Capítulo 4

Algoritmos de minimización de puntos interiores

4.1 Generalidades sobre los algoritmos de minimización de puntos interiores

En esta sección expongo las definiciones y los teoremas relacionados con los algoritmos de minimización de puntos interiores del texto [5]. No obstante, las demostraciones de mi trabajo son más detalladas en comparación con las de Fiacco-McCormick.

Partimos del problema (Q) que está definido en el capítulo 3.

Sea $I\colon R^n \to R$ con las siguientes propiedades:

i) I es continua en la región

$$M^0 = \{x \in R^n \mid g_j(x) > 0 \ \ j \in J\}.$$

ii) Para cada sucesión $\{x^k\} \subset M^0$ que converge a x_0 de modo que $g_j(x_0) = 0$ al menos para una $j \in J$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty} I(x^k) = \infty.$$

Dada $s\colon r \in R \to R$, con las propiedades de que si $r_1 > r_2 > 0$, entonces $s(r_1) > s(r_2) > 0$ y para cada $\{r_k\}$ con

$$\lim_{k\to\infty} r_k = 0,$$

se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} s(r_k) = 0.$$

Definición: Un **algoritmo de minimización de puntos interiores** es el que procede de la siguiente manera:

1 Definimos la función $U(x, r_1) = f(x) + s(r_1)I(x)$ con respecto a la variable x y donde $r_1 > 0$ es fija. Como punto inicial tomaremos a $x_0 \in M^0$.

2 Procediendo de x_0 encontramos $x(r_1)$ que es un mínimo local de $U(x, r_1)$ en M. $x(r_1)$ será mínimo local mientras esté en M^0, de otro modo $U[x(r_1), r_1] = \infty$.

3 Con base en $x(r_1)$ encontramos un mínimo local de $U(x, r_2)$ donde $r_1 > r_2 > 0$.

4 Y así encontramos un mínimo local de $U(x, r_k)$ partiendo de $x(r_{k-1})$ para una sucesión estrictamente monótona decreciente $\{r_k\}$.

Tanto $L_r(x)$ como $P_{r_\lambda}(x)$ son ejemplos de funciones del tipo $U(\cdot, r)$ que se utilizan en los algoritmos de minimización de puntos interiores. A toda función que sea del tipo $U(x, r)$ le llamaremos **función de minimización no restringida interior**.

Con la función:

$$L_r(x) = f(x) - r \sum_{j \in J} \ln g_j(x)$$

es notorio que

$$I(x) = -\sum_{j \in J} \ln g_j(x)$$

es continua en M^0 y además si tenemos una sucesión $\{x^k\}$ que converge a x_0 de modo que $g_{j_0}(x_0) = 0$ al menos para alguna $j_0 \in J$, entonces:

$$\lim_{k \to \infty} - \ln g_{j_0}(x^k) = +\infty$$

consecuentemente

$$\lim_{k \to \infty} - \sum_{j \in J} \ln g_j(x^k) = \infty$$

por lo que esta selección para $I(x)$ satisface las dos condiciones que se piden.

Luego $s(r) = r$ cumple con los requisitos de una función $s(r)$, pues si $r_1 > r_2 > 0$, entonces $s(r_1) > s(r_2) > 0$ y si hay una sucesión $\{r_k\}$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} r_k = 0,$$

también

$$\lim_{k \to \infty} s(r_k) = 0.$$

Y para $P_{r_\lambda}(x)$:

$$P_{r_\lambda}(x) = f(x) + r_\lambda^2 \sum_{j \in J} \frac{1}{g_j(x)}$$

la selección

$$I(x) = \sum_{j \in J} \frac{1}{g_j(x)}$$

y

$$s(r_\lambda) = r_\lambda^2$$

cumple con las características mencionadas.

Por ello, en los algoritmos de minimización de puntos interiores, las funciones $L_r(x)$ y $P_{r_\lambda}(x)$ son buenos candidatos para función de minimización no restringida interior $U(x,r)$. Sólo faltaría encontrar un par $[x(r), v(r)]$ que se adpte a las condiciones expuestas en el supuesto d) de la página 18.

