

Capítulo 2

El Problema de la Interpolación

En este Capítulo se aborda primeramente la enunciación y demostración de dos teoremas clásicos que constituyen el armazón teórico de la interpolación polinomial. Posteriormente, se hace una revisión de los métodos interpolatorios más famosos y empleados, entre ellos los de Lagrange, Newton, Hermite y los splines cúbicos. De estos, los primeros tres producen como resultados polinomios, mientras que el último es una función a trozos que en cada intervalo es un polinomio. En cada caso se incluye un ejemplo para ilustrar cómo funcionan estos métodos.

2.1. Interpolación Polinomial

Existen dos teoremas que son absolutamente indispensables para el desarrollo de la teoría de la interpolación polinomial. El primero de ellos es, como escribe Phillip J. Davis en [4], extremadamente antiguo y sobre él descansa gran parte del análisis numérico. Se trata del teorema de interpolación polinomial, el cual simplemente dice que por dos puntos se puede hacer pasar una línea recta, por tres puntos una parábola, por cuatro puntos una cúbica y de ahí en adelante. Por otro lado, el otro teorema fundamental es el clásico teorema de aproximación de Weierstrass, que afirma que cualquier función continua en un intervalo cerrado puede ser uniformemente aproximada por un polinomio de grado suficientemente alto. La demostración del primer teorema es sencilla y directa, pero la del segundo es bastante más complicada.

Teorema 2.1. *Dados $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n y $n + 1$ valores y_0, y_1, \dots, y_n , existe un único polinomio $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$ tal que*

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

Demostración. Sea $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ el polinomio de grado n con coeficientes indeterminados a_i que satisfaga las condiciones de la ecuación 2.1. Esto conduce

al sistema de $n + 1$ ecuaciones lineales en a_i

$$a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n = y_i, \quad (2.2)$$

cuyo determinante es el famoso determinante de Vandermonde:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Ahora basta probar que V es distinto de cero y así el sistema descrito por la ecuación 2.2 tendrá solución única. Para ver esto, considérese la función

$$V(x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^n \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

$V(x)$ es un polinomio de grado n que se anula en x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , puesto que si evaluamos en cualquiera de estos puntos se obtienen dos renglones idénticos. Entonces por el conocido teorema de factorización de polinomios, se tiene que

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = \beta(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (2.4)$$

Para evaluar β , que es el coeficiente de x_n , hay que expandir el determinante de la ecuación 2.3 por su último renglón. Esto muestra que el coeficiente de x_n es

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Sustituyendo en la ecuación 2.4 resulta

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}),$$

y ahora evaluando en $x = x_n$,

$$V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = V(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}), \quad (2.5)$$

lo cual proporciona una fórmula recursiva para calcular V . Finalmente, un sencillo cálculo indica que $V(x_0, x_1) = x_1 - x_0$, por lo que se tiene que

$$V(x_0, x_1, x_2) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

en virtud de la Ecuación 2.5, y aplicando la fórmula repetidas veces se llega a que

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i>j}^n (x_i - x_j). \quad (2.6)$$

Como los x_i son distintos entre sí por hipótesis, el producto en la ecuación 2.6 es distinto de cero, por lo que $V \neq 0$ y esto termina la demostración [4]. \square

Antes de avanzar al teorema de aproximación de Weierstrass, es necesario introducir la definición de los polinomios de Bernstein y algunos cálculos que ayudarán a probar el mencionado teorema.

Definición 2.1. Dada $f(x) \in C[0, 1]$, su *Polinomio de Bernstein de grado n* , denotado por $B_n(f; t)$, se define como

$$B_n(f; t) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Por su definición, es claro que $B_n(f; t) \in P_n$; también es fácil de ver que para, $f_1(x)$ y $f_2(x) \in C[0, 1]$

$$B_n(\alpha f_1 + \beta f_2; t) = \alpha B_n(f_1; t) + \beta B_n(f_2; t). \quad (2.7)$$

Además, si $f_1(t) \leq f_2(t)$ para todo $t \in [0, 1]$, entonces se tiene que

$$B_n(f_1; t) \leq B_n(f_2; t) \quad (2.8)$$

para todo $t \in [0, 1]$. Para ver esto último, tómese $f = f_2 - f_1$. Entonces $f(t) \geq 0$ para $t \in [0, 1]$; en particular,

$$f\left(\frac{i}{n}\right) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

por lo que $B_n(f; t)$ es una suma de términos no negativos. Finalmente, por la ecuación 2.7, $B_n(f_1; t) \leq B_n(f_2; t)$.

Ahora se desea calcular $B_n(\alpha; t)$, $B_n(t; t)$ y $B_n(t^2; t)$, α constante, puesto que se emplearán en la demostración del teorema de Weierstrass. Los primeros dos serán sencillos, pero el último es difícil por lo que su cálculo se hará indirectamente.

$$\bullet B_n(\alpha; t) = \sum_{i=0}^n \alpha \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \alpha(t + (1-t))^n = \alpha. \quad (2.9)$$

$$\bullet B_n(t; t) = \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

pero

$$\frac{i}{n} \binom{n}{i} = \frac{i \cdot n!}{n \cdot (n-i)! \cdot i!} = \frac{(n-1)!}{(n-i)! (i-1)!} = \binom{n-1}{i-1}.$$

Entonces haciendo $j = i - 1$, se tiene que

$$B_n(t; t) = t \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{(n-1)-j} = t \cdot (t + (1-t))^{(n-1)} = t. \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \bullet B_n\left(t\left(t - \frac{1}{n}\right); t\right) &= \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{i-1}{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \sum_{i=2}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{i-1}{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \end{aligned}$$

pero de nuevo efectuando álgebra,

$$\frac{i}{n} \cdot \frac{i-1}{n} \binom{n}{i} = \frac{i \cdot (i-1) \cdot n!}{n \cdot n \cdot (n-i)! \cdot i!} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{(n-2)!}{(n-i)! (i-2)!} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \binom{n-2}{i-2}$$

y haciendo $j = i - 2$, se obtiene por una parte

$$B_n\left(t\left(t - \frac{1}{n}\right)\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) t^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} t^j (1-t)^{(n-2)-j} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) t^2$$

y por otra,

$$B_n\left(t\left(t - \frac{1}{n}\right)\right) = B_n(t^2; t) - \frac{1}{n} B_n(t; t) = B_n(t^2; t) - \frac{t}{n}.$$

Entonces

$$B_n(t^2, t) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) t^2 + \frac{t}{n} = t^2 + \frac{1}{n} t(1-t). \quad (2.11)$$

Estos cálculos parecen indicar que es posible aproximar una función continua dada por su polinomio de Bernstein, siempre y cuando éste sea de grado suficientemente alto. Ahora sí, a continuación se enuncia el teorema de aproximación de Weierstrass.

