

Capítulo 4

Interpolación con Bases Espectrales

En el Capítulo 2 se cubrieron los fundamentos de la interpolación polinomial, además de revisar los métodos interpolatorios más conocidos y estudiados. Posteriormente, en el Capítulo 3 se hizo una presentación de las bases espectrales: de dónde surgen, las propiedades de sus elementos y la forma de calcularlas. En este Capítulo 4 se verá la relación que existe entre la interpolación polinomial y las bases espectrales en anillos modulares de polinomios, además de ampliar algunos conceptos interpolatorios.

4.1. Una relación entre las Bases Estándar y Espectral de $K[x]_h$

Dadas dos bases ordenadas B y C de un mismo espacio vectorial V de dimensión finita, es posible relacionarlas mediante una matriz de cambio de base M , que actúa de manera tal que $C = MB$. Dicha matriz es no singular y por lo tanto tiene inversa, lo cual permite obtener que $M^{-1}C = B$ y de esa manera saltar de una base a otra sin esfuerzo. Esto puede hacerse también en el caso del anillo polinomial modular $K[x]_h$, ya que éste posee la estructura de un campo vectorial. En este caso, se tienen tanto la base estándar como la base espectral y ahora se busca la matriz de cambio de base entre ellas, la cual resultará ser una conocida y cómoda matriz. Sin embargo, antes de comenzar los cálculos para encontrarla, se dan algunas definiciones de utilidad.

Definición 4.1. El *vector función* $X(x)$ formado por los elementos de la base estándar de $K[x]_h$, $\{1, x, x^2, \dots, x^{m-1}\}$, se denotará por

$$X(x) = (1, x, x^2, \dots, x^{m-1})^T.$$

El *vector función* $S(x)$ compuesto por los elementos de la base espectral completa $csb(K[x]_h)$ de $K[x]_h$, definida en la ecuación 3.4 del Capítulo 3, se denotará por

$$S(x) = (s_1, q_1, \dots, q_1^{m_1-1}; s_2, q_2, \dots, q_2^{m_2-1}; \dots; s_r, q_r, \dots, q_r^{m_r-1})^T.$$

Los signos de punto y coma en la definición de $S(x)$ dividen dicho vector en r bloques de m_i elementos, $i = 1, 2, \dots, r$.

Definición 4.2. La derivada normalizada $X^{[k]}(x)$ del vector función $X(x)$ se define con la fórmula

$$X^{[k]}(x) := \frac{1}{k!} \partial_x^k X(x).$$

Se usará la notación abreviada $X_j^{[k]} := X^{[k]}(x_j)$ para denotar el vector función $X^{[k]}(x)$ evaluado en el punto $x = x_j$, así como $X_j := X(x_j)$ para el vector función $X(x)$ evaluado en $x = x_j$. Ahora se prueba un resultado que da una forma explícita para $X^{[k]}(x)$.

Teorema 4.1. La k -ésima derivada normalizada $X^{[k]}(x)$ viene dada por

$$X^{[k]}(x) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{k \text{ veces}}, 1, \binom{k+1}{k} x, \binom{k+2}{k} x^2, \dots, \binom{m-1}{k} x^{m-1-k} \quad (4.1)$$

Demostración. Se procede por inducción sobre k . Claramente, el enunciado se cumple para $k = 1$, ya que de la Definición 4.2 se tiene que

$$\begin{aligned} X^{[1]}(x) &= \frac{1}{1!} \partial_x^1 X(x) = (0, 1, 2x, 3x^2, \dots, (m-1)x^{m-2}) \\ &= (0, 1, \binom{2}{1} x, \binom{3}{1} x^2, \dots, \binom{m-1}{1} x^{m-2}). \end{aligned}$$

Ahora supóngase que la ecuación se cumple para $k = n$, es decir, que

$$X^{[n]}(x) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ veces}}, 1, \binom{n+1}{n} x, \binom{n+2}{n} x^2, \dots, \binom{m-1}{n} x^{m-1-n},$$

y se probará que también es válida para $k = n + 1$:

$$X^{[n+1]}(x) = \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n+1 \text{ veces}}, 1, \binom{n+2}{n+1} x, \binom{n+3}{n+1} x^2, \dots, \binom{m-1}{n+1} x^{m-2-n}.$$