Ejemplo 4.1:

Consideremos el problema (Q) con

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

y

$$M = \{(x,y) \in R^2 \mid g_1 = y - x \geq 0,\ g_2 = x + y \geq 0\}.$$

Obviamente, la solución es $\binom{0}{0}$.

En la figura 4.1 se puede ubicar a la región M.

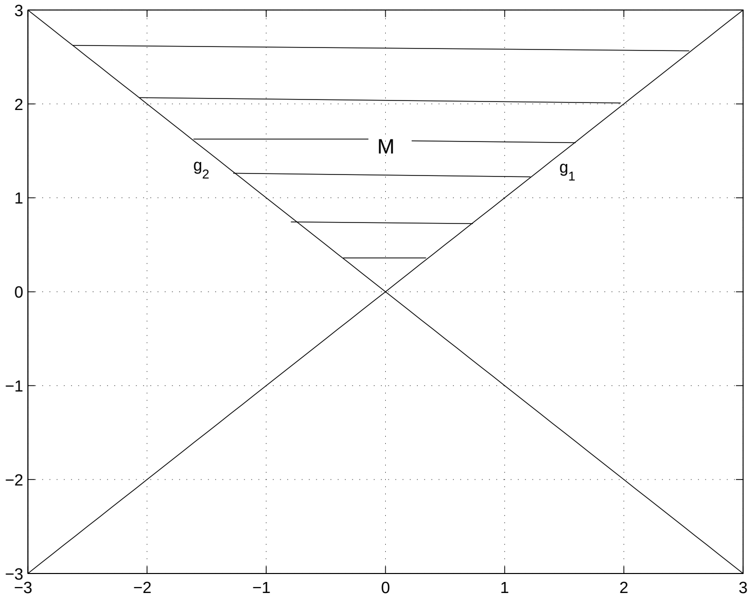

Figura 4.1: Región factible del ejemplo, delimitada por dos rectas.

Como función de minimización no restringida interior U usaremos la logarithmic penalty function $L_r(x, y)$ con $(x, y) \in R^2$. Entonces

$$s(r) = r$$

y la función $I(x, y)$ sería:

$$I(x, y) = -\sum_{j \in J} \ln g_j(x) = -\ln(y - x) - \ln(x + y)$$

por lo tanto, la función $L_r(x, y)$ tiene la forma:

$$L_r(x, y) = x^2 + y^2 - r\ln(y - x) - r\ln(x + y)$$

Usando la condición necesaria de primer orden, tenemos que

$$2x + \frac{r}{y - x} - \frac{r}{x + y} = 0$$

y

$$2y - \frac{r}{y - x} - \frac{r}{x + y} = 0$$

Resolvemos para x:

$$x(r) = 0$$

y despejamos también y:

$$y(r) = \sqrt{r}$$

Veamos que sucede con el par $[x(r), y(r)]$ cuando $r \to 0$.

Para $x(r)$:

$$\lim_{r \to 0} x(r) = \lim_{r \to 0} 0 = 0$$

y para $y(r)$

$$\lim_{r \to 0} y(r) = \lim_{r \to 0} \sqrt{r} = \sqrt{0} = 0.$$

Por lo tanto, el par $[x(r), y(r)] \to \binom{0}{0}$, mínimo local de (Q), cuando $r \to 0$.

En la sección 4.2, las pruebas muestran que una función de minimización no restringida interior sirve para aproximarnos a la solución del problema original.

4.2 Pruebas de convergencia en algoritmos de puntos interiores

En este capítulo veremos bajo qué condiciones los algoritmos de minimización de puntos interiores nos llevan al mínimo local del problema (Q), por medio de las funciones de minimización no restringida interior $U(x, r)$.

Probaremos la existencia de un mínimo local de la función no restringida $U(x, r)$ que converge al mínimo local del problema (Q) que si tiene restricciones.