Teorema 2.2 (Teorema de Aproximación de Weierstrass). Sea $f(x) \in C[a, b]$. Dado $\epsilon > 0$, existe un polinomio $p(x)$ de grado suficientemente alto tal que

$$\|f(x) - p(x)\| < \epsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

Demostración. Sea f como requiere el teorema. Sea $x = (b - a)t + a$, y entonces

$$f(x) = f((b - a)t + a) = g(t).$$

Así, cuando $x = a$, $t = 0$ y cuando $x = b$, $t = 1$; por lo tanto $g(t)$ es una función continua en $[0, 1]$. Se desea probar que dado $\epsilon > 0$ y $h(t) \in C[0, 1]$, existe un entero n_0 tal que

$$\|h - B_{n_0}(h)\| < \epsilon. \quad (2.12)$$

Si se logra esto, entonces se tendrá en particular que

$$\|g(t) - B_{n_0}(g; t)\| < \epsilon, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

y tomando

$$p(x) = B_{n_0} \left(g; \frac{(x - a)}{(b - a)} \right)$$

el teorema quedará demostrado.

Como $h(t)$ es continua en el compacto $[0, 1]$, se sigue que h está acotada en $[0, 1]$ y también que es uniformemente continua en el mismo intervalo. Supóngase que $\|h\| = M$, donde $\|\cdot\|$ es la norma uniforme sobre el intervalo $[a, b]$, y que $s, t \in [0, 1]$; entonces

$$-2M \leq h(t) - h(s) \leq 2M. \quad (2.13)$$

Además, como $h(t)$ es uniformemente continua en $[0, 1]$, dado $\epsilon_1 > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$-\epsilon_1 < h(t) - h(s) < \epsilon_1 \quad (2.14)$$

cuando $|t - s| < \delta$. Se afirma que la ecuación 2.13 junto con la ecuación 2.14 implican que

$$-\epsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2}(t - s)^2 \leq h(t) - h(s) \leq \epsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2}(t - s)^2 \quad (2.15)$$

para $s, t \in [0, 1]$. Esto es cierto puesto que si $|t - s| < \delta$, la ecuación 2.14 implica 2.15; por otra parte, si $|t - s| \geq \delta$, entonces

$$\frac{(t - s)^2}{\delta^2} \geq 1$$

y en este caso la ecuación 2.13 es la que implica 2.15.

Ahora si se fija momentáneamente s , se toman los polinomios de Bernstein de grado n de las funciones en t de (1.15) y se evalúan en $t = s$, se obtiene

$$-\epsilon_1 - \frac{2M}{\delta^2} B_n((t-s)^2; s) \leq B_n(h; s) - h(s) \leq \epsilon_1 + \frac{2M}{\delta^2} B_n((t-s)^2; s) \quad (2.16)$$

debido a las Ecuaciones 2.7, 2.8 y 2.9. El cálculo de $B_n((t-s)^2; s)$, empleando 2.7, 2.9, 2.10 y 2.11, resulta en

$$B_n((t-s)^2; s) = B_n(t^2; s) - 2sB_n(t; s) + s^2B_n(1; s) = \frac{1}{n}s(1-s).$$

Además, como $0 \leq s(1-s) \leq \frac{1}{4}$ para $0 \leq s \leq 1$, se concluye a partir de 2.16 que

$$|h(s) - B_n(h; s)| \leq \epsilon_1 + \frac{M}{2\alpha^2 n}.$$

Por último, se elige $\epsilon_1 = \epsilon/2$ y entonces 2.12 se cumple para $n_0 > M/\delta^2\epsilon$. \square

La demostración anterior se debe a S. Bernstein y aparece en varios libros sobre el tema, como [8] y [4]. Tom Apostol da una demostración alterna en [3], empleando el teorema de Fejér. Ahora se está en condiciones de pasar a la siguiente sección que expone y resume los métodos de interpolación más comúnmente usados.

2.2. Tipos de interpolación más empleados

2.2.1. Interpolación de Lagrange

De los polinomios de interpolación existentes, los polinomios de Lagrange se cuentan entre los más sencillos y prácticos. Estos polinomios llevan el nombre del matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813), aunque todo parece indicar que la fórmula básica fue publicada 16 años antes por Waring [6].

El polinomio de Lagrange de grado n es una representación del polinomio único que resuelve el problema de interpolación

$$p_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2.17)$$

para $n+1$ valores dados y_0, y_1, \dots, y_n y $n+1$ puntos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Por otra parte, si existe una función $f(x)$ definida en x_0, x_1, \dots, x_n tal que

$$f(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n,$$

entonces se dice que $p_n(x)$ es el polinomio de Lagrange de grado n que interpola a $f(x)$ en los nodos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$.

La Fórmula de Interpolación de Lagrange expresa el polinomio solución de 2.17 como una combinación lineal de la base $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)\}$ del espacio lineal P_n , y cuyos coeficientes serán los $f(x_i)$. Por supuesto, ahora es necesario especificar la forma de los elementos de dicha base. Para este fin, escríbase $p_n(x)$ en la forma requerida

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i). \quad (2.18)$$

Es útil observar en este momento que si se pide que

$$l_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

en donde δ_{ij} representa la Delta de Kronecker, se logra que $p_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$. Con este hecho, se puede afirmar entonces que $l_i(x)$ es un polinomio que se anula en $x = x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$, por lo que debe ser de grado n y además de la forma

$$l_i(x) = \beta_i [(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)] \quad (2.19)$$

donde β_i es una constante, la cual queda determinada mediante la igualdad $l_i(x_i) = 1$, que indica que

$$\beta_i = \frac{1}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \quad (2.20)$$

Finalmente, combinando 2.19 y 2.20 se llega a una expresión explícita para los $l_i(x)$:

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)}. \quad (2.21)$$

Entonces 2.18 junto con 2.21 es el *Polinomio de Interpolación de Lagrange de grado n* [6], [4]. Existe una manera de simplificar un poco este resultado. Sea

$$\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n). \quad (2.22)$$

Derivando $\pi(x)$ y evaluando dicha derivada en $x = x_i$, se obtiene

$$\pi'(x) = (x_i - x_0) \cdots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n) = \frac{1}{\beta_i}. \quad (2.23)$$

Sustitúyanse las Ecuaciones 2.22 y 2.23 en la Ecuación 2.21:

$$l_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)}. \quad (2.24)$$

Ahora el Polinomio de Interpolación de Lagrange de grado n se puede expresar en la forma