Ahora, por definición,

$$\begin{aligned} X^{[n+1]}(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \partial_x^{n+1} X(x) = \frac{1}{(n+1)!} \partial_x^1 [\partial_x^n X(x)] \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \partial_x^1 [n! X^{[n]}(x)] = \frac{1}{(n+1)} \partial_x^1 [X^{[n]}(x)] \\ &= \frac{1}{(n+1)} \partial_x^1 \left[\underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ veces}}, 1, \binom{n+1}{n} x, \binom{n+2}{n} x^2, \dots, \binom{m-1}{n} x^{m-1-n} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(n+1)} \underbrace{(0, \dots, 0, 0, \binom{n+1}{n}, 2 \binom{n+2}{n} x, \dots, (m-1-n) \binom{m-1}{n} x^{m-2-n})}_{n \text{ veces}} \\
 &= \underbrace{(0, \dots, 0, 1, \binom{n+2}{n+1} x, \binom{n+3}{n+1} x^2, \dots, \binom{m-1}{n+1} x^{m-2-n})}_{n+1 \text{ veces}},
 \end{aligned}$$

ya que

$$\frac{1}{(n+1)} \binom{n+1}{n} = \frac{(n+1)!}{n!1!(n+1)} = 1,$$

y en general

$$\frac{p}{(n+1)} \binom{n+p}{n} = \frac{(n+p)!p}{n!p!(n+1)} = \frac{(n+p)!}{(n+1)!(p-1)!} = \binom{n+p}{n+1}.$$

Esto termina la demostración. \square

Definición 4.3. La matriz generalizada de Vandermonde W de $m \times m$ se define como

$$W := \left\{ X_1 X_1^{[1]} \dots X_1^{[m_1-1]}; X_2 X_2^{[1]} \dots X_2^{[m_2-1]}; \dots; X_r X_r^{[1]} \dots X_r^{[m_r-1]} \right\}, \quad (4.2)$$

donde $m = m_1 + m_2 + \dots + m_r$, [10]. De igual manera que para $S(x)$, los signos de punto y coma en la definición de W la dividen en r bloques de m_i columnas, $i = 1, 2, \dots, r$.

La relación importante que se buscaba en esta sección la da el siguiente teorema, [10], [11].

Teorema 4.2. W es la matriz de cambio de base entre $S(x)$ y $X(x)$; en otras palabras,

$$S(x) = W^{-1} X(x). \quad (4.3)$$

Demostración. Retomando la relación $s_1 + s_2 + \dots + s_r = 1$, al multiplicar de ambos lados por x se obtiene

$$\begin{aligned}
 x &= x s_1 + x s_2 + \dots + x s_r \\
 &= (x - x_1 + x_1) s_1 + (x - x_2 + x_2) s_2 + \dots + (x - x_r + x_r) s_r \\
 &= (x_1 + q_1) s_1 + (x_2 + q_2) s_2 + \dots + (x_r + q_r) s_r \\
 &= (x_1 s_1 + q_1) + (x_2 s_2 + q_2) + \dots + (x_r s_r + q_r),
 \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde $x_i = x \bmod (x - x_i)^{m_i}$. Elevando al cuadrado esta última expresión, haciendo uso de las propiedades de los elementos de la base espectral y luego desarrollando los binomios,

$$x^2 = (x_1 + q_1)^2 s_1 + (x_2 + q_2)^2 s_2 + \dots + (x_r + q_r)^2 s_r$$

$$= (x_1^2 s_1 + \binom{2}{1} x_1 q_1 + q_1^2) + \dots + (x_r^2 s_r + \binom{2}{1} x_r q_r + q_r^2). \quad (4.5)$$

