Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

Habiendo presentado los resultados de la investigación en el capítulo anterior, en este último capítulo evaluamos nuestra tesis y hacemos algunas propuestas de trabajo a futuro. Dentro de la evaluación hacemos algunas observaciones sobre los resultados en sí y también comentamos brevemente algunas consecuencias prácticas que pueden derivar de alcanzar el objetivo general. Las propuestas las presentamos a manera de problema abierto, como posibles formas de evitar los obstáculos encontrados en las demostraciones presentadas que impiden probar la validez de algunas de las relaciones de implicación que hemos estudiado.

6.1. Evaluación de resultados

Aunque no ha podido resolverse completamente el objetivo general[1], el conjunto de resultados obtenidos no es menos relevante para investigaciones subsecuentes.

6.1.1. Sobre las equivalencias originales de la teoría AGM

Evidentemente, nuestra tesis no establece una relación de equivalencia entre algún par de postulados suplementarios bajo las lógicas de interés. Conjeturamos que con la ayuda de alguna de las propuestas de la sección siguiente esto ha de lograrse en investigaciones subsecuentes.

[1] Que es: *«estudiar bajo qué condiciones las relaciones de implicación originales entre los postulados AGM suplementarios de contracción y revisión, que se demuestran asumiendo la* identidad de Levi*, son válidas en el contexto de la lógica intuicionista, paraconsistente trivaluada,* G_3 *y* G_3'*.»*

6.1.2. Sobre la tesis y la lógica G_3'

Ha de notarse inmediatamente que la tesis no hace referencia a la lógica G_3': en el curso de la investigación no se pudo comprobar resultado alguno que hiciera uso de ella. Es entonces un problema abierto el encontrar condiciones suficientes o postular condiciones suficientes que permitan enunciarla en algún resultado sobre las relaciones de implicación entre los postulados estudiados.

6.1.3. Sobre la no equivalencia de los postulados básicos bajo *Int* o G_3

A pesar de que el interés inmediato de la investigación es acerca de la relación entre los postulados suplementarios, la equivalencia de los básicos también es de interés general. De los teoremas presentados en la subsección 4.3.3.3 y el hecho de que $\vdash \neg\neg x \rightarrow x$ bajo *Pac* y G_3', pero no bajo *Int* o G_3, es claro ver que la equivalencia entre los dos conjuntos de postulados básicos AGM es válida bajo *Pac* y G_3'; ello no constituye una *condición de imposibilidad* para tal equivalencia en *Int* o G_3. Incluso en el caso de no poderse demostrar la equivalencia bajo tales lógicas, siguiendo el espíritu de que es razonable postular variantes de los postulados[2], conjeturamos que es posible proponer variantes ligeras de las identidades de Levi, de Harper y/o de los postulados de revisión que nos permitan asegurarla; en la subsección 6.2.2 se hace un intento de movernos hacia esta dirección. Más aún, como lo hemos notado en la subsección 4.3.3.4, el trabajo que resta por lograr el objetivo general es extenso.

6.1.4. Un patrón interesante

Curiosamente, se pudieron demostrar tantas relaciones de equivalencia como para formar un patrón: ambos postulados suplementarios de contracción implican a su contraparte de revisión cuando se asume como lógica subyacente a *Int* o G_3, mientras que el converso es válido cuando se asume *Pac*. Como hemos dicho antes, conjeturamos que esto se debe a que no es suficiente considerar los postulados de contracción, la identidad de Levi y los teoremas de las lógicas, sino que es necesario postular alguna otra condición adicional, p. ej. otro criterio de racionalidad sobre operadores de contracción especiales para estas lógicas.

[2]Como se comentó en la sección 5.4.