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)} f(x_i) = \sum_{i=0}^n l_i(x) f(x_i). \quad (2.25)$$

Ejemplo 2.1. Supóngase que se desea interpolar $f(x) = \sqrt{x}$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ y $x_2 = 9$. Se calculan los polinomios $l_i(x)$ para $i = 0, 1, 2$ a partir de la ecuación 2.21, lo cual resulta en

$$\begin{aligned}l_0(x) &= \frac{1}{24}(x-4)(x-9) \\l_1(x) &= -\frac{1}{15}(x-1)(x-9) \\l_2(x) &= \frac{1}{40}(x-1)(x-4).\end{aligned}$$

Ahora se evalúa f en los nodos y se forma el polinomio $p_2(x)$ como dice la ecuación 2.18, de donde

$$p_2(x) = \sum_{i=0}^2 l_i(x)f(x_i) = \frac{1}{24}(x-4)(x-9) - \frac{2}{15}(x-1)(x-9) + \frac{3}{40}(x-1)(x-4).$$

Finalmente, desarrollando el polinomio,

$$p_2(x) = -\frac{1}{60}(x^2 - 25x - 36). \quad (2.26)$$

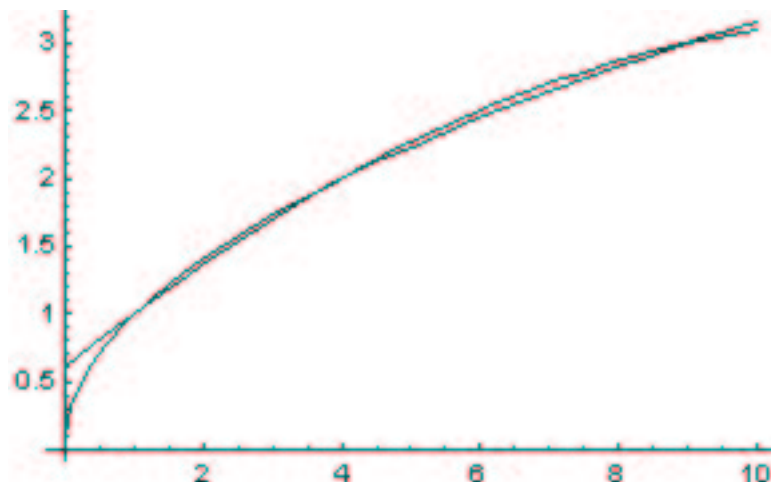
Es fácil comprobar que

$$\begin{aligned}f(1) &= p(1) = 1 \\f(4) &= p(4) = 2 \\f(9) &= p(9) = 3.\end{aligned}$$

La gráfica tanto de f como de p_2 se pueden apreciar en la Figura 2.1.

2.2.2. Interpolación de Newton

Debido al Teorema 2.1 de la Sección 2.1, que asegura la unicidad del polinomio solución del problema interpolatorio 2.1, el polinomio de interpolación de Newton debe ser el mismo que el de Lagrange puesto que busca resolver el mismo problema; por lo tanto, la diferencia entre ambos estriba en la manera en que cada uno lo calcula: como se vio en la sección anterior, Lagrange lo expresa como una combinación lineal de los elementos de la base $\{l_0(x), l_1(x), \dots, l_n(x)\}$ del espacio lineal P_n , mientras que Newton emplea una base distinta que veremos a continuación. Cada uno tiene sus ventajas y sus inconvenientes: la fórmula de Lagrange posee la cualidad de estar expresada explícitamente mediante los valores de la función en los nodos dados, por lo que su cálculo es muy directo; sin embargo tiene un defecto importante, ya que si se desea añadir un nodo extra, la anterior base deja de servir y hay que determinar una completamente nueva, que no tiene una relación sencilla con la anterior [4].

Figura 2.1: $f(x)$ y su polinomio de Lagrange $p_2(x)$

La fórmula de Newton permite incrementar el número de nodos de manera simple, pero sacrificando otras propiedades que se verán adelante. En este caso, se desea expresar el polinomio de interpolación $p_n(x)$ como combinación lineal de la base $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ de P_n :

$$p_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x), \quad (2.27)$$

donde

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= (x - x_0) \\ \varphi_2(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

A diferencia del proceso en la fórmula de Lagrange, en donde se conocían los coeficientes de la combinación lineal pero se ignoraba la expresión explícita de la base, ahora se conoce la base pero es necesario calcular las constantes a_i . Para este efecto, se empieza por evaluar $p_n(x)$ en $x = x_0$ y considerar 2.17 para obtener

$$p_n(x_0) = a_0 = y_0. \quad (2.28)$$

En seguida se repite el procedimiento, ahora para $x = x_1$:

$$p_n(x_1) = y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1,$$

de donde

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}. \quad (2.29)$$

En este momento es necesario, por comodidad, introducir una definición antes de continuar.

Definición 2.2. A la constante a_i se le llamará la *diferencia dividida de i -ésimo orden de y_0, y_1, \dots, y_i con respecto a x_0, x_1, \dots, x_i* , y se le denotará por

$$a_i = [y_0, y_1, \dots, y_i] .$$

Hay dos fórmulas para a_i . La que se encuentra en la mayoría de los textos sobre el tema, como [6] y [12], se da inductivamente de la siguiente manera:

$$a_i = [y_0, y_1, \dots, y_i] = \frac{[y_1, y_2, \dots, y_i] - [y_0, y_1, \dots, y_{i-1}]}{x_i - x_0} , \quad (2.30)$$

tomando en cuenta las ecuaciones 2.28 y 2.29 para las primeras diferencias.

En [4], Davis proporciona una manera más compacta de calcular las a_i , al comparar 2.27 con la fórmula de Lagrange dada por la ecuación 2.25. En 2.27, el coeficiente de z_n es a_n ; en la ecuación 2.25, recordando que $f(x_i) = y_i$, se puede ver que es

$$\sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\pi'(x_i)} .$$

Por lo tanto, al igualarlos se tiene que

$$a_n = [y_0, y_1, \dots, y_n] = \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{\pi'(x_i)} . \quad (2.31)$$

Ahora sí, regresando a la fórmula de Newton, a partir de la ecuación 2.31,

$$\begin{aligned} a_0 &= y_0 \\ a_1 &= \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \\ a_2 &= \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mediante 2.31 se puede expresar la *Fórmula de Interpolación de Newton con Diferencias Divididas* como sigue:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n [y_0, y_1, \dots, y_n] \varphi_n(x) . \quad (2.32)$$