En general, si se eleva la expresión para x en la ecuación 4.4 a la k -ésima potencia, se tiene que

$$\begin{aligned} x^k &= (x_1 + q_1)^k s_1 + (x_2 + q_2)^k s_2 + \dots + (x_r + q_r)^k s_r \\ &= (x_1^k s_1 + \binom{k}{1} x_1^{k-1} q_1 + \dots + \binom{k}{k-1} x_1 q_1^{k-1} + q_1^k) + \dots + \\ &\quad + (x_r^k s_r + \binom{k}{1} x_r^{k-1} q_r + \dots + \binom{k}{k-1} x_r q_r^{k-1} + q_r^k). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por otra parte, se está buscando una matriz A de $m \times m$ tal que

$$AS(x) = X(x). \quad (4.7)$$

Así como se hizo con W , se divide la matriz A en r bloques de m_i columnas, donde m_i es el grado de nilpotencia de q_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Usando la ecuación 4.7 y la relación $s_1 + s_2 + \dots + s_r = 1$, se tiene que el primer renglón de A es

$$\underbrace{(1 \ 0 \ \dots \ 0)}_{m_1 \text{ col}} \ \underbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{m_2 \text{ col}} \ \dots \ \underbrace{1 \ 0 \ \dots \ 0}_{m_r \text{ col}}.$$

En seguida se repite el procedimiento para el segundo renglón de A , empleando las ecuaciones 4.7 y 4.4. El resultado es

$$\underbrace{(x_1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)}_{m_1 \text{ col}} \ \underbrace{x_2 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0}_{m_2 \text{ col}} \ \dots \ \underbrace{x_r \ 1 \ 0 \ \dots \ 0}_{m_r \text{ col}}.$$

Se calcula el tercer renglón mediante las ecuaciones 4.7 y 4.5:

$$\underbrace{(x_1^2 \ \binom{2}{1} x_1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)}_{m_1 \text{ col}} \ \underbrace{x_2^2 \ \binom{2}{1} x_2 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0}_{m_2 \text{ col}} \ \dots \ \underbrace{x_r^2 \ \binom{2}{1} x_r \ 1 \ 0 \ \dots \ 0}_{m_r \text{ col}}.$$

El renglón $k + 1$ resulta ser, a partir de las ecuaciones 4.7 y 4.6,

$$\underbrace{(x_1^k \ \binom{k}{1} x_1^{k-1} \ \dots \ \binom{k}{k-1} x_1 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)}_{m_1 \text{ col}} \ \dots \ \underbrace{x_r^k \ \binom{k}{1} x_r^{k-1} \ \dots \ \binom{k}{k-1} x_r \ 1 \ 0 \ \dots \ 0}_{m_r \text{ col}}.$$

A partir de estos cálculos y recordando las expresiones 4.1 y 4.2, se tiene que la matriz A es

$$A = \left\{ X_1 X_1^{[1]} \ \dots \ X_1^{[m_1-1]} X_2 X_2^{[1]} \ \dots \ X_2^{[m_2-1]} \ \dots \ X_r X_r^{[1]} \ \dots \ X_r^{[m_r-1]} \right\} = W,$$

de donde se sigue que $WS(x) = X(x)$ y por ende, $S(x) = W^{-1}X(x)$. Esto termina la demostración. \square

4.2. Interpolación de Hermite: un enfoque con Bases Espectrales

La base espectral de $K[x]_h$ tiene varios usos y aplicaciones posibles, dadas las ventajas que ofrecen sus peculiares propiedades. Una de sus aplicaciones importantes reside en su vínculo con los procesos interpolatorios, en especial con los de las Secciones 2.2.1 y 2.2.3, y de eso trata esta Sección.

4.2.1. Un resultado sobre la base espectral

El siguiente teorema establece una igualdad fundamental para el desarrollo de este tema, [10], [11].

Teorema 4.3. *Se da la siguiente igualdad:*

$$I = \{S(x_1), \dots, S^{[m_1-1]}(x_1); \dots; S(x_r), \dots, S^{[m_r-1]}(x_r)\}, \quad (4.8)$$

donde I es la matriz identidad de $m \times m$.