Lema 2 ([5],p.46) :

Sean $V \subset R^n$ un conjunto compacto no vacío y $f : V \to R$ una función continua. Entonces existe un valor finito c^* y un punto $x^* \in V$, donde

$$f(x^*) = c^* = \min_V f(x).$$

Demostración:

El conjunto $\{f(x) \mid x \in V\}$ debe estar acotado inferiormente, de no ser así, existiría una sucesión $\{x^k\} \subset V$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = -\infty.$$

Como V es compacto, la sucesión $\{x^k\}$ no puede tender a infinito cuando $k \to \infty$, entonces existe una subsucesión que también denotaremos $\{x^k\}$, tal que

$$\{x^k\} \to \tilde{x}$$

con $\tilde{x} \in V$. Pero si

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = -\infty \neq f(\tilde{x})$$

entonces f no sería continua en $\tilde{x} \in V$, lo que es contradictorio. Luego la función f esta acotada inferiormente.

Sea

$$c^* = \inf_{x\in V} f(x).$$

Existe una sucesión $\{x^k\}$ con $f(x^k) \to c^*$. Si $x^k \to x^*$, por la continuidad de f sabemos que $f(x^*) = c^*$, por lo tanto

$$f(x^*) = c^* = \min_{x\in V} f(x).$$

Q.E.D.

Corolario 1 ([5], p.46):

Sea M el conjunto factible, S un conjunto compacto, M^0 el interior de M y $M^0 \cap S \neq \emptyset$, $F(x)$ una función continua en $M^0 \cap S$ con la propiedad de que para cada secuencia $\{x^k\}$ donde $x^k \in M^0 \cap S$ y $\{x^k\}$ converge a $y \in (M - M^0) \cap S$, tenemos

$$\lim_{k \to \infty} F(x^k) = \infty.$$

Entonces existe un valor finito $\bar{c}$ y un punto $\bar{x} \in M^0 \cap S$ tal que

$$F(\bar{x}) = \bar{c} = \min_{M^0 \cap S} F(x).$$

Demostración:

Tomemos cierta $x^0 \in M^0 \cap S$ y definamos W de la siguiente manera:

$$W = \{x \in M^0 \cap S \mid F(x) \leq F(x^0)\}.$$

Si

$$F(x^0) = \min_{M^0 \cap S} F(x)$$

entonces existiría $\bar{x} = x^0$ con $F(\bar{x}) = \bar{c}$ quedando demostrado el corolario. De lo contrario, existe $x^1 \in W$ para el cual, si

$$F(x^1) = \min_{M^0 \cap S} F(x)$$

entonces existiría $\bar{x} = x^1$ con $F(\bar{x}) = \bar{c}$ llegando al resultado buscado. De lo contrario, existe $x^2 \in W$, donde otra vez, si

$$F(x^2) = \min_{M^0 \cap S} F(x)$$

entonces existiría $\bar{x} = x^2$ con $F(\bar{x}) = \bar{c}$ quedando demostrado el corolario. Si no, existe $x^3 \in W$, y así sucesivamente, nos encontramos con una sucesión $\{x^k\}$ donde cada $x^k \in W$.

Digamos que $x^k \to y$.

Se sabe que $y \in M \cap S$ ya que $M \cap S$ es un conjunto cerrado.

Hay dos opciones, $y \in M^0 \cap S$ ó $y \in (M - M^0) \cap S$. No obstante, si $y \in (M - M^0) \cap S$ entonces:

$$\lim_{k \to \infty} F(x^k) = \infty$$

lo cual es imposible, porque entonces $\{x^k\}$ no estaría en W.

Por lo tanto $y \in M^0 \cap S$.

Luego, ya que $F(x^k) \leq F(x^0)$ para toda $x^k \in \{x^k\}$ y por la continuidad de F en $M^0 \cap S$ tenemos que necesariamente:

$$F(y) \leq F(x^0)$$

o sea que $y \in W$. Luego, W es cerrado y además compacto. Por lo tanto $F(x)$ tiene un mínimo en W:

$$\inf_{M^0 \cap S} F(x) = \min_{W} F(x).$$

Q.E.D.

