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \bar{v}_j Dg_j(\bar{x}) = 0$$

$\bar{v} > 0$ por la complementaridad estricta.

Hemos supuesto que:

$$Df[x(r)] - \sum_{j \in J} v_j(r) Dg_j[x(r)] = 0.$$

Hacemos el límite cuando $r \to 0$:

$$Df(\bar{x}) - \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \tilde{v}_j Dg_j(\bar{x}) = 0$$

donde

$$\lim_{r \to 0} \frac{r}{g_j[x(r)]} = \frac{0}{g_j(\bar{x})} = 0$$

para $j \notin J_0(\bar{x})$ y asumamos para $j \in J_0(\bar{x})$ que

$$\lim_{r \to 0} \frac{r}{g_j[x(r)]} = \tilde{v}_j.$$

Pero como (LICQ) se cumple en $\bar{x}$, los vectores $Dg_j(\bar{x})$ con $j \in J_0(\bar{x})$ son linealmente independientes. Por lo tanto $\tilde{v}_j = \bar{v}_j$ para $j \in J_0(\bar{x})$. Y con $j \notin J_0(\bar{x})$:

$$\tilde{v}_j = \lim_{r \to 0} \frac{r}{g_j[x(r)]} = 0 = \bar{v}_j$$

por la complementaridad estricta.

Así que, con esta definición para $v_j(r)$, tenemos que $v_j(r) \to \bar{v}_j$, $j \in J$. Quedando satisfecho el supuesto f) de la página 20. Luego, por e) y f), se cumple el enunciado (3.7) del capítulo 3. Entonces, si (LICQ) se cumple en un mínimo local $\bar{x}$ del problema (Q), podemos construir $x(r)$ y $v_j(r)$ que cumplen con d), e), f) y el enunciado (3.7) del capítulo 3.

Por lo tanto, podemos usar una función de minimización no restringida interior (como $L_r(x)$), sabiendo que cuando $r \to 0$, $x(r)$ se aproxima aun mínimo local de la función no restringida interior y también al mínimo local del problema (Q).

Veamos que pasa cuando sólamente (MFCQ) se cumple en $\bar{x}$.

Usando la misma selección que en el caso anterior para $[x(r), v(r)]$, los enunciados (3.1)-(3.5) y el supuesto e) del capítulo 3 se satisfacen tal y como sucede cuando (LICQ) se cumple en $\bar{x}$.
No ocurre lo mismo con el supuesto f), pues ya no contamos con la independencia lineal de los gradientes $Dg_j(\bar{x}),\ \ j \in J$. Sin embargo, para alcanzar los mismos resultados que se obtienen en base a la suposición f) del capítulo 3, basta con que se cumpla el siguiente supuesto:
f') Para toda $j \in J_0(\bar{x})$:

$$\lim_{r \to 0} v_j(r) = c$$

con $\ 0 < c < \infty$.
Haré la prueba por contradicción, suponiendo primero que existe un subíndice $a \in J_0(\bar{x})$ tal que $v_a(r) \to \infty$.
Caso I: Existe $a \in J_0(\bar{x})$ tal que $v_a(r) \to \infty$ cuando $r \to 0$.
Podemos suponer, sin perder la generalidad, que $v_a(r) \geq v_j(r)$ para toda $j \in J$.
Nuevamente debe cumplirse:

$$Df[x(r)] - \sum_{j \in J} v_j(r) Dg_j[x(r)] = 0$$

multiplicamos por $\frac{1}{v_a(r)}$:

$$\frac{1}{v_a(r)}Df[x(r)] - \sum_{j\in J}\frac{v_j(r)}{v_a(r)}Dg_j[x(r)] = 0$$

con $0 \leq \frac{v_j(r)}{v_a(r)} \leq 1$.

Ya que $\frac{v_j(r)}{v_a(r)}$ esta acotado entre 0 y 1 entonces tiene un límite inferior b_j. Tomemos una subsucesión $\{r\}$ tal que $\frac{v_j(r)}{v_a(r)} \to b_j$ cuando $r \to 0$.

Sacamos el límite de la subsucesión cuando $r \to 0$:

$$-\sum_{j\in J_0(\bar{x})} b_j Dg_j(\bar{x}) = 0$$

cumpliéndose también:

$$\sum_{j\in J_0(\bar{x})} b_j[-Dg_j(\bar{x})] = 0 \qquad (5.1)$$

como ya dijimos

$$\lim_{r\to 0}\frac{v_j(r)}{v_a(r)} = b_j.$$

Luego, tenemos que

$$\lim_{r\to 0}\frac{v_a(r)}{v_a(r)} = \lim_{r\to 0} 1 = 1 = b_a$$

y dado que $a \in J_0(\bar{x})$, entonces

$$\sum_{j\in J_0(\bar{x})} b_j > 0 \qquad (5.2).$$

Pero si se cumplen (5.1) y (5.2), entonces, por el lema 1, el sistema:

$$[-Dg_j(\bar{x})]\xi < 0, \qquad j \in J_0(\bar{x})$$

con $\xi \in R^n$ no sería soluble. Y entonces, tampoco hay solución para

$$Dg_j(\bar{x})\xi > 0, \qquad j \in J_0(\bar{x})$$

con $\xi \in R^n$.

Esto es una contradicción pues hemos afirmado que (MFCQ) se cumple en $\bar{x}$. Por lo tanto, no existe un subíndice $a \in J_0(\bar{x})$ tal que $v_a(r) \to \infty$ cuando $r \to 0$.

Dejo abierto el problema, faltando por mostrar el caso II en el que se debe buscar una contradicción, a partir de la existencia de $a \in J_0(\bar{x})$ tal que $v_a(r) \to 0$ cuando $r \to 0$.

Una vez que se tenga esto, el supuesto f') será cierto, y entonces, también lo será el enunciado (3.7) del capítulo 3.

Al cumplirse en su totalidad los supuestos d), e), f) y el enunciado (3.7), podemos emplear una función auxiliar, para obtener el mínimo local de (Q). Pues el mínimo local de la función de minimización no restringida interior $x(r)$ tiende al mínimo local del problema (Q) cuando $r \to 0$.