En el caso en que $y_i = f(x_i)$, la ecuación 2.32 se convierte en

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)] \varphi_n(x) .$$

Ejemplo 2.2. Se retoma el Ejemplo 2.1 para ilustrar el procedimiento de Newton. Así, la función a interpolar es $f(x) = \sqrt{x}$ en los puntos $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ y $x_2 = 9$. La base para este problema es

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= (x - 1) \\ \varphi_2(x) &= (x - 1)(x - 4)\end{aligned}$$

y la forma deseada del polinomio es

$$p_2(x) = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x_1)(x - 4)$$

Las a_i se calculan con las ecuaciones 2.28, 2.29 y 2.30, de donde

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = -\frac{1}{60},$$

por lo que el polinomio interpolatorio para este problema es

$$p_2(x) = 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - \frac{1}{60}(x - 1)(x - 4),$$

el cual si se desarrolla se verá que es el mismo que el de la ecuación 2.26, solución del Ejemplo 2.1

Como se mencionó al principio de esta sección, la fórmula de Newton requiere solamente de un término extra en la suma cuando se aumenta un nodo, por lo que aventaja al método de Lagrange en este aspecto. Sin embargo, el precio anunciado por esta comodidad queda claro al revisar ambas fórmulas: los coeficientes de la combinación lineal de Newton han dejado de ser simples valores en cada punto como era el caso con Lagrange, para convertirse ahora en combinaciones de ellos.

2.2.3. Interpolación de Hermite

Las dos previas fórmulas para la interpolación tenían como objetivo proporcionar polinomios cuyos valores coincidían con los de una función dada en ciertos nodos; es decir, la idea era resolver el problema de interpolación planteado en la ecuación 2.1. Sin embargo, 2.1 es sólo un caso particular de una clase más amplia de problemas, en donde no sólo se tiene información acerca de los valores de la función sino que además se conoce el valor de varias derivadas de ella en algunos puntos, y se intenta forzar al polinomio a coincidir con esos valores también. La interpolación de Hermite se encarga de lidiar con este problema.

En esta sección se da una demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución a este problema general, y posteriormente se deduce la fórmula de interpolación de Hermite para el caso en que se cuenta con información hasta la primera derivada en cada nodo.

Teorema 2.3. *Dados $n + 1$ puntos distintos x_0, x_1, \dots, x_n y además $n + 1$ enteros positivos m_0, m_1, \dots, m_n , existe un único polinomio $p(x)$ de grado $m_0 + m_1 + \dots + m_n + n = N$ o menor que resuelve el problema de interpolación*

$$p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.33)$$

donde $f(x)$ es una función que tiene m_i derivadas consecutivas en x_i , y con $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m_i$.

Observación. El problema de interpolación 2.1 es el caso particular de 2.33 cuando se tiene que $m_0 = m_1 = \dots, m_n = 0$.

Demostración. Se busca un polinomio $p(x) = a_N x^N + a_{N-1} x^{N-1} + \dots + a_0$ tal que en cada x_i se cumpla la ecuación 2.33. Entonces se tienen $N + 1$ incógnitas a_N, a_{N-1}, \dots, a_0 por resolver. Manteniendo fija i , las condiciones $p^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)$, donde $j = 0, 1, \dots, m_i$, dan como resultado $m_i + 1$ ecuaciones lineales en las $N + 1$ incógnitas. Dado que se tienen $m_i + 1$ ecuaciones en cada nodo x_i , el sistema constará de $m_0 + m_1 + \dots + m_n + (n + 1) = N + 1$ ecuaciones lineales en las $N + 1$ incógnitas; entonces basta demostrar que la matriz de coeficientes del sistema es no singular para probar la existencia y unicidad de la solución. Escribáse el sistema en forma matricial $Ay = b$, donde

$$y = (a_N, a_{N-1}, \dots, a_0)^T,$$

$$b = (f(x_0), f'(x_0), \dots, f^{(m_0)}(x_0), f(x_1), \dots, f^{(m_n)}(x_n))^T.$$

Se demostrará que el sistema homogéneo relacionado $Ay = 0$ tiene solamente la solución trivial $a_N = a_{N-1} = \dots = a_0 = 0$. Como se tomó $Ay = 0$, $f^{(j)}(x_i) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m_i$. Entonces dado que $p(x)$ cumple con 2.33 y es de grado N , por el teorema de factorización $p(x)$ es de la forma

$$p(x) = \alpha(x)(x - x_0)^{m_0+1}(x - x_1)^{m_1+1} \dots (x - x_n)^{m_n+1},$$

donde $\alpha(x)$ es un polinomio. Si $\alpha(x)$ no se anula idénticamente, entonces

$$(x - x_0)^{m_0+1}(x - x_1)^{m_1+1} \dots (x - x_n)^{m_n+1}$$

es un polinomio de grado $m_0 + m_1 + \dots + m_n + (n + 1) = N + 1$, mientras que $p(x)$ es de grado N . Por lo tanto, forzosamente $\alpha(x) \equiv 0$, y esto implica que $p(x) \equiv 0$. Entonces $a_N = a_{N-1} = \dots = a_0 = 0$, y el sistema $Ay = 0$ tiene solamente la solución trivial. Esto prueba que A es no singular y el teorema queda demostrado [7]. \square

Ahora se derivará la fórmula que se obtiene a partir de un método clásico asociado con el nombre de Hermite, llamado interpolación osculatoria, que hace uso de los valores de la función y de su primera derivada en cierto número de nodos [6]. Este método busca la

solución del caso particular de 2.33 en el que $j = 0, 1$. Entonces, sean x_0, x_1, \dots, x_n los puntos en los que se conoce el valor tanto de $f(x)$ como de $f'(x)$. En vista del teorema anterior y de que $m_i = 1$, $i = 0, 1, \dots, n$, es posible encontrar un polinomio de grado $m_0 + m_1 + \dots + m_n + n = 2n + 1$ que coincida con dichos valores conocidos. Se asumirá que tal polinomio puede ser expresado en la forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^n h_i(x)f(x_i) + \sum_{i=0}^n \bar{h}_i(x)f'(x_i), \quad (2.34)$$

donde $h_i(x)$ y $\bar{h}_i(x)$ son polinomios de grado máximo $2n + 1$ que deben ser determinados.