Definición: Dada una función de minimización no restringida interior $U(x, r)$, un punto $x(r)$ es un **mínimo local** de $U(x, r)$ si existe un conjunto compacto V para el cual:

$$U[x(r), r] = \min_{M^0 \cap V} U(x, r)$$

y $x(r)$ está contenido en el interior de V.

Esta definición se encuentra en [5], p. 46.

Definición: Sea $V \subset R^n$. Un conjunto no vacío $V^* \subset V$ es llamado **conjunto aislado** de V si existe un conjunto cerrado $E \subset R^n$ tal que $V^* \subset E^0$, donde E^0 es el interior de E, y si $x \in E \setminus V^*$ entonces $x \notin V$. Referencia en [5], p. 46

Antes de probar la convergencia de los algoritmos de minimización de puntos interiores, es necesario considerar un teorema fundamental relativo a los conjuntos compactos que poseen mínimo local.

Este teorema dice que si un conjunto que tiene mínimo local es compacto, contiene en su interior a otro conjunto compacto, de tal forma que el mínimo local del primer conjunto es mínimo global en este último conjunto.

Definición: Sea A^* el conjunto de mínimos locales de (Q) correspondientes al valor $\bar{c}$:

$$A^* = \{\bar{x} \in M \ \mid \ \bar{x} \text{ es un mínimo local con } f(\bar{x}) = \bar{c}\}$$

Teorema 4 ([5], p.47):

Sea A^* el conjunto de mínimos locales de (Q) correspondientes al valor $\bar{c}$, un subconjunto aislado, no vacío y compacto de $A = \{x \in M \mid f(x) = \bar{c}\}$, entonces existe un conjunto compacto $S \subset R^n$ tal que $A^* \subset S^0$, donde S^0 es el interior de S, y para cualquier punto $y \in M \cap S$, si $y \notin A^*$, entonces $f(y) > \bar{c}$.

Demostración:

Ya que $A^* \neq \emptyset$, $A^* \subset A$ y A^* es un conjunto aislado de A, existe un conjunto cerrado no vacío $E \subset R^n$, con $A^* \subset E^0$ tal que si $x \in E \setminus A^*$, entonces $x \notin A$.

Para toda $\bar{x} \in A^*$, hay una vecindad abierta $\mathcal{U}(\bar{x})$ de $\bar{x}$ en forma que $f(\bar{x}) = \bar{c} \leq f(x)$ para cada $x \in \mathcal{U}(\bar{x}) \cap M$.

Consideremos el conjunto:

$$G = \bigcup_{\bar{x} \in A^*} \mathcal{U}(\bar{x})$$

la unión de todas las vecindades $\mathcal{U}(\bar{x})$ sobre A^*.

G es abierto, $A^* \subset G$ y $f(x) \geq \bar{c}$ con $x \in G \cap M$. Dado S un conjunto compacto que cumple con:

$$A^* \subset S^0 \subset S \subset G \cap E.$$

Tal conjunto S debe existir, de lo contrario usamos el mismo $G \cap E$ como conjunto S. Hay que demostrar que si $y \in M \cap S$ y $y \notin A^*$, entonces $f(y) > \bar{c}$.

Como $y \in M \cap S \subset M \cap G$, luego $f(y) \geq \bar{c}$. Además $M \cap S \subset G \cap E$, esto implica que $y \in E$. Pero si $y \notin A^*$, entonces $y \in E \setminus A^*$. Tomando en cuenta que A^* es un conjunto aislado de A, se sigue que

$$y \notin A$$

descartando así la posibilidad de que $f(y) = \bar{c}$.

Por lo tanto, si $y \in (M \cap S) \setminus A^*$ entonces

$$f(y) > \bar{c}.$$

Q.E.D..