Demostración. El resultado se obtendrá a partir de la relación dada por la ecuación 4.3. Así, se tiene que $X(x) = WS(x)$, y al evaluar en $x = x_j$, $j = 1, 2, \dots, r$, resulta la ecuación $X_j = WS(x_j)$ para $j = 1, 2, \dots, r$. Sin embargo, de la igualdad 4.2 se sabe que X_k es la primera columna del k -ésimo bloque de W , por lo que $S(x_k)$ debe tener ceros en todas las posiciones excepto un 1 en la primera de su k -ésimo bloque.

El siguiente paso es calcular la primera derivada normalizada de la expresión 4.3, que resulta en la ecuación $X^{[1]}(x) = WS^{[1]}(x)$. De nueva cuenta se evalúa en $x = x_j$ para $j = 1, 2, \dots, r$, y así se obtiene $X_j^{[1]} = WS^{[1]}(x_j)$ para $j = 1, 2, \dots, r$. En vista de que $X_k^{[1]}$ es la segunda columna del k -ésimo bloque de W , $S^{[1]}(x_k)$ debe tener ceros en todas las posiciones excepto un 1 en la segunda de su k -ésimo bloque.

El proceso de calcular derivadas normalizadas y evaluarlas en cada x_j continúa de la misma manera; para la i -ésima derivada normalizada se llega a $X_j^{[i]} = WS^{[i]}(x_j)$ para $j = 1, 2, \dots, r$, lo cual obliga por la ecuación 4.2 a que $S^{[i]}(x_k)$ tenga un 1 en la $(i+1)$ -ésima posición de su k -ésimo bloque y ceros en todo lo demás. Reuniendo toda esta información se prueba la ecuación 4.8 y queda demostrado el resultado. \square

4.2.2. Interpolación de Hermite completa

Recuérdese de la Sección 2.2.3, que trata de la interpolación de Hermite, la ecuación 2.34. Para el caso de la interpolación osculatoria, se empleaban los valores de la función a interpolar f y de su derivada en los nodos conocidos como coeficientes de una combinación lineal

de ciertas funciones $h_i(x)$ y $\bar{h}_i(x)$. Dichas funciones estaban obligadas a cumplir ciertos requisitos para ser solución del problema, las cuales eran

$$\begin{aligned} h_i(x_j) &= \delta_{ij}, & \bar{h}_i(x_j) &= 0 \\ h'_i(x_j) &= 0, & \bar{h}'_i(x_j) &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Las funciones $h_i(x)$ y $\bar{h}_i(x)$ representan una base de polinomios de Hermite para este problema particular.

Para el problema más general

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

donde $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$, también es posible construir una solución de la misma manera, aunque la dificultad sea mucho mayor. Esto es, el polinomio de interpolación $p(x)$ puede ser expresado como una combinación lineal de ciertas funciones $h_{ij}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m_i - 1$ así como se hizo con el problema anterior:

$$p(x) = \sum_{i=1}^n h_{i0}(x)f(x_i) + \sum_{i=1}^n h_{i1}(x)f'(x_i) + \dots + \sum_{i=1}^n h_{i(m_i-1)}(x)f^{(m_i-1)}(x_i) \quad (4.10)$$

y para que sea solución de 4.9, se deben cumplir el conjunto de condiciones:

$$\begin{array}{llll} h_{i0}(x_k) = \delta_{ik} & h_{i1}(x_k) = 0 & \dots & h_{i(m_i-1)}(x_k) = 0 \\ h'_{i0}(x_k) = 0 & h'_{i1}(x_k) = \delta_{ik} & \dots & h'_{i(m_i-1)}(x_k) = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{i0}^{(m_i-1)}(x_k) = 0 & h_{i1}^{(m_i-1)}(x_k) = 0 & \dots & h_{i(m_i-1)}^{(m_i-1)}(x_k) = \delta_{ik} \end{array} \quad (4.11)$$

