CAPÍTULO 3

Problema del Agente Viajero.

Optimización es uno de los temas con mayor debate dentro del área de cómputo. En este campo, el Problema del Agente Viajero (PAV) es uno de los problemas de optimización con mayor estudio.

En este capítulo daremos una breve descripción del Problema del Agente Viajero (PAV), analizaremos algunas aplicaciones relacionadas con el mismo y explicaremos cómo se relaciona con el problema que tratamos de resolver.

En este proyecto, el problema de optimización es visto como una analogía del PAV con algunas características en su planteamiento. Nosotros lo vamos a llamar el Agente Viajero Multidimensional.

3.1 Descripción del problema del Agente Viajero (PAV).

Indiscutiblemente, el PAV es quizá el problema de optimización combinatoria más popular de todos (Reyes, 1996). De la manera más simple, el Problema del Agente Viajero (PAV) consiste, en que dadas un conjunto de ciudades, un vendedor debe visitar cada una de ellas y regresar a su ciudad de partida, de tal forma que su recorrido sea mínimo (Figura 3.1).

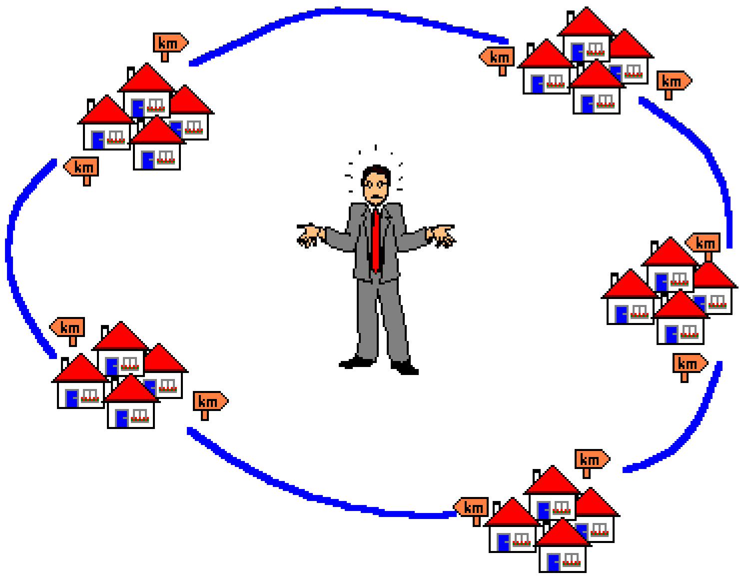


Figura 3.1 Problema del Agente Viajero.

3.2 Formalización del Problema del Agente Viajero.

Muchos de los problemas de optimización combinatoria pueden ser formulados como problemas de grafos (Reinelt, 1994). Por tanto, antes de definir formalmente el Problema del Agente Viajero vamos a revisar brevemente algunos conceptos de la Teoría de Grafos.

3.2.1 Teoría de Grafos.

En la tabla 3.1 se definirán algunos conceptos que vamos a utilizar sobre esta teoría:

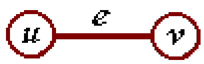
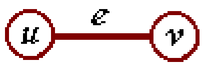
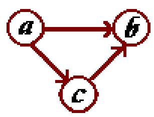
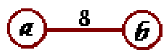
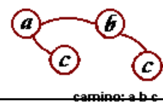
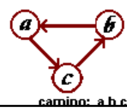
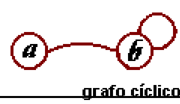
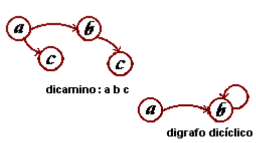
GRÁFICA	DEFINICIÓN
	Un *grafo* G = (V, E) consiste en un conjunto finito de nodos V y un conjunto finito de aristas E. Cada arista e tiene dos nodos en sus extremos u, v y es denotado por $e = uv$ o bien, $e = \{u, v\}$
	Decimos que un grafo es *no dirigido*, cuando no distinguimos entre las aristas uv y vu.
	Un grafo dirigido se conoce también como *digrafo*.
	Las aristas de un grafo pueden tener *pesos*.
	Un *camino o trayectoria* es un conjunto de nodos $P = \{ v_1, v_2, v_3, \ldots v_{k-1}, v_k \}$
	Un camino es *cerrado* si $v_1 = v_k$. El peso de un camino es llamado su *longitud*.
	Decimos que un grafo está *conectado o conexo*, si contiene para todos sus pares de nodos un camino a ellos, de lo contrario G es un grafo *desconectado*.
	Un grafo es llamado *acíclico* si no contiene ciclos, en caso contrario es *cíclico*.
	En los digrafos, los conceptos de dicamino, ditrayectoria, diciclos.; son definidos de manera análoga a los de camino, trayectoria, ciclo, con el requisito de considerar la dirección de sus arcos.

Tabla 3.1 Teoría de grafos.

(Reinelt, 1994)

Un *Circuito Eureliano* es, un camino cerrado que recorre todas las aristas de un grafo exactamente una sola vez.