De la ecuación 2.34 se tiene que

$$h_j(x_i) = \delta_{ji}, \quad \bar{h}_j(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(x_i) = f(x_i) \quad (2.35)$$

y

$$h'_j(x_i) = 0, \quad \bar{h}'_j(x_i) = \delta_{ji} \quad \Rightarrow \quad p'(x_i) = f'(x_i) \quad (2.36)$$

para $0 \leq i, j \leq n$. Ahora recuérdese la expresión de los polinomios $l_i(x)$ en la fórmula de Lagrange:

$$l_i(x) = \frac{\pi(x)}{(x - x_i)\pi'(x_i)}.$$

En la sección 2.2.1 se vio que $l_i(x)$ es un polinomio de grado n tal que $l_j(x_i) = \delta_{ji}$. Por lo tanto, $[l_j(x_i)]^2$ es un polinomio de grado $2n$ que satisface $[l_j(x_i)]^2 = \delta_{ji}$ y cuya derivada se anula en x_i cuando $i \neq j$. Por lo tanto, debe poder escribirse

$$h_i(x) = \varphi_i(x) [l_i(x)]^2, \quad \bar{h}_i(x) = \psi_i(x) [l_i(x)]^2, \quad (2.37)$$

donde $\varphi_i(x)$ y $\psi_i(x)$ son funciones lineales de x tales que $h_i(x)$ y $\bar{h}_i(x)$ cumplan las condiciones establecidas anteriormente; los siguientes cálculos revelarán algunos requisitos que imponen las ecuaciones 2.35 y 2.36 sobre $\varphi_i(x)$ y $\psi_i(x)$:

$$h_i(x_i) = \varphi_i(x_i) [l_i(x_i)]^2 = \varphi_i(x_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi_i(x_i) = 1$$

$$h'_i(x_i) = \varphi'_i(x_i) + 2\varphi_i(x_i)l'_i(x_i) = \varphi'_i(x_i) + 2l'_i(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi'_i(x_i) + 2l'_i(x_i) = 0$$

$$\bar{h}_i(x_i) = \psi_i(x_i) [l_i(x_i)]^2 = \psi_i(x_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_i(x_i) = 0$$

$$\bar{h}'_i(x_i) = \psi'_i(x_i) + 2\psi_i(x_i)l'_i(x_i) = \psi'_i(x_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad \psi'_i(x_i) = 1$$

por lo que

$$\varphi_i(x) = 1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i), \quad \psi_i(x) = x - x_i \quad (2.38)$$

y entonces sustituyendo 2.37 y 2.38, la ecuación 2.34 se convierte en

$$p(x) = \sum_{i=0}^n [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)] [l_i(x)]^2 f(x_i) + \sum_{i=0}^n (x - x_i) [l_i(x)]^2 f'(x_i) \quad (2.39)$$

con $l_i(x)$ definido como en 2.24. La ecuación 2.39 se conoce como Fórmula de Interpolación Osculatoria de Hermite.

Ejemplo 2.3. El proceso de interpolación osculatoria se aplica a la función $f(x) = \sqrt{x}$ considerada en los Ejemplos 2.1 y 2.2. Sin embargo, en esta ocasión se hace uso del valor de la primera derivada en los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ y $x_2 = 9$, además de los valores de f ahí mismo. La información extra hace que el polinomio de Hermite sea de grado 5 en vez de ser de grado 3 como en los ejemplos mencionados.

El polinomio requerido tiene que ser de la forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^2 [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)] [l_i(x)]^2 f(x_i) + \sum_{i=0}^2 (x - x_i) [l_i(x)]^2 f'(x_i),$$

con $l_0(x)$, $l_1(x)$ y $l_2(x)$ iguales que en el Ejemplo 2.1. Tomando en cuenta que la derivada de f es $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ y después de hacer los cálculos pertinentes, $p(x)$ queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p(x) = & \frac{(11x + 1)(x - 4)^2(x - 9)^2}{12 \cdot 24^2} + \frac{2 \cdot (31 - 4x)(x - 1)^2(x - 9)^2}{15 \cdot 15^2} \\ & + \frac{3 \cdot (137 - 13x)(x - 1)^2(x - 4)^2}{20 \cdot 40^2} + \frac{(x - 1)(x - 4)^2(x - 9)^2}{2 \cdot 24^2} \\ & + \frac{(x - 4)(x - 1)^2(x - 9)^2}{4 \cdot 15^2} + \frac{(x - 9)(x - 1)^2(x - 4)^2}{6 \cdot 40^2}. \end{aligned}$$

Multiplicando y reduciendo términos semejantes, se tiene que

$$p(x) = \frac{1}{432000}(37x^5 - 1083x^4 + 12351x^3 - 73009x^2 + 329112x + 164592),$$

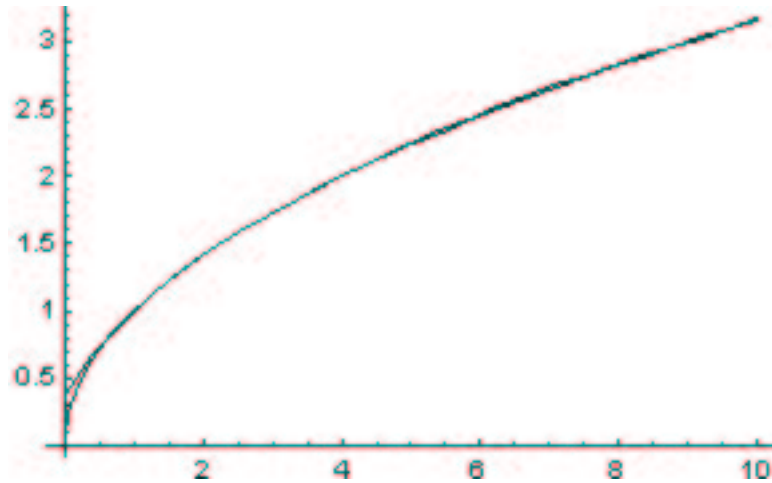
y

$$p'(x) = \frac{1}{432000}(185x^4 - 4332x^3 + 37053x^2 - 146018x + 329112).$$

De nueva cuenta, al sustituir los nodos en las ecuaciones anteriores, se puede ver que $p(x)$ cumple con

$$\begin{aligned} f(1) = p(1) = 1, & \quad f'(1) = p'(1) = \frac{1}{2} \\ f(4) = p(4) = 2, & \quad f'(4) = p'(4) = \frac{1}{4} \\ f(9) = p(9) = 3, & \quad f'(9) = p'(9) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La Figura 2.2 muestra la gráfica de $p(x)$ junto con la de la función $f(x)$.

Figura 2.2: $f(x)$ y su polinomio de Hermite $p(x)$

2.2.4. Splines Cúbicos

Los métodos de interpolación polinomial que se han estudiado hasta ahora tienen sus ventajas y desventajas como ya se ha mencionado. La interpolación de Newton y Lagrange es limitada por varios motivos: la excesiva oscilación entre nodos, al añadir un nodo extra el nuevo polinomio puede ser considerablemente distinto al anterior, además de que esta variación no se restringe a la zona cercana al nuevo punto sino que afecta a todo el dominio. Algunos de estos problemas se corrigen en distinto grado aplicando la interpolación de Hermite, que tiene la propiedad de ajustarse mejor en muchos casos al aspecto general de la función debido a la información de las derivadas de ésta. Sin embargo, el problema con el método de Hermite es que muchas veces tal información no está disponible, por lo que es conveniente tener otra alternativa.