4.2.3. $S(x)$ como base de polinomios de Hermite

La importancia de la expresión 4.8 radica en la información que da sobre los elementos de la base espectral $S(x)$ al momento de ser evaluados en los puntos x_i , $i = 1, 2, \dots, r$; a partir de dicha ecuación, se observa que $s_i(x_j) = \delta_{ij}$ y que $s_i^{[k]}(x_j) = 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$ y $k = 1, 2, \dots, m_i - 1$. De igual manera, 4.8 indica que $q_i(x_j) = 0$, $q_i^{[1]}(x_j) = \delta_{ij}$ y $q_i^{[k]}(x_j) = 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$ y $k = 2, 3, \dots, m_i - 1$. En general, para $q_i^l(x)$, se tiene que $q_i^l(x_j) = 0$, $(q_i^l)^{[l]}(x_j) = \delta_{ij}$ y $(q_i^l)^{[k]}(x_j) = 0$ para $i, j = 1, 2, \dots, r$ y $k = 1, 2, \dots, m_i - 1$, $k \neq l$.

Como puede verse, los elementos de la base espectral $S(x)$ cumplen con el conjunto de condiciones 4.11 tomando $s_i = h_{i0}$, $q_i = h_{i1}$, $q_i^1 = h_{i2}$ y siguiendo de la misma forma hasta $q_i^{m_i-1} = h_{i(m_i-1)}$. Por lo tanto es posible sustituir los h_{ij} por los elementos de $S(x)$ en la ecuación 4.10 y dada la unicidad de la solución del problema de interpolación 4.9, se puede afirmar que $S(x)$ es una base de polinomios de Hermite para dicho problema, [11]. Si todos

los nilpotentes q_1, q_2, \dots, q_r fueran idénticamente nulos, se estaría en presencia de una base de polinomios de Lagrange.

Para encontrar el polinomio de interpolación $g(x)$ de $f(x)$, se emplean las propiedades de los elementos de $S(x)$ y la descomposición espectral de x de la ecuación 3.6, y luego se hace la expansión en serie de Taylor de $f(x)$ alrededor de los puntos $x_i, i = 1, 2, \dots, r$. Así, se tiene

$$\begin{aligned} g(x) &:= f\left(\sum_{j=1}^r (x_j + q_j)s_j\right) = \sum_{j=1}^r f(x_j + q_j)s_j \\ &= \sum_{j=1}^r \left[f(x_j) + \frac{f'(x_j)}{1!}q_j + \dots + \frac{f^{(m_j-1)}(x_j)}{(m_j-1)!}q_j^{m_j-1} \right] s_j \\ &= \sum_{j=1}^r \left[f(x_j) + \frac{f'(x_j)}{1!}(x - x_j) + \dots + \frac{f^{(m_j-1)}(x_j)}{(m_j-1)!}(x - x_j)^{m_j-1} \right] s_j \end{aligned} \quad (4.12)$$

Los siguientes términos de la Serie de Taylor se anulan idénticamente, por el índice de nilpotencia de los q_i . La ecuación 4.12 proporciona el polinomio de interpolación de Hermite para $f(x)$ en el anillo modular polinomial $K[x]_h$. Como puede observarse, lo que en realidad se obtiene con $g(x)$ es una especie de expansión de Taylor de $f(x)$ alrededor de cada uno de los puntos espectrales del anillo, [11].

Ejemplo 4.1. Para ilustrar la forma en que se consigue un polinomio de interpolación de Hermite a partir de las bases espectrales, se recuerda el problema del Ejemplo 2.3 de la Sección 2.2.3. La función a interpolar era $f(x) = \sqrt{x}$ en los puntos $x_1 = 1, x_2 = 4$ y $x_3 = 9$, y se buscaba que el polinomio de interpolación $p(x)$ coincidiera hasta la primera derivada en dichos nodos. Para ese efecto, se toma $h(x) = (x-1)^2(x-4)^2(x-9)^2$ y se forma el anillo polinomial modular $K[x]_h$. La base espectral para dicho anillo fue encontrada en el Ejemplo 3.2.