3.2.2 Definición formal del PAV

Dado un grafo conexo K_n con pesos en sus aristas C_{uv}, encontrar el *Circuito de Hamilton* más corto en K_n.

Podemos esquematizar el problema del Agente Viajero en la siguiente gráfica (Figura 3.2):

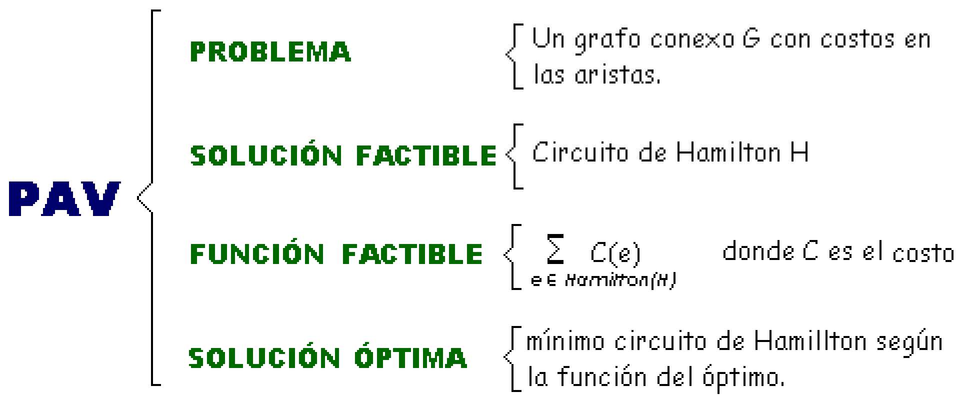


Figura 3.2 PAV

Se dice que un problema de Agente Viajero es s*imétrico* cuando se considera el caso de grafos y a*simétrico* en los digrafos.

Un PAV simétrico, satisface la desigualdad del triángulo si: $C_{uv} \leq C_{uw} + C_{wv}$ para todos los distintos nodos $u, v, w \in V$. Estos son problemas donde los nodos corresponden a puntos en el espacio y donde los pesos de las aristas se calculan por medio de la evaluación de alguna métrica de distancia entre los puntos correspondientes (Reinelt, 1994).

Un ejemplo de este tipo de problemas, es el PAV Euclidiano. Este problema está definido por un conjunto de puntos en un plano. El grafo correspondiente contiene un nodo para cada punto y los pesos de las aristas son dados por la distancia Euclidiana.

Este enfoque es el que será utilizado para la optimización de puntos en las trayectorias de un robot industrial, que es el objetivo de este proyecto.

3.3 Problemas relacionados con el PAV.

Muchos problemas prácticos creen encontrar un modelo de optimización en el Problema del Agente Viajero. Sin embargo, en muchos de estos casos, la argumentación del PAV no es tan clara ni tan pura.

A continuación se describen algunos problemas de optimización que están relacionados con el PAV.

- **PAV para grafos en general.**

  Supongamos que existe un grafo arbitrario *G= (V,E),* no completo y deseamos encontrar el Circuito de Hamilton más corto.

  Para resolver este problema podemos hacer lo siguiente: asignamos un peso M suficientemente grande para cada una de las aristas que faltan y aplicamos el problema del PAV para un grafo completo. El resultado será un camino óptimo, si no contiene ninguna de las aristas con peso M, entonces este camino también es óptimo para el problema original.

El PAV gráfico.

El PAVG (Problema del Agente Viajero Gráfico), emplea un grafo conectado arbitrario *G*. En este tipo de agente está permitido visitar una ciudad en más de una ocasión. Su objetivo es encontrar el camino cerrado en *G* más corto al visitar todas las ciudades requiriendo de la menor distancia posible.

La trayectoria más corta en un Circuito de Hamilton.

Dado un grafo *G* con pesos en sus aristas c_{ij}. Existen dos nodos especiales llamados v_s y v_t que pertenecen a V. La tarea es encontrar el circuito de Hamilton en G de v_s a v_t.

Una forma de solucionar este problema es escogiendo un valor M lo suficientemente grande y asignarle un peso -M a la arista que hay entre v_s y v_t. Entonces calcular el PAV óptimo.

El Circuito de Hamilton y los problemas cíclicos.

Algunas veces es necesario verificar si un grafo $G = (V,E)$ contiene un *circuito de Hamilton*. Esta pregunta puede responderse utilizando un PAV simétrico en un grafo completo K_n (con $n= /V/$).

Construimos el grafo *K,* asignándole un peso de 1 a todas las aristas del grafo original y un peso de 2 a las demás. *G* contiene un *circuito de Hamilton* si el circuito más corto en K_n tiene una longitud de *n*. Si la longitud es de $n+1$, entonces *G* no es Hamiltoniano pero contiene una trayectoria Hamiltoniana.

- **El PAV asimétrico.**

  Si el costo de viajar de la ciudad *i* a la ciudad *j* no es necesariamente el mismo que de viajar de la ciudad *j* a la ciudad *i*, entonces para hallar una solución es necesario emplear un problema del Agente Viajero Asimétrico.