Teorema 5 (Convergencia para conjuntos compactos con mínimo local por algoritmos de minimización de puntos interiores) :

Consideremos el problema (Q) y supongamos que los siguientes requisitos se satisfacen:

a) La función $U(x,r) = f(x) + s(r)I(x)$ es una función de minimización no restringida interior.

b) El conjunto $A^* = \{\bar{x} \in M \mid \bar{x} \text{ es un mínimo local de (Q) con } f(\bar{x}) = \bar{c}\}$ es un subconjunto compacto, aisaldo, no vacío de $A = \{x \in M \mid f(x) = \bar{c}\}$.

c) $A^* \cap$ $ClM^0 \neq \emptyset$, donde ClM^0 es la clausura de M^0.

d) $\{r_k\}$ es una sucesión con $r_k \geq r_{k+1} > 0$ y $r_k \to 0$ cuando $k \to \infty$..

Entonces se cumplen:

i) Existe un conjunto compacto S como esta dado en el teorema 4, tal que $A^* \subset S^0$ y para r_k suficientemente pequeña el mínimo no restringido de U en $M^0 \cap S^0$ existe y cada punto límite de cualquier sucesión $\{x^k\}$ de mínimos locales está en A^*.

ii) $\lim_{k\to\infty} s(r_k)I(x^k) = 0$.

iii) $\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \bar{c}$.

iv) $\lim_{k\to\infty} U(x^k, r_k) = \bar{c}$.

v) La sucesión $\{f(x^k)\}$ es tal que $f(x^k) \geq f(x^{k+1})$.

vi) La sucesión $\{I(x^k)\}$ es tal que $I(x^k) \leq I(x^{k+1})$.

Demostración:

i) Por el teorema 4 y el supuesto b), existe $S \subset R^n$ tal que $A^* \subset S^0$ y para toda $y \in M \cap S$ con $y \notin A^*$, $f(y) > \bar{c}$.

Definamos x^k en forma que:

$$U(x^k, r_k) = \min_{M^0 \cap S} U(x, r_k).$$

Cada x^k existe, por el corolario 1 y en base a que $U(x, r_k)$ es continua en $M^0 \cap S$.

Sin perder la generalidad, consideremos una sucesión de mínimos $\{x^k\}$ donde $x^k \to y^0$ cuando $k \to \infty$, hay que demostrar que $y^0 \in A^*$.

Al ser $\{x^k\} \subset M^0 \cap S$ entonces $\{x^k\} \subset M \cap S$ que es un conjunto cerrado. Por ello, si $x^k \to y^0$, concluimos que $y^0 \in M \cap S$.

Haremos la demostración indirectamente suponiendo que $y^0 \notin A^*$.

Como $y^0 \in M \cap S$ y $y^0 \notin A^*$, por el teorema 4: $f(y^0) > \bar{c}$.

Por el supuesto c), hay al menos un $\bar{z} \in A^* \cap ClM^0$, por lo que existe una sucesión $\{z^k\} \subset M^0$ tal que $z^k \to \bar{z} \in A^*$.

Dado que $f(\bar{z}) = \bar{c}$, $z^k \to \bar{z}$, $f(y^0) > \bar{c}$ y f es continua en M^0, existe $x^0 \in \{z^k\}$ que cumple con:

$$\bar{c} \leq f(x^0) < f(y^0) \qquad (4.1)$$

pero si

$$U(x^k, r_k) = \min_{M^0 \cap S} U(x, r_k)$$

entonces

$$U(x^k, r_k) \leq U(x^0, r_k)$$

o lo que es lo mismo

$$f(x^k) + s(r_k)I(x^k) \leq f(x^0) + s(r_k)I(x^0). \qquad (4.2)$$

Sabemos que $x^k \to y^0$, para esto hay dos casos.

Caso I: $y^0 \in M^0$.

Si $y^0 \in M^0$ entonces $\lim_{k\to\infty} I(x^k) = I(y^0)$.

Como la desigualdad (4.2) es válida para toda k, se cumple:

$$\lim_{k\to\infty}[f(x^k) + s(r_k)I(x^k)] \leq \lim_{k\to\infty}[f(x^0) + s(r_k)I(x^0)]$$

Por los supuestos a) y d) sabemos que $\lim_{k\to\infty} s(r_k) = 0$, por lo tanto, al resolver el límite anterior

$$f(y^0) + 0 * I(y^0) \leq f(x^0) + 0 * I(x^0)$$

$$f(y^0) \leq f(x^0).$$

Llegando a una contradicción con (4.1).