Por otra parte, se calcula la descomposición espectral de x mediante la ecuación 3.6, que resulta ser

$$x = (1 + q_1(x))s_1(x) + (4 + q_2(x))s_2(x) + (9 + q_3(x))s_3(x).$$

Por comodidad, en el resto del ejemplo se omitirán los argumentos de los nilpotentes e idempotentes. Ahora se usa la ecuación 4.12 para obtener el polinomio de interpolación de Hermite $g(x) \in K[x]_h$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f[(1 + q_1)s_1 + (4 + q_2)s_2 + (9 + q_3)s_3] \\ &= f(1 + q_1)s_1 + f(4 + q_2)s_2 + f(9 + q_3)s_3 \end{aligned}$$

$$= [f(1) + f'(1)q_1]s_1 + [f(4) + f'(4)q_2]s_2 + [f(9) + f'(9)q_3]s_3.$$

Sustituir los valores de la función, de su derivada y de los elementos de la base espectral hace coincidir exactamente $g(x)$ con la función $p(x)$ obtenida en el Ejemplo 2.3.

En el ejemplo anterior se observa que el método de esta sección es una alternativa al de la interpolación osculatoria descrito en la Sección 2.2.3. Sin embargo, el Ejemplo 4.1 por sí solo no termina de mostrar las bondades de esta técnica: conforme avanza el orden de las derivadas requeridas, calcular el polinomio de interpolación por métodos tradicionales se vuelve más complicado, mientras que esto no sucede con las bases espectrales, las cuales siguen siendo calculadas sencillamente ya sea por medio de la definición de los idempotentes o por la ecuación 4.3.

4.3. Interpolación cuántica en un número infinito de nodos

Hasta este momento todos los métodos que se han estudiado en este trabajo tratan con problemas de índole finita; los métodos de splines cúbicos así como los de Lagrange, Newton, Hermite, y el visto en la Sección 4.2.3 consideran un número finito de nodos a interpolar. Sin embargo, es posible extender el concepto de la interpolación de Lagrange y de Hermite de tal manera que puedan abarcar problemas con un número infinito de nodos, [11]. Esto se hará mediante el uso de las ideas de la Sección 4.2.3.

Considérese una función real $h(x)$ con un número infinito de ceros $x_\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \in Index$, con multiplicidad m_σ respectivamente. Como de costumbre, se definen los $h_\sigma(x)$ como

$$h_\sigma(x) = \frac{h(x)}{(x - x_\sigma)^{m_\sigma}}, \quad \sigma \in Index$$

y los $s_\sigma(x)$ siguen siendo tales que

$$\sum_{\sigma \in Index} s_\sigma(x) = 1. \quad (4.13)$$

Además, $q_\sigma(x) := (x - x_\sigma)s_\sigma$. De esta manera, los $s_\sigma(x)$ y $q_\sigma(x)$ siguen cumpliendo con las propiedades del Teorema 3.6 y se tiene la misma estructura que en el caso de raíces finitas.

Para encontrar el valor de los $s_\sigma(x)$ se procede ligeramente distinto que anteriormente. Se toma la ecuación 4.13 y se multiplica de ambos lados por $h_\sigma(x)$, con lo que resulta $h_\sigma(x)s_\sigma(x) = h_\sigma(x)$, donde el miembro izquierdo de la igualdad está en módulo $(x - x_\sigma)^{m_\sigma}$ y el derecho en módulo $h(x)$.

Sin embargo, en esta ocasión $h(x)$ no es un polinomio por lo que no es tan sencillo reducir el producto $h_\sigma(x)s_\sigma(x)$ módulo $(x - x_\sigma)^{m_\sigma}$. Para lograr esto, se opta por expandir $h_\sigma(x)$ en su Serie de Taylor alrededor de x_σ . Así, se aprovecha que la serie se truncará a partir del $(m_\sigma + 1)$ -ésimo término. Una vez que se ha hecho esto, se multiplican ambos lados de la ecuación por $h_\sigma^{-1}(x) \bmod (x - x_\sigma)^{m_\sigma}$, de donde $s_\sigma(x) = [h_\sigma^{-1}(x) \bmod (x - x_\sigma)^{m_\sigma}] h_\sigma(x)$ para $\sigma \in Index$.