Una opción es abandonar el requerimiento de que la función de interpolación sea un polinomio, y en su lugar considerar la familia de funciones llamada polinomios a trozos; esto es, funciones que son polinomios distintos en diferentes subintervalos del intervalo original. El ejemplo más sencillo de una función de este estilo es una función lineal a trozos, donde cada par de nodos se une por medio de una recta. Por supuesto, es posible crear una función a trozos compuesta por polinomios de Hermite, empleando cada par de puntos y el valor de la función y de su derivada en cada uno de ellos; esto proporciona una mejora en la aproximación pero de todas maneras es necesaria información sobre la derivada en los nodos.

La interpolación por splines cúbicos es una forma de interpolación por polinomios a trozos que intenta sortear estas dificultades, al no pedir información de la derivada salvo quizá en el punto inicial y en el final. Por otra parte, crea una función aún más suave

ya que impone condiciones sobre la primera y segunda derivada de los polinomios que la componen; esto es, requiere que cada par de polinomios tenga la misma primera y segunda derivada en el punto en que coinciden. Para lograr esto, los polinomios deben ser de grado tres, de ahí que se le llame spline cúbico.

El Cálculo de los Splines

En esta sección se da la definición de spline cúbico y se deduce un algoritmo para calcularlos, además de probar su existencia y unicidad en la interpolación de una función dada. Pero antes de esto, se enuncia y demuestra un pequeño teorema de álgebra lineal que será de utilidad.

Definición 2.3. Una matriz A de $n \times n$ es *diagonalmente dominante estrictamente* si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

se cumple para $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 2.4. Una matriz A de $n \times n$ diagonalmente dominante estrictamente es no singular.

Demostración. Considérese el sistema lineal homogéneo $Ax = 0$, y supóngase que A es singular; esto es, que existe una solución diferente de cero $x = (x_i)$ para el sistema. Sea

$$0 < |x_k| = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|.$$

Dado que $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, cuando $i = k$ se tiene que

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = 0 \quad \Rightarrow \quad a_{kk}x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj}x_j.$$

Por lo tanto,

$$|a_{kk}| |x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| |x_j|$$

y finalmente

$$|a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|} \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|,$$

por lo que A no podría ser diagonalmente dominante estrictamente. Entonces A debe ser no singular, lo que completa la demostración [12]. \square

Definición 2.4. Dada f definida en $[a, b]$ y $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, un *spline cúbico* S para f es una función que satisface

1. S es un polinomio cúbico en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, n - 1$, representado por S_i .
2. $S(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$.
3. $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$.
4. $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$.
5. $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, n - 2$.

Además de estas 5 condiciones, un spline cúbico está sujeto a condiciones de frontera, de las cuales las dos más utilizadas son:

- a) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ Cota Libre.
- b) $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ Cota Fija.

Cuando se ocupa la cota libre, la función es llamada spline cúbico natural; si en cambio se aplica la cota fija, se llamará spline cúbico fijo. El spline cúbico natural en general es menos recomendable que el de cota fija, puesto que la condición a) puede producir un aumento en el error cerca de x_0 y x_n si realmente la segunda derivada de f no tiene un valor cercano a cero. Sin embargo, el spline cúbico de cota fija tiene la desventaja de requerir información del valor de la derivada de f en los extremos, datos de los que a menudo se carece.

Teorema 2.5. Si f está definida en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, entonces existe un único spline cúbico natural que interpola a f en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n .

Teorema 2.6. Si f está definida en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ y tiene derivada en a y en b , entonces existe un único spline cúbico fijo que interpola a f en los puntos x_0, x_1, \dots, x_n .

Demostración. Los dos teoremas se demostrarán simultáneamente: el esquema de la prueba es construir los splines deseados y aplicando las condiciones de frontera en cada caso concluir su existencia y unicidad [12].

Sea $S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$ para $i = 0, 1, \dots, n - 1$, y defínase $h_i = x_{i+1} - x_i$. Es claro que $S_i(x_i) = a_i = f(x_i)$, y hágase $a_n = f(x_n)$. Con esto, se cumplen 1 y 2 en la Definición 2.4. Aplicando 3 de la Definición 2.4 y usando la definición de h_i ,

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 \quad (2.40)$$

para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Ahora se deriva S_i :

$$S'_i(x) = b_i + 2c_i(x - x_i) + 3d_i(x - x_i)^2.$$

Igual que antes, se ve fácilmente que $S'_i(x_i) = b_i$, y hágase $S'_n(x_n) = b_n$. Entonces al aplicar 4, se tiene que

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 \quad (2.41)$$

para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. El siguiente paso es calcular la segunda derivada de S_i , que es

$$S''_i(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_i).$$

De aquí se encuentra que $S''_i(x_i)/2 = c_i$; se define $S''_n(x_n)/2 = c_n$ y con la condición 5,

$$c_{i+1} = c_i + 3d_i h_i \quad (2.42)$$

para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Despejando d_i de 2.42 y sustituyendo la expresión resultante en las ecuaciones 2.40 y 2.41, se obtienen

$$a_{i+1} = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + \frac{h_i^2}{3}(c_{i+1} - c_i) = a_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2c_i + c_{i+1}) \quad (2.43)$$

y

$$b_{i+1} = b_i + 2c_i h_i + h_i(c_{i+1} - c_i) \quad (2.44)$$

para $i = 0, 1, \dots, n - 1$. A partir de 2.43 se expresan b_i y, mediante una reducción de índice, b_{i-1} de la siguiente manera:

$$b_i = \frac{1}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \quad b_{i-1} = \frac{1}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) - \frac{h_{i-1}}{3}(2c_{i-1} + c_i). \quad (2.45)$$

De igual forma se reduce el índice de 2.44 y ahí se sustituye 2.45, obteniendo finalmente:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1}) \quad (2.46)$$

para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. En la ecuación 2.46 las incógnitas sólo son las c_i , $i = 0, 1, \dots, n$, puesto que a_i es el valor de la función en x_i , mientras que h_i es la diferencia entre nodos consecutivos. Una vez conocidas las c_i , sustituyendo consecutivamente en las ecuaciones 2.45 y 2.42 se encuentran b_i y d_i . Por último estos valores se introducen en S_i y así se forma el spline S .