6.1.5. Sobre la asunción de ciertos postulados

En contraste con la observación anterior, si se es demasiado estricto se notará que el patrón no es perfecto: excepto una, todas las relaciones de implicación entre los postulados suplementarios (que pudieron demostrarse) hacen uso de los postulados AGM $(\dot{-}1)$, $(\dot{-}2)$, $(\dot{-}5)$ y $(\dot{-}6)$. En el caso de la implicación de $(\dot{-}8)$ a $(\dot{+}8)$, basta asumir $(\dot{-}1)$ y $(\dot{-}6)$ bajo Int o G_3. Así que, si bien existe un patrón en las relaciones de implicación viéndolas desde un alto nivel, al analizar los postulados de contracción involucrados es evidente que el patrón está, por así decirlo, «cojo». Queda entonces como problema abierto el descubrir si es posible asumir lo mismo que en la implicación $(\dot{-}8)$ a $(\dot{+}8)$ en el caso de la implicación que va de $(\dot{-}7)$ a $(\dot{+}7)$.

6.1.6. Aplicaciones prácticas

Aunque no se haya completado nuestro objetivo general, su consecución no solamente es de interés teórico sino también práctico.

Siguiendo la idea de las aplicaciones (presentadas en el capítulo 3) que tienen las lógicas, es posible, por ejemplo, pensar en la creación de un sistema experto o agente que tenga la capacidad de razonar a partir de información «en bruto» utilizando una lógica paraconsistente, con la posibilidad de refinar la información para librarla de sus «impurezas» en el momento que existan las condiciones para hacerlo.[3] Es claro que en la vida diaria las personas deben lidiar con información «en bruto» y ello no ocasiona (en general) problemas en su sistema de creencias; un sistema que considera solamente una forma de razonamiento clásica (o explosiva) no puede hacer esto. Por otro lado, también es claro que las personas son capaces de revisar las contradicciones en sus creencias al momento que alguna nueva información lo permite. Al construir un sistema capaz de comportarse de maneras no restringidas por la explosividad del razonamiento clásico se amplía el espectro de tipos de información sobre las cuales puede operar.

En el caso de las lógicas intermedias, el llevar la teoría de la revisión de creencias existente a ellas permitiría crear sistemas expertos o agentes capaces de razonar sobre cuerpos de información *dinámicos* siguiendo los principios del pensamiento *constructivo*. Esto puede tener aplicaciones en el campo de los sistemas automatizados de demostración de teoremas: sería posible no sólo realizar inferencias constructivas sino también cambiar corpus de creencias (i.e. teorías) muy grandes (i.e. con muchas reglas, axiomas, creencias o lo que sea que se esté modelando), de tal forma que introducir nuevas

[3] Por información «en bruto», nos referimos a información que puede no haber sido depurada de contradicciones internas o información es necesario creer aún si estuviera en contradicción con creencias anteriores; tales contradicciones son lo que hemos llamado «impurezas».

creencias al sistema sea una tarea realizada de manera automática por el sistema.

6.2. Trabajo futuro

Pese a no haber logrado el objetivo general, la experiencia de investigación ha arrojado ideas sobre algunos posibles caminos a seguir. A continuación hacemos algunas propuestas de solución para aquellos casos donde la validez de alguna relación de implicación no se ha podido demostrar.

6.2.1. Un posible postulado de contracción adicional

Al analizar las pruebas de los teoremas principales del capítulo anterior, eventualmente surge la pregunta de cómo se verían afectadas las pruebas si se asumiera alguna relación de contención entre contracciones de una misma cn-teoría respecto a fórmulas relacionadas de alguna manera. Es así como surgen dos candidatos a resolver este problema, de los cuales el primero fue investigado:

$$\text{Si } \{x\} \vdash y, \text{ entonces } A \dot{-} y \subseteq A \dot{-} x \tag{$\dot{-}6'$}$$

$$\text{Si } \{x\} \vdash y, \text{ entonces } A \dot{-} y \supseteq A \dot{-} x \tag{$\dot{-}6''$}$$

Usando ($\dot{-}6'$) y una lógica ligeramente diferente a Pos, *seria* posible deducir resultados similares al corolario 5.32 para Pac y G_3'. Y decimos *sería* puesto que ($\dot{-}6'$) resulta ser contradictorio con respecto a los postulados de contracción: una asunción fundamental de ($\dot{-}6'$) es que $x \notin A \dot{-} y$ siempre que $\{x\} \vdash y$ y $\nvdash x$, pero al mismo tiempo puede demostrarse, usando ($\dot{-}1$), ($\dot{-}2$) y ($\dot{-}5$), que si $\vdash y$, entonces $A \dot{-} y = A$.[4]