La descomposición espectral de x sigue obteniéndose de la misma manera que en el caso finito, es decir,

$$x = \sum_{\sigma \in Index} ((x - x_\sigma) + x_\sigma) s_\sigma(x) = \sum_{\sigma \in Index} (x_\sigma + q_\sigma(x)) s_\sigma(x).$$

Por lo tanto, recordando la ecuación 4.12, el *Polinomio de Interpolación Cuántica de Hermite* $g(x)$ para una función $f(x)$ definida en los nodos $\{x_\sigma | \sigma \in Index\}$ es

$$g(x) = \sum_{\sigma \in Index} \left[f(x_\sigma) + \frac{f'(x_\sigma)}{1!} q_\sigma(x) + \dots + \frac{f^{(m_\sigma-1)}(x_\sigma)}{(m_\sigma - 1)!} q_\sigma^{m_\sigma-1}(x) \right] s_\sigma(x). \quad (4.14)$$

En el caso en que los nilpotentes $q_\sigma(x)$ se anulen idénticamente, la ecuación 4.14 se convierte en

$$g_1(x) = \sum_{\sigma \in Index} f(x_\sigma) s_\sigma(x) \quad (4.15)$$

y $g_1(x)$ es el *Polinomio de Interpolación Cuántica de Lagrange* para $f(x)$.

Ejemplo 4.2. Se da un ejemplo de esta técnica interpolando la función

$$f(x) = \frac{1}{x^{16} + 1}$$

mediante tres diferentes funciones con infinito número de ceros. La diferencia estribará en el orden de interpolación que se obtendrá.

Sea $h(x) = \sin x$. Entonces el conjunto de ceros de $h(x)$ es

$$K = \{x_k = k\pi | k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\},$$

todos ellos de multiplicidad 1, que serán los nodos de interpolación para $f(x)$. Se definen los $h_k(x) = h(x)/(x - k\pi)$; ahora se multiplica ambos lados de la ecuación 4.13 por h_k , con lo que se tiene $h_k(x)s_k(x) = h_k(x)$. La expansión en Serie de Taylor de $h_k(x)$ alrededor de $k\pi$ es

$$h_k(x) = h_k(k\pi) + h'_k(k\pi)(x - k\pi) + \dots$$

Sin embargo, como se está trabajando módulo $(x - k\pi)$, todos los términos de la serie se anulan salvo el primero; tomando el límite a $h_k(x)$ cuando x tiende a $k\pi$, se tiene que $h_k(x) = (-1)^k$, y entonces

$$(-1)^k s_k(x) = h_k(x),$$

por lo que la expresión para s_k es

$$s_k(x) = (-1)^k \frac{\sin x}{(x - k\pi)}.$$

Además, como $q_k(x) = (x - k\pi)s_k(x) = (-1)^k \sin x = 0$ módulo $h(x)$, la interpolación será de Lagrange. Entonces el polinomio de interpolación cuántico para $f(x)$ es

$$g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k f(k\pi) \frac{\sin x}{(x - k\pi)},$$

siguiendo la ecuación 4.15.

El mismo método se aplica para las funciones $\tilde{h}(x) = \sin^2 x$ y $\hat{h}(x) = \sin^3 x$. Los conjuntos de ceros para ambas funciones son exactamente el mismo que el de $h(x)$, excepto que para $\tilde{h}(x)$ los ceros serán de multiplicidad 2 y para $\hat{h}(x)$ de multiplicidad 3. Esto provoca que el polinomio interpolatorio cuántico sea de Hermite, de primer orden en $\tilde{h}(x)$ y de segundo en $\hat{h}(x)$. En el caso de $\sin^2 x$, los cálculos indican que

$$\tilde{s}_k(x) = \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)^2}, \quad \tilde{q}_k(x) = \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)},$$

y el polinomio de interpolación cuántica de Hermite para $f(x)$ es

$$\tilde{g}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left[f(k\pi) \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)^2} + f'(k\pi) \frac{\sin^2 x}{(x - k\pi)} \right].$$