Ahora la ecuación 2.46 da un sistema de $n - 1$ ecuaciones con $n + 1$ incógnitas, por lo que en este momento se emplean las condiciones de frontera y de ahí saldrán las 2 ecuaciones lineales restantes. Primero se ocuparán las condiciones de cota libre.

Dado que $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, se tiene que

$$c_n = S_n''(x_n)/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_n = 0$$

y

$$S_0''(x_0) = 2c_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_0 = 0,$$

por lo que entonces el sistema $Ax = b$ descrito por 2.46 y estas últimas dos ecuaciones queda de la siguiente manera:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Dado que la matriz A es diagonalmente dominante estrictamente, el sistema tiene solución única en virtud del Teorema 2.4 y por lo tanto el spline es único. Esto prueba el Teorema 2.5.

Para probar el Teorema 2.6, se usan ahora las condiciones de frontera fijas. Como se tiene que $f'(a) = S'(a) = S_0'(x_0) = b_0$, empleando la ecuación 2.45 queda

$$f'(a) = \frac{1}{h_0}(a_1 - a_0) - \frac{h_0}{3}(2c_0 + c_1).$$

Entonces

$$2h_0c_0 + h_0c_1 = \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a). \quad (2.49)$$

Por otra parte, $f'(b) = S'(b) = S_n'(x_n) = b_n$ y entonces con la ecuación 2.44,

$$f'(b) = b_{n-1} + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n),$$

y por la 2.45,

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{1}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{h_{n-1}}{3}(2c_{n-1} + c_n) + h_{n-1}(c_{n-1} + c_n) \\ &= \frac{1}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) + \frac{h_{n-1}}{3}(c_{n-1} + 2c_n). \end{aligned}$$

Despejando,

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}). \quad (2.50)$$

Ahora la ecuación 2.46 junto con 2.49 y 2.50 determinan el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2h_0 & h_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ h_0 & 2(h_0 + h_1) & h_1 & \cdot & & & \cdot \\ 0 & h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & 0 \\ \cdot & & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} \\ 0 & \cdot & \cdot & & 0 & h_{n-1} & 2h_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

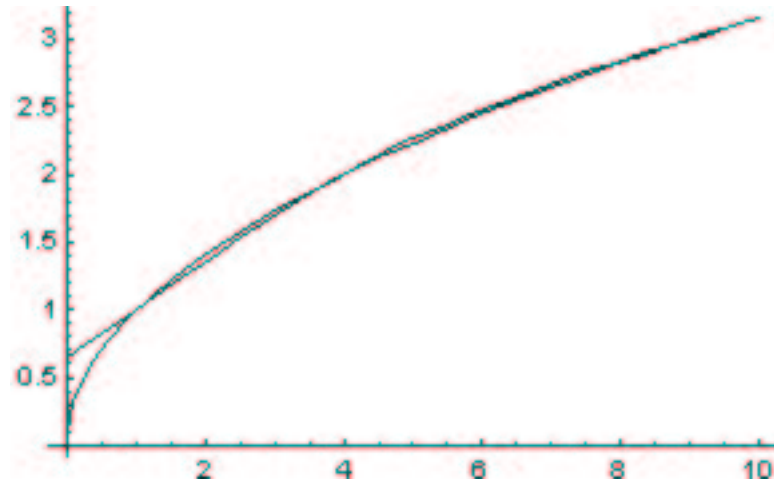
$$b = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) - 3f'(a) \\ \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) - \frac{3}{h_0}(a_1 - a_0) \\ \frac{3}{h_2}(a_3 - a_2) - \frac{3}{h_1}(a_2 - a_1) \\ \vdots \\ \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ 3f'(b) - \frac{3}{h_{n-1}}(a_n - a_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

De nuevo, la matriz A es diagonalmente dominante estrictamente, por lo que el Teorema 2.4 asegura que el sistema tiene solución única para c_i , $i = 0, 1, \dots, n$, y consecuentemente el spline es único, con lo que queda demostrado el Teorema 2.6. \square

Ejemplo 2.4. Nuevamente se toma la función $f(x) = \sqrt{x}$ de los ejemplos anteriores y ahora se desea calcular el spline cúbico natural que la interpola en los nodos $x_0 = 1$, $x_1 = 4$ y $x_2 = 9$. Como son tres puntos, el spline estará formado por dos polinomios cúbicos que se unen en el segundo nodo y que en ese lugar coinciden en valor, pendiente y curvatura.

Primero se forman la matriz A y los vectores b y x descritos por las ecuaciones 2.47 y 2.48. El sistema $Ax = b$ resultante es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 16 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Figura 2.3: $f(x)$ y su spline natural $S_N(x)$

Resolviendo este sistema y después sustituyendo los valores obtenidos en las ecuaciones 2.42 y 2.45, se encuentra que el spline cúbico natural S_N que se requiere es

$$S_N(x) = \begin{cases} 1 + \frac{43}{120}(x-1) - \frac{1}{360}(x-1)^3 & x \in [1, 4] \\ 2 + \frac{17}{60}(x-4) - \frac{1}{40}(x-4)^2 + \frac{1}{600}(x-4)^3 & x \in [4, 9] \end{cases}$$

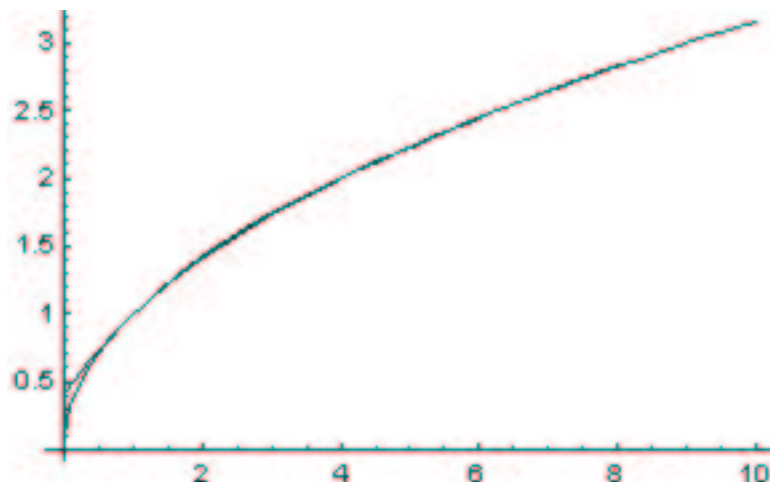
Sustituyendo los valores de los nodos en $S_N(x)$ se comprueba que esta función interpola a f en los puntos deseados y que además cumple con los requisitos de la Definición 2.4 y las condiciones de cota libre. En la Figura 2.3 se presentan las gráficas de $f(x)$ y del spline natural $S_N(x)$.

