Apéndice B - Quaterniones

Para la animación del actor digital, mediante la manipulación de sus articulaciones, y para representar los 3 grados de libertad que describen su orientación, fue fundamental el uso de quaterniones.

Los quaterniones, descubiertos en 1843 por William Rowan Hamilton, son una extensión de los números complejos ampliamente utilizados para representar rotaciones en el espacio tridimensional. El conjunto de los quaterniones, al que se denota como $\mathbb{H}$, forma un grupo asociativo y no conmutativo, razón por la que se les utiliza para representar rotaciones [41][42].

1. Interpretación de los quaterniones

Los quaterniones pueden interpretarse como una extensión de los números complejos, como vectores en $\mathbb{R}^4$, o bien como un escalar y un vector en $\mathbb{R}^3$ [43].

De forma análoga a los números complejos, los quaterniones se definen como la suma de una parte real y tres partes imaginarias. De esta manera, un quaternion h se representa como:

$$h = w + xi + yj + zk$$

en donde $w, x, y, z \in \mathbb{R}$. En esta representación, i, j, k denotan los tres componentes imaginarios del quaternion, que son ortogonales entre sí.

Como vectores en $\mathbb{R}^4$, los quaterniones se definen de la siguiente forma:

$$h = w + xi + yj + zk = [w, x, y, z]$$

Por último, los quaterniones pueden interpretarse como un escalar y un vector en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente forma:

$$h = w + xi + yj + zk = (\omega, v)$$

en donde $v = [x, y, z]$. Mas adelante nos referiremos a esta representación como escalar-vector.

Una vez que se ha defindo la interpretación de los quaterniones, se describen sus principales operaciones.

2. Operaciones con quaterniones

Dado un quaternion $h = w + xi + yj + zk$, su conjugado $\bar{h}$ se define de la siguiente forma:

$$\bar{h} = w - xi - yj - zk$$

Dado un par de quaterniones $h_1 = w_1 + x_1 + y_1 + z_1$ y $h_2 = w_2 + x_2 + y_2 + z_2$, la adición y sustracción de quaterniones se realiza elemento por elemento de la siguiente forma:

$$h_1 \pm h_2 = (w_1 \pm w_2) + (x_1 \pm x_2)i + (y_1 \pm y_2)j + (z_1 \pm z_2)$$
$$h_1 \pm h_2 = [w_1 \pm w_2, x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2]$$

De forma similar, la multiplicación por un escalar s, se hace elemento por elemento, y tiene el efecto de escalar cada uno de los elementos del quaternion de la siguiente forma:

$$sh_1 = sw_1 + sx_1 + sy_1 + sz_1$$
$$sh_1 = [sw_1, sx_1, sy_1, sz_1]$$

Con respecto a la multiplicación de quaterniones, esta operación se define de la siguiente forma:

$$h_1 h_2 = w_3 + x_3 i + y_3 j + z_3 k$$
$$h_1 h_2 = [w_3, x_3, y_3, z_3]$$

en donde:

$$w_3 = w_1 w_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$
$$x_3 = w_1 x_2 + w_2 x_1 + y_1 z_2 - y_2 z_1$$
$$y_3 = w_1 y_2 + w_2 y_1 + x_2 z_1 - x_1 z_2$$
$$z_3 = w_1 z_2 + w_2 z_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Empleando la repesentación escalar-vector, la multiplicación para $h_1 = (w_1, v_1)$ y $h_2 = (w_2, v_2)$, con $v_1 = [x_1, y_1, z_1]$ y $v_2 = [x_2, y_2, z_2]$, se define de la siguiente manera:

$$h_1 h_2 = (w_1 w_2 - v_1 v_2, w_1 v_2 + w_2 v_1 + v_1 \times v_2)$$

Es importante resaltar que la multiplicación de quaterniones, al igual que la multiplicación de matrices, no es conmutativa, es decir $h_1 h_2 \neq h_2 h_1$. Por esta razón, los quaterniones son una excelente opción para representar rotaciones en el espacio tridimensional

Por último, la norma o magnitud de un quaternion se define como se muestra a continuación:

$$|h| = \sqrt{h\bar{h}} = \sqrt{\bar{h}h} = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

A continuación se describe la forma en que se utilizan los quaterniones para la representación de rotaciones. Otras operaciones con quaterniones se describen en [41][42][43][44].