Por otra parte, para $\sin^3 x$ se obtiene después de los cálculos correspondientes

$$\hat{s}_k(x) = (-1)^k \frac{\sin^3 x}{(x - k\pi)^3} \left(1 + \frac{(x - k\pi)^2}{2} \right),$$

$$\hat{q}_k(x) = (-1)^k \frac{\sin^3 x}{(x - k\pi)^2}, \quad \hat{q}_k^2(x) = (-1)^k \frac{\sin^3 x}{(x - k\pi)},$$

y finalmente el polinomio de interpolación resultante para $f(x)$ es

$$\hat{g}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \left[f(k\pi) \frac{\sin^3 x}{(x - k\pi)^3} \left(1 + \frac{(x - k\pi)^2}{2} \right) + f'(k\pi) \frac{\sin^3 x}{(x - k\pi)^2} + \frac{f''(k\pi)}{2} \frac{\sin^3 x}{(x - k\pi)} \right].$$

Las Figuras 4.1, 4.2 y 4.3 muestran la gráfica de $f(x)$ junto con las de $g(x)$, $\tilde{g}(x)$ y $\hat{g}(x)$ respectivamente; para construir éstas se consideraron los $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 10$. En ellas se pueden apreciar los diversos órdenes de interpolación: $g(x)$ solamente toca a la función en los nodos, mientras que $\tilde{g}(x)$ va más allá y además de tener el mismo valor que $f(x)$ en dichos nodos, concuerda en pendiente. $\hat{g}(x)$, al tener ceros de multiplicidad 3, logra hacer que incluso su curvatura sea la misma que la de $f(x)$ en tales puntos.

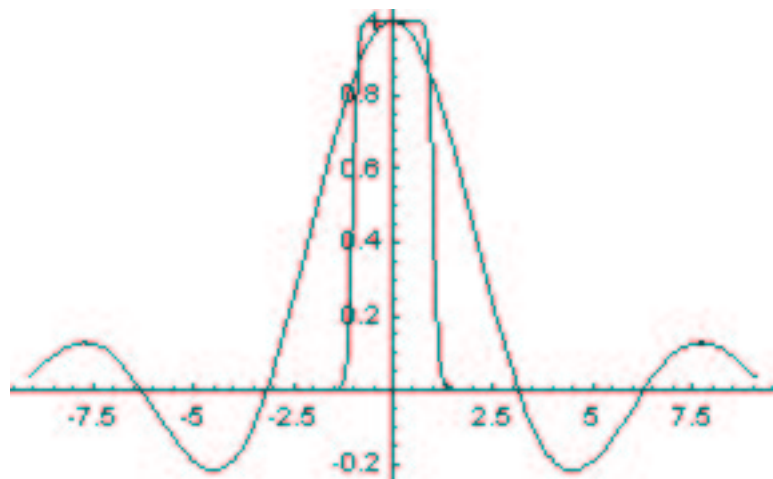
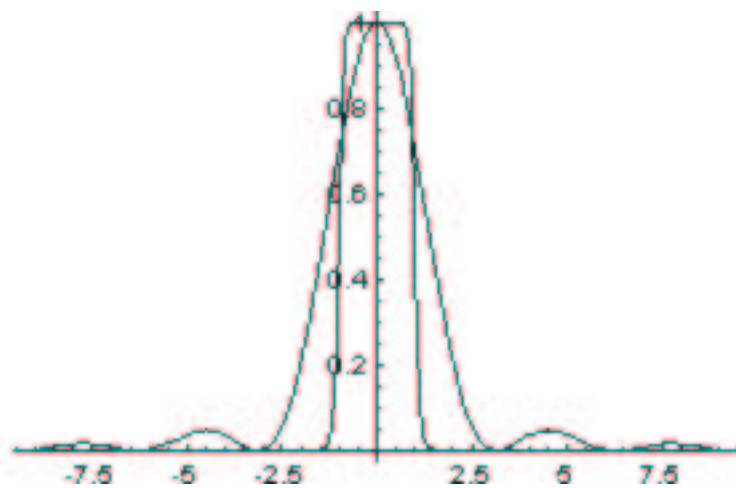
Figura 4.1: $f(x)$ y su interpolador cuántico de Lagrange $g(x)$ Figura 4.2: $f(x)$ y su interpolador cuántico de Hermite $\tilde{g}(x)$



Figura 4.3: $f(x)$ y su interpolador cuántico de Hermite de segundo orden $\hat{g}(x)$