Ejemplo 2.5. Para la misma función y nodos del Ejemplo 2.4, se busca el spline cúbico fijo. Esto es posible puesto que se conoce el valor de la derivada de f tanto en $x_0 = 1$ como en $x_2 = 9$. Así, se construye el sistema $Ax = b$ mediante las ecuaciones 2.51 y 2.52:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 3 & 16 & 5 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2/5 \\ -1/10 \end{pmatrix}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, se resuelve para los c_i y después se consiguen los valores de b_i y d_i utilizando las ecuaciones 2.42 y 2.45; finalmente, el spline cúbico fijo para f con los nodos dados es

$$S_F(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{19}{240}(x-1)^2 + \frac{17}{2160}(x-1)^3 & x \in [1, 4] \\ 2 + \frac{19}{80}(x-4) - \frac{1}{120}(x-4)^2 + \frac{1}{6000}(x-4)^3 & x \in [4, 9] \end{cases},$$

Figura 2.4: $f(x)$ y su spline cúbico fijo $S_F(x)$

el cual cumple con las condiciones de la Definición 2.4 y las de cota fija. Generalmente el spline fijo brinda mejores aproximaciones que el natural, como se puede apreciar comparando la Figura 2.3, que presenta a $f(x)$ y su spline natural, y la Figura 2.4, la cual muestra lo cercano que está el spline fijo de la función a aproximar.

Propiedad de Norma Mínima del Spline Cúbico Natural

Como se ha visto a lo largo de este capítulo, los procesos interpolativos buscan producir una función con suficientes propiedades de continuidad y suavidad que se ajuste a cierto número de datos obtenidos empíricamente. Sin embargo, muy frecuentemente en la recolección de datos, haya sido ésta mediante un experimento, encuesta o cualquier método apropiado, aparecen puntos que rompen abruptamente con el aspecto general que presentaba el resto de la información. Por otra parte, hasta los datos recogidos que parecen razonables no pueden considerarse completamente precisos. A estas anomalías, que se deben a imprecisiones inherentes a las mediciones llevadas a cabo, se les conoce comúnmente como ruidos. En general éstos son bastante problemáticos en lo que toca a la construcción de una función interpolatoria, puesto que no tiene mucho sentido forzar una función a pasar por los puntos recolectados que se sabe son imprecisos.

Por fortuna, la interpolación no es la única vía para aproximar datos. El concepto de cercanía en la aproximación ayuda a zanjar este tipo de problemas, puesto que en esa forma se tiene un marco de referencia para saber si una función dada puede emplearse como aproximación de una serie de datos discretos o de una función desconocida. En muchos casos se mide la cercanía de aproximación sobre un intervalo tomando la máxima desviación entre la función original y la que se usará para aproximarla; otras opciones son tomar la máxima

desviación sobre un conjunto finito de puntos, la suma del cuadrado de las desviaciones o, regresando al caso continuo, la integral del cuadrado de las desviaciones. Así, ya no se pretende ajustar la función aproximatoria a ciertos puntos conocidos sino que ahora se intenta minimizar el criterio de cercanía de aproximación elegido.

La presente tesis trata con asuntos de interpolación, por lo que no se explorarán los temas de aproximación por mínimos cuadrados, polinomios ortonormales y demás. Sin embargo, los splines tienen una propiedad muy importante relacionada con estos aspectos de la aproximación: el spline cúbico natural es la función más suave entre todas las funciones de clase C^2 que interpolan un conjunto de datos discretos. A esta propiedad se le conoce como la propiedad de norma mínima del spline cúbico natural y se demuestra a continuación.

Teorema 2.7 (Propiedad de norma mínima del spline cúbico natural). *Sea $f(x)$ el spline cúbico natural para x_1, x_2, \dots, x_n tal que $f(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$, y sea $g(x)$ cualquier función de clase C^2 tal que $g(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Entonces*

$$I(g) \geq I(f), \quad (2.53)$$

donde I será el funcional definido por

$$I(g) = \int_{x_1}^{x_n} [g''(x)]^2 dx,$$

el cual proporciona la medida de la suavidad de una función, y la igualdad en 2.53 se da si y sólo si $g(x) \equiv f(x)$.

Demostración. Dado que $g''(x) = f''(x) + [g''(x) - f''(x)]$, se tiene que

$$[g''(x)]^2 = [f''(x)]^2 + 2f''(x)[g''(x) - f''(x)] + [g''(x) - f''(x)]^2,$$

y por lo tanto

$$\int_{x_1}^{x_n} [g''(x)]^2 dx = \int_{x_1}^{x_n} [f''(x)]^2 dx + 2 \int_{x_1}^{x_n} f''(x)[g''(x) - f''(x)] dx + \int_{x_1}^{x_n} [g''(x) - f''(x)]^2 dx. \quad (2.54)$$

Se probará que el segundo término del lado derecho de la ecuación 2.54, el cual se denotará por $*$, es cero. Integrando por partes, se tiene que

$$* = f''(x)[g'(x) - f'(x)] \Big|_{x_1}^{x_n} - \int_{x_1}^{x_n} f'''(x)[g'(x) - f'(x)] dx.$$

$f''(x_1) = f''(x_n) = 0$, ya que f es un spline cúbico natural, por lo que

$$* = - \int_{x_1}^{x_n} f'''(x)[g'(x) - f'(x)] dx = - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f'''(x)[g'(x) - f'(x)] dx.$$

Sin embargo, como f es un spline cúbico, f''' es una función constante a trozos cuyo valor dentro de $[x_i, x_{i+1}]$ se denotará por h_i , obteniendo

$$* = - \sum_{i=1}^{n-1} h_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} [g'(x) - f'(x)] dx = - \sum_{i=1}^{n-1} h_i ([g(x_{i+1}) - f(x_{i+1})] - [g(x_i) - f(x_i)]),$$

y dado que $f(x_i) = g(x_i)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, se concluye que $* = 0$. Por lo tanto, la ecuación 2.54 se convierte en

$$\int_{x_1}^{x_n} [g''(x)]^2 dx = \int_{x_1}^{x_n} [f''(x)]^2 dx + \int_{x_1}^{x_n} [g''(x) - f''(x)]^2 dx, \quad (2.55)$$

de donde se concluye 2.53 en virtud de la no negatividad de la segunda integral del lado derecho de la ecuación 2.55. Finalmente, la igualdad se alcanza solamente en el caso en que $g''(x) - f''(x) \equiv 0$, lo que diría que $g(x) - f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que 1. Pero como $g(x_i) - f(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$, se sigue que $g(x) - f(x) \equiv 0$; es decir, $g \equiv f$. Con esto el teorema queda demostrado [2]. \square