Capítulo 1

Introducción

Primero que nada, es preciso dejar en claro una palabra clave que aparece en el título de esta Tesis: interpolación. En el sentido matemático, la interpolación se refiere al proceso de aproximar una función en un intervalo o un conjunto de puntos por medio de la obtención de una nueva función simple, como podría ser un polinomio, que tome los mismos valores que la función original en cada punto deseado.

En algunos casos, se posee un conjunto de datos de un fenómeno físico o de otra índole observados a través del tiempo y se desea obtener una aproximación de lo que sucederá más adelante con el objeto de entender mejor tal fenómeno. Inclusive podría ser necesario tener una idea de lo que pasó antes de iniciar las observaciones, o tal vez llenar los huecos que forzosamente existen entre los datos recabados. Para este tipo de problemas, un proceso interpolatorio brinda como resultado una función que encaja exactamente con los datos, que es de fácil manipulación y que posee ciertas propiedades de suavidad deseadas, la cual puede servir como modelo de comportamiento del sistema.

La manera usual de atacar estas situaciones es primeramente escoger un conjunto de funciones coordenadas. En seguida, se establece un proceso de selección que entregue una función cuyas propiedades sean lo más cercanas posibles a la función a interpolar o, en el caso en que se tengan puntos discretos, que coincida con los datos observados. El conjunto de funciones que se pueden expresar como combinaciones lineales de las funciones coordenadas será el universo del cual saldrá la elegida; es por eso que a dichas funciones coordenadas se les conoce como base, y tal como sucede en álgebra lineal, éstas deben ser linealmente independientes entre ellas. Si la función a interpolar pudiera ser escrita como combinación lineal de los elementos de la base, entonces el proceso interpolatorio deberá ser capaz de seleccionarla apoyándose en sus propiedades conocidas.

En general, cualquier conjunto de funciones que genere a los polinomios de cierto grado deseado será muy conveniente, dadas las bondadosas propiedades de éstos: su fácil evaluación, el hecho de que al integrarlos o derivarlos se vuelva a obtener otro polinomio, y sus propiedades de continuidad. Sin embargo, las razones principales que hacen que la interpolación polinomial sea tan popular están contenidas en dos teoremas fundamentales que se verán en el Capítulo 2 de la presente Tesis. Además de dichos teoremas, presentados en la Sección 2.1, en el Capítulo 2 se incluyen los métodos interpolatorios más usados y famosos en la Sección 2.2, cada uno con su singular elección de base. Por otra parte, hay que tener en cuenta que los polinomios no son las únicas funciones útiles para interpolar. Por ejemplo, los polinomios a trozos, que no son propiamente polinomios, a menudo proporcionan buenas interpolaciones. Cuando se trata de conseguir una función interpolatoria extremadamente suave, los polinomios a trozos conocidos como Splines Cúbicos son una excelente alternativa. Este tema es cubierto en la Sección 2.2.4.

En el Capítulo 3 aparece el concepto de bases espectrales. A partir del algoritmo euclidiano y del algoritmo de la división, surgen una serie de interesantes relaciones numéricas en anillos modulares que desembocarán en la construcción de una estructura algebráica basada en elementos idempotentes y nilpotentes, los cuales formarán lo que se conoce como base espectral del anillo. El hecho de que el algoritmo euclidiano funcione no sólo para números enteros sino también para polinomios provoca que exista el análogo de las bases espectrales en anillos polinomiales modulares. En la Sección 3.1 se estudian los teoremas básicos para las bases espectrales tanto en números modulares como en anillos polinomiales modulares, mientras que en las Secciones 3.2 y 3.3 se pone de relieve la manera de construir dichas bases y sus propiedades fundamentales; la Sección 3.2 trata el caso numérico y la Sección 3.3 se encarga de exponer el caso polinomial.

El Capítulo 4 de esta Tesis une los dos Capítulos anteriores, conectando dos temas que a primera vista parecieran ajenos y que sin embargo se enriquecen mutuamente. Hay una relación importante entre la conocida base estándar de un anillo polinomial modular y su base espectral, que dice que la matriz de transición de una base a la otra es la matriz generalizada de Vandermonde; esto se cubre en la Sección 4.1. Entre las virtudes de esta relación se cuenta una en especial: la ecuación que enlaza ambas bases pone de manifiesto que los idempotentes y nilpotentes que forman la base espectral cumplen con las mismas condiciones impuestas a las funciones coordenadas en la interpolación de Hermite. Debido a condiciones de unicidad del polinomio de interpolación de Hermite que se demuestran en la Sección 2.2.3, resulta ser que la base espectral de un anillo polinomial modular es también una base de polinomios de Hermite. Los detalles de este revelador hecho se encuentran en la Sección 4.2.

Sin embargo, a pesar de la evidente importancia que reviste esto último en cuanto a que provee una manera mucho más sencilla de calcular polinomios interpolatorios, se puede decir que la conexión entre las bases espectrales y los polinomios de Hermite rinde su mayor beneficio al brindar la posibilidad de extender el concepto de la interpolación de Hermite a los casos en que se tiene un número infinito de puntos de interpolación. Este tema se toca en la Sección 4.3, última parte del Capítulo 4.