3. Representación de rotaciones mediante quaterniones

Para la representación de rotaciones, uno de los métodos más utilizados es mediante el uso de matrices ortogonales. Las matrices ortogonales son aquellas que satisfacen las siguientes restricciones:

$$RR^T = I$$
$$\det(R) = 1$$

en donde R^T es la matriz transpuesta de R, I denota la matriz identidad, y $\det(R)$ denota el determinante de la matriz R.

Sin embargo, al multiplicar matrices ortogonales se acumulan errores numéricos, y esto nos lleva a obtener matrices "casi ortogonales". De esta manera, encontrar la matriz ortogonal más cercana a una matriz "casi ortogonal" es complicado [43]. Por esta razón, los quaterniones son una alternativa al uso de matrices para la representación de rotaciones.

Para representar rotaciones, el conjunto de quaterniones utilizados se restringe a los quaterniones unitarios, es decir aquellos que para los que $|h| = 1$

El propósito de utilizar quaterniones unitarios es reducir la acumulación de errores ya que el producto de quaterniones unitarios es también un quaternion unitario, y a pesar de la acumulación de errores numéricos, es fácil normalizar el resultado para garantizar que $|h| = 1$ [43].

Ahora bien, para representar una rotación con ángulo θ alrededor del vector unitario $\hat{v} = [\hat{v}_1, \quad \hat{v}_2, \quad \hat{v}_3]$, el quaternion correspondiente es [10]:

$$h = (w, v) = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \hat{v}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$h = \cos\frac{\theta}{2} + \left(\hat{v}_1 \sin\frac{\theta}{2}\right) i + \left(\hat{v}_2 \sin\frac{\theta}{2}\right) j + \left(\hat{v}_3 \sin\frac{\theta}{2}\right) k$$

en donde:

$$w = \cos\frac{\theta}{2}$$

$$x = \hat{v}_1 \sin\frac{\theta}{2}$$

$$y = \hat{v}_2 \sin\frac{\theta}{2}$$

$$z = \hat{v}_3 \sin\frac{\theta}{2}$$

Los quaterniones de esta forma describen una rotación que puede representarse mediante una matriz. Esta matriz se construye a partir de los componentes de un quaternion de la siguiente forma [10]:

$$R(h) = \begin{bmatrix} 2(w^2 + x^2) - 1 & 2(xy - wz) & 2(xz + wy) \\ 2(xy + wz) & 2(w^2 + y^2) - 1 & 2(yz - wx) \\ 2(xz - wy) & 2(yz + wx) & 2(w^2 + z^2) - 1 \end{bmatrix}$$

4. Ventajas del uso de quaterniones

Del uso de quaterniones obtenemos dos ventajas principales. La primera tiene que ver con el número de parámetros que se requieren para describir la orientación de nuestro actor digital. Con una matriz, se necesitarían 9 parámetros, mientras que con un quaternion se requieren sólo 4, por lo que el número de operaciones necesarias para multiplicar dos quaterniones es menor. Además, como se describió anteriormente, la construcción de una matriz de rotación a partir de un quaternion es un proceso sencillo, y esta matriz puede utilizarse fácilmente con la ayuda del API de OpenGL.

Finalmente, la principal ventaja del uso de quaterniones es que éstos pueden interpolarse. De esta manera, si tenemos dos quaterniones que representan orientaciones diferentes, podemos interpolarlos y como resultado obtenemos un quaternion que representa una orientación intermedia. Esto fue de gran utilidad para la animación del actor digital mediante la manipulación de las articulaciones de su esqueleto, pues como se recordará, se definió una serie de keyframes que describen el movimiento del actor digital al caminar. Estos keyframes se interpolan conforme avanza el tiempo, y como resultado obtenemos configuraciones intermedias que se utilizan para mostrar en pantalla la animación correspondiente.