- **El problema de multiagentes.**

  El problema que considera *m* agentes viajeros se resuelve seleccionando un subconjunto de agentes y asignándoles a cada uno de ellos un solo viaje, de tal manera que cada ciudad es visitada por un sólo agente con el fin de recorrer todas las ciudades con el menor costo posible.

(Reinelt, 1994).

Estos problemas de optimización pueden ser útiles en el caso de considerar otras limitantes en nuestro proyecto. Por ejemplo, si deseamos que el robot recorra un conjunto de puntos partiendo de una configuración inicial a una configuración final, podríamos utilizar uno de los problemas mencionados anteriormente, para asignar una ciudad de partida y una ciudad de arribo en el problema del Agente Viajero.

3.4 Problema del Agente Viajero Multidimensional.

El problema de optimización de puntos en nuestro proyecto se plantea como una analogía del Problema del Agente Viajero.

Supongamos que tenemos un conjunto de puntos en el espacio. Podríamos pensar en que cada punto representa una ciudad que debe ser visitada. Una característica que distingue nuestro planteamiento es que para cada ciudad tenemos distintos caminos para llegar a la siguiente. El problema entonces es encontrar una trayectoria "óptima" no sólo considerando la distancia que hay de una ciudad a otra, sino también en seleccionar un camino corto de entre todas las posibilidades.

La relación que existe entre el conjunto de caminos y el conjunto de ciudades puede ser expresado de la forma siguiente (Figura 3.3):

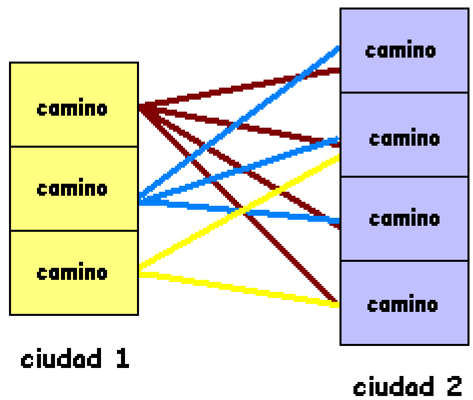


Figura 3.3 Problema del Agente Viajero Multidimensional para dos ciudades.

Este enfoque de caminos múltiples puede ser utilizado para resolver nuestro trabajo. Como vimos en el Capítulo 2, la Cinemática Inversa nos permite solucionar el problema de encontrar una configuración con la cual el manipulador es capaz de alcanzar un punto. Sin embargo, la Cinemática Inversa puede encontrar un conjunto soluciones distintas para cada punto, estos son los caminos de los que hablamos.

Los caminos obtenidos para cada punto representan la trayectoria de una configuración a otra para el manipulador. Es necesario pensar en no limitar el número de soluciones de la Cinemática Inversa pues estos caminos facilitan la movilidad del manipulador en su espacio de trabajo, además nos permiten encontrar una soluciones más eficientes para el orden de recorrido de los puntos y disminuyen la posibilidad de colisiones.

Es importante mencionar que el número de caminos no tiene que ser el mismo para cada punto, muchas veces los caminos pueden no existir para el conjunto de configuraciones del robot o pueden ser truncados por algún obstáculo.

3.5 Aplicaciones prácticas.

Existe un sinnúmero de aplicaciones prácticas del problema del Agente Viajero. No siempre son problemas puros de PAV pero pueden atacarse usando variantes de los métodos conocidos para encontrar una solución factible. Podemos mencionar algunas de estas aplicaciones como por ejemplo: la cristalización de los rayos X, la reparación de turbinas de gas, el orden de recolección en un almacén y el control de robots (Reinelt, 1994).

3.5.1 Control del robot.

Un punto central en el desarrollo de sistemas robóticos es el control del robot (ingeniería mediante la cual el mecanismo realiza tareas (Khatib, et al., 1992)).

Podemos decir que la habilidad de un robot para ejecutar una tarea está en función de su sistema de control. En breve, el control del robot tiene que ver con la ejecución y el monitoreo de las acciones físicas del autómata.

Según Khatib, et al. (1992), se pueden identificar tres problemas en el área del control del robot y son:

- El control dinámico.

- La coordinación de movimientos y la generación de trayectorias.

- La interacción con el mundo.

Nuevamente, estos problemas se complican en sistemas que involucran un número grande de grados de libertad es decir, en presencia de robots redundantes.

Nuestro proyecto tiene que ver con los problemas de coordinación de movimientos y la generación de trayectorias. Dentro de esta área de problemas, lo que se busca es producir un conjunto de trayectorias para los grados de libertad del robot para la realización de tareas. Las trayectorias son generadas usando mecanismos geométricos y descripciones cinemáticas (Khatib, et al. 1992).

Es importante recordar que el criterio de optimización de trayectorias que estamos siguiendo es la distancia Euclidiana entre las configuraciones de un punto a otro.