Caso II: $y^0 \in M \setminus M^0$.

Si $y^0 \in M \setminus M^0$ entonces $\lim_{k\to\infty} I(x^k) = +\infty$.

Consideramos de nuevo la desigualdad

$$f(x^k) + s(r_k)I(x^k) \leq f(x^0) + s(r_k)I(x^0)$$

que viene de

$$U(x^k, r_k) \leq U(x^0, r_k).$$

Como $\lim_{k\to\infty} I(x^k) = +\infty$, entonces a partir de cierta k tenemos $I(x^k) > 0$. Y además $s(r_k) > 0$ para toda k, se sigue que

$$f(x^k) < f(x^k) + s(r_k)I(x^k) \leq f(x^0) + s(r_k)I(x^0)$$

tomando los extremos de la expresión anterior tenemos que

$$f(x^k) < f(x^0) + s(r_k)I(x^0)$$

haciendo el límite cuando $k \to \infty$ de ambos lados llegamos a

$$f(y^0) < f(x^0)$$

y caemos de nuevo en contradicción con respecto a (4.1).

Por lo tanto $y^0 \in A^*$.

Además si $y^0 \in A^* \subset S^0$, como la sucesión $\{x^k\} \subset M^0 \cap S$ es tal que $x^k \to y^0 \in S^0$, entonces a partir de cierta k, la sucesión $\{x^k\}$ estará contenida en $M^0 \cap S^0$.

ii) Hay que demostrar que $s(r_k)I(x^k) \to 0$ cuando $k \to \infty$.

Consideremos una sucesión $x^k \to y^0$. Para esto hay, nuevamente, dos casos.

Caso I: $y^0 \in M^0$.

Si $y^0 \in M^0$:

$$\lim_{k\to\infty} s(r_k)I(x^k) = 0 * I(y^0) = 0.$$

Obteniendo lo que queremos mostrar.

Caso II: $y^0 \in M \setminus M^0$.

Si $y^0 \in M \setminus M^0$, entonces $\lim_{k\to\infty} I(x^k) = +\infty$. Recordemos también que, por *i*), $y^0 \in A^*$.

Al igual que en la prueba de *i*), a partir de cierta k, $I(x^k) > 0$. Luego $s(r_k)I(x^k) > 0$ desde dicha k en adelante. Si *ii*) no fuera cierta, existiría una subsucesión en forma que

$$\lim_{k\to\infty} s(r_k)I(x^k) \geq \epsilon > 0.$$

Por el supuesto c), existe $\bar{z} \in A^* \cap ClM^0$. Entonces hay una sucesión $\{z^k\} \subset M^0$ con $z^k \to \bar{z}$. Tomamos un valor $x^0 \in \{z^k\}$, para el cual:

$$f(x^0) + s(r_k)I(x^0) \geq f(x^k) + s(r_k)I(x^k) \geq f(x^k) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Hacemos el límite cuando $k \to \infty$:

$$f(x^0) \geq f(y^0) + \frac{\epsilon}{2} = \bar{c} + \frac{\epsilon}{2}$$

para cualquier $x^0 \in \{z^k\}$.

Esto implicaría que

$$\lim_{k\to\infty} f(z^k) = f(\bar{z}) > f(y^0),$$

lo que es una contradicción pues si $\bar{z}$, $y^0 \in A^*$, entonces $f(\bar{z}) = f(y^0) = \bar{c}$. Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} s(r_k)I(x^k) = 0.$$

iii) Hay que demostrar que $f(x^k) \to \bar{c}$ cuando $k \to \infty$.

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = f(y^0)$$

por *i)*, $y^0 \in A^*$. Por lo tanto

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \bar{c}.$$

iv) Hay que demostrar que $U(x^k, r_k) \to \bar{c}$ cuando $k \to \infty$.

$$\lim_{k\to\infty} U(x^k, r_k) = \lim_{k\to\infty} [f(x^k) + s(r_k)I(x^k)].$$

Por *ii)* e *iii)*:

$$\lim_{k\to\infty} [f(x^k) + s(r_k)I(x^k)] = \bar{c} + 0 = \bar{c}.$$

De este modo

$$\lim_{k\to\infty} U(x^k, r_k) = \bar{c}.$$

v) Hay que demostrar que $f(x^k) \geq f(x^{k+1})$.