En el caso de ($\dot{-}6''$), conjeturamos que no tendrá problemas similares a los de ($\dot{-}6'$). Con la ayuda de ($\dot{-}6''$) sería posible salvar algunos (pero sólo algunos) obstáculos que impiden obtener resultados similares al corolario 5.29 para el caso de Int, G_3 y G_3': p. ej., el paso (5.82) de la demostración del teorema 5.28 sería válido, aunque el paso (5.97) no.

6.2.2. Variante de la identidad de Levi

Una idea que subyace en el operador de revisión, y que se encuentra codificada en los postulados de revisión del modelo AGM, es la de que siempre que (todos) los opuestos

[4]Otros posibles resultados similares no fueron analizados en vista de la falla de ($\dot{-}6'$).

contradictorios[5] (respecto a aquella fórmula que se desea agregar a una cn-teoría) no sean teoremas se debe mantener la consistencia[6] eliminando de la teoría todos[7] los opuestos contradictorios respecto a la proposición que se pretende agregar. En lógica clásica (y en Pac), gracias a que $\vdash x \leftrightarrow \neg\neg x$, bastan los postulados de revisión $(\dot{+}2)$ y $(\dot{+}5)$ para asegurar esto[8]: si algún opuesto contradictorio respecto a una fórmula x es teorema o no, el otro también lo será o no, y luego será necesario mantener la consistencia eliminándolos a ambos o será imposible hacerlo y resultará la cn-teoría inconsistente. Sin embargo, en lógicas donde $\vdash \neg\neg x \to x$ y $\nvdash x \to \neg\neg x$ (i.e. G_3') esto no es cierto, pues ambos postulados entran en contradicción con $(\dot{+}1)$:

Ejemplo 6.1. Asúmase que todos los símbolos están definidos para G_3'. Sabemos que en $G_3' \vdash \neg\neg x \to x$ y $\nvdash x \to \neg\neg x$. Si se asume que $\vdash x$ y que $\nvdash \neg\neg x$, entonces por $(\dot{+}2)$, $\neg x \in A\dot{+}\neg x$, mientras que por $(\dot{+}5)$, $A\dot{+}\neg x$ es consistente (i.e. $x \notin A\dot{+}\neg x$ y $\neg\neg x \notin A\dot{+}\neg x$); pero por $(\dot{+}1)$, $x \in A\dot{+}\neg x$. Los postulados están entonces en contradicción.

Observación 6.2. Un ejemplo similar no es posible para Int o G_3, pues en ellas $\nvdash \neg\neg x \to x$ y $\vdash x \to \neg\neg x$, con lo que para cualquier $\neg y$, si $\nvdash \neg\neg y$, entonces $\nvdash y$; es decir, cualquier intento por cumplir el antecedente de $(\dot{+}5)$ provoca que el otro opuesto contradictorio no sea un teorema.

Otra idea del operador de revisión es que, si los opuestos contradictorios no son elementos de la cn-teoría que se revisa, el resultado de la revisión será una simple expansión. Una vez más, en lógica clásica (y en Pac) esto es posible en virtud de que $\vdash x \leftrightarrow \neg\neg x$, pero usando los postulados $(\dot{+}3)$ y $(\dot{+}4)$; y una vez más, no es cierto en lógicas donde $\vdash \neg\neg x \to x$ y $\nvdash x \to \neg\neg x$ (i.e. G_3'), pues en este caso se encuentra en contradicción con el postulado $(\dot{+}5)$:

Ejemplo 6.3. Asúmase que todos los símbolos están definidos para G_3' y recuérdese que A se utiliza para representar cn-teorías. Sabemos que en $G_3' \vdash \neg\neg x \to x$ y $\nvdash x \to \neg\neg x$. Si se asume que $x \in A$ y que $\neg\neg x \notin A$, por $(\dot{+}3)$ y $(\dot{+}4)$, $A\dot{+}\neg x = Cn\left(A \cup \{\neg x\}\right)$, lo cual por