Sea $f^k = f(x^k)$, $s^k = s(r_k)$ e $I^k = I(x^k)$.

$$U(x^k, r_k) = \min_{M^0 \cap S} U(x, r_k) \leq U(x^{k+1}, r_k)$$

del mismo modo

$$U(x^{k+1}, r_{k+1}) \leq U(x^k, r_{k+1}).$$

Expresamos cada U en base a las funciones f, s e I:

$$f^k + s^k I^k \leq f^{k+1} + s^k I^{k+1} \tag{4.3}$$

$$f^{k+1} + s^{k+1} I^{k+1} \leq f^k + s^{k+1} I^k \tag{4.4}$$

multiplicamos (4.3) por $\frac{s^{k+1}}{s^k} > 0$:

$$\frac{s^{k+1}}{s^k} f^k + s^{k+1} I^k \leq \frac{s^{k+1}}{s^k} f^{k+1} + s^{k+1} I^{k+1} \tag{4.5}$$

sumamos (4.4) con (4.5)

$$f^{k+1} + s^{k+1} I^{k+1} + \frac{s^{k+1}}{s^k} f^k + s^{k+1} I^k \leq f^k + s^{k+1} I^k + \frac{s^{k+1}}{s^k} f^{k+1} + s^{k+1} I^{k+1}$$

al eliminar términos, obtenemos

$$\frac{s^{k+1}}{s^k} f^k + f^{k+1} \leq \frac{s^{k+1}}{s^k} f^{k+1} + f^k$$

multiplicando por $s^k > 0$:

$$s^{k+1} f^k + s^k f^{k+1} \leq s^{k+1} f^{k+1} + s^k f^k$$

cumpliéndose también

$$s^k f^{k+1} - s^{k+1} f^{k+1} \leq s^k f^k - s^{k+1} f^k$$

factorizando

$$(s^k - s^{k+1})f^{k+1} \leq (s^k - s^{k+1})f^k$$

y como $s^k > s^{k+1}$ entonces podemos dividir entre $s^k - s^{k+1} > 0$ sin afectar el sentido de la desigualdad, llegando a

$$f^{k+1} \leq f^k.$$

Por lo tanto $f(x^k) \geq f(x^{k+1})$.

vi) Hay que demostrar que $I(x^k) \leq I(x^{k+1})$.

Sigamos usando la notación de la prueba de *v*).

Supongamos que $I^k > I^{k+1}$. Entonces como $s^k > 0$

$$s^k I^k > s^k I^{k+1}.$$

Y sabemos por *v*) que $f^k \geq f^{k+1}$. En consecuencia,

$$f^k + s^k I^k > f^{k+1} + s^k I^{k+1}$$

dicho de otro modo

$$U(x^k, r_k) > U(x^{k+1}, r_k)$$

cayendo en contradicción, pues hemos definido x^k en forma que

$$U(x^k, r_k) = \min_{M^0 \cap S} U(x, r_k)$$

es por ello que

$$U(x^k, r_k) \leq U(x^{k+1}, r_k).$$

Por lo tanto $I(x^k) \leq I(x^{k+1})$.

Q.E.D.

Ha quedado demostrado el teorema 5, el cual nos dice que se puede obtener una sucesión de puntos $\{x^k\}$, donde cada x^k es mínimo local de $U(x, r_k)$ en $M^0 \cap S$, que se aproximará al mínimo local de (Q).

Lo que hace falta es encontrar una $x^k = x(r_k)$, que cumpla con las características que a lo largo de este capítulo hemos manejado.

En el capítulo 5, retomaré la definición de (LICQ) y (MFCQ) y propondré una forma de construir $x(r)$ a partir del cumplimiento de (LICQ) o (MFCQ) en un punto $\bar{x}$ mínimo local de (Q).