[5] Aquí les llamamos así a cualesquiera dos proposiciones que son suficientes para asegurar que una teoría es inconsistente (véase definición 3.21 en la página 47), como x y $\neg x$ o $\neg x$ y $\neg\neg x$; aunque en general podrían considerarse *opuestos contradictorios* cualesquiera dos proposiciones que impliquen cada uno a uno de los dos opuestos contradictorios a los que nos referimos, como serían $\neg(x \wedge y)$ y $\neg\neg x \vee \neg\neg y$ bajo lógica clásica. Nótese que en nuestro uso del término, el máximo número de opuestos contradictorios respecto a una fórmula x es 2.

[6] Siendo consistencia el fallo de las condiciones para inconsistencia (véase definición 3.21 en la página 47).

[7] En nuestro uso, el único restante.

[8] Nótese que $(\dot{+}5)$ no es suficiente para lograrlo, pues en el caso de que los opuestos contradictorios no fueran teoremas solamente se aseguraría la consistencia de la teoría resultante, no la eliminación de aquello en contradicción con lo que se desea agregar; en el segundo caso no se aseguraría la inconsistencia de la teoría resultante.

teoría de conjuntos y las propiedades de un operador de consecuencia abstracto implica que $x \in A \dot{+} \neg x$ y que $\neg x \in A \dot{+} \neg x$; pero por $(\dot{+}5)$, $A \dot{+} \neg x$ debería ser consistente. Se tiene entonces una contradicción entre los postulados.

Observación 6.4. Un ejemplo similar no es posible para Int o G_3 por razones análogas a las de la última observación.

Lo anterior ejemplifica lo inadecuado de los postulados de revisión bajo algunas lógicas no clásicas. Como ya se mencionó en el capítulo 4, en la teoría AGM, los postulados de contracción permiten deducir a los de revisión vía la identidad de Levi; el converso es posible asumiendo la identidad de Harper y algunas propiedades de lógica clásica[9]. Al poder entonces asumir que la operación de revisión es una consecuencia de una operación de contracción por medio de la identidad de Levi, es posible en principio modificarla [10] para obtener versiones adecuadas de los postulados de revisión.

Para lograr obtener tales versiones adecuadas de los postulados de revisión para cierta lógica no clásica, consideramos que se pueden tomar dos enfoques: (i) definir versiones racionales para los postulados de revisión y luego encontrar una identidad que conecte a los postulados de contracción con los de revisión; (ii) definir una variante de la identidad de Levi donde se modele un comportamiento racional del operador de revisión bajo la lógica no clásica en cuestión y luego ver que condiciones implica para el operador de revisión. Partiendo del segundo enfoque, una posible variante de Levi para la lógica G_3' es:

$$A \dot{+} x \overset{\text{def}}{=} Cn\left(A \div \neg x \cup \{x\}\right)$$

donde

$$A \div x \quad \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} A \div y & si\ x = \neg\neg y \\ A \dot{-} x & en\ otro\ caso \end{cases}$$

La idea es que para revisar respecto a una fórmula x, es necesario primero contraer de la cn-teoría todas aquellas fórmulas que serían equivalentes por medio de $\vdash x \leftrightarrow \neg\neg x$ a alguno de los dos opuestos contradictorios inmediatos a x y luego agregar la fórmula x, pues es fácil verificar que no es suficiente contraer de la cn-teoría solamente los dos posibles opuestos contradictorios inmediatos.

Investigaciones preliminares parecen indicar que el uso de esta variante de Levi permite asegurar la implicación que va de $(\dot{+}8)$ a $(\dot{-}8)$ en el caso de G_3'; y decimos que

[9] En esta investigación exploratoria, sin embargo, no hemos requerido que parte alguna de ambos conjuntos sea equivalente.

[10] Siguiendo el espíritu de [52], comentado en la sección 5.4.

parecen indicar porque es necesario estudiar primero cuáles son las condiciones sobre el operador de revisión que impone nuestra variante de Levi. Esto queda entonces como un problema abierto a ser estudiado en investigaciones subsecuentes.