Capítulo 5

Tesis sobre las relaciones de implicación entre los postulados suplementarios de AGM bajo Int, Pac, G_3 y G_3'

Este capítulo corresponde a los resultados de la investigación realizada. Primero presentamos nuestra tesis y luego, en dos partes, el razonamiento que nos permitió concluirla. Como se dijo en el diseño de la investigación en el capítulo introductorio, hemos basado nuestro trabajo en demostraciones existentes de las relaciones de implicación en lógica clásica; es en la sección 5.2 que presentamos las hipótesis que fueron aisladas de las demostraciones originales y en la sección 5.3 las usamos para hacer la demostración de los teoremas principales que soportan directamente nuestra tesis.

No debemos olvidar aclarar el uso de cierta notación. Al inicio de la subsección 4.3.3, haciendo énfasis en la existencia de diferentes versiones de los postulados AGM, resaltamos el uso de dos notaciones que son equivalentes bajo lógica clásica: $\vdash x \leftrightarrow y$ y $Cn(\{x\}) = Cn(\{y\})$. Ahí mismo manifestamos nuestra preferencia por $Cn(\{x\}) = Cn(\{y\})$ para su uso en el capítulo anterior por no ser ambas equivalentes en toda lógica y porque al usar $\vdash x \leftrightarrow y$ se quiere decir $Cn(\{x\}) = Cn(\{y\})$; sin embargo, en este capitulo preferimos $\vdash x \leftrightarrow y$ por ser una forma corta para implicar que $Cn(\{x\}) = Cn(\{y\})$ en las lógicas que se usarán en las demostraciones de la sección 5.3. Nótese que la implicación «si $\vdash x \leftrightarrow y$, entonces $Cn(\{x\}) = Cn(\{y\})$» es válida bajo toda lógica más fuerte o igual que $LG.BIC$ (definición 5.6), mientras que la equivalencia lo es en toda lógica más fuerte o igual que $LG.T'$ (definición 5.8).

5.1. Tesis

En vista de los teoremas 5.28, 5.31, 5.34, 5.37 y sus correspondientes corolarios, nuestra tesis se enuncia como:

Tesis. Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM ($\dot{-}$1) y ($\dot{-}$6), y la identidad de Levi. Entonces:

- Bajo la lógica Pac, si dicho operador de contracción satisface además los postulados AGM ($\dot{-}$2) y ($\dot{-}$5):
  - Satisface ($\dot{-}$7) si satisface ($\dot{+}$7).
  - Satisface ($\dot{-}$8) si satisface ($\dot{+}$8).
- Bajo las lógicas Int y G_3:
  - Si dicho operador de contracción satisface además los postulados AGM ($\dot{-}$2) y ($\dot{-}$5), entonces satisface ($\dot{+}$7) si satisface ($\dot{-}$7).
  - Dicho operador de contracción satisface ($\dot{+}$8) si satisface ($\dot{-}$8).

La figura 5.1 resume las relaciones de implicación de la tesis. Una flecha entre dos postulados suplementarios representa la implicación del postulado que es señalado al asumir el postulado del que parte la flecha. Sobre cada flecha se indican las demás asunciones que son suficientes para que la implicación denotada por la flecha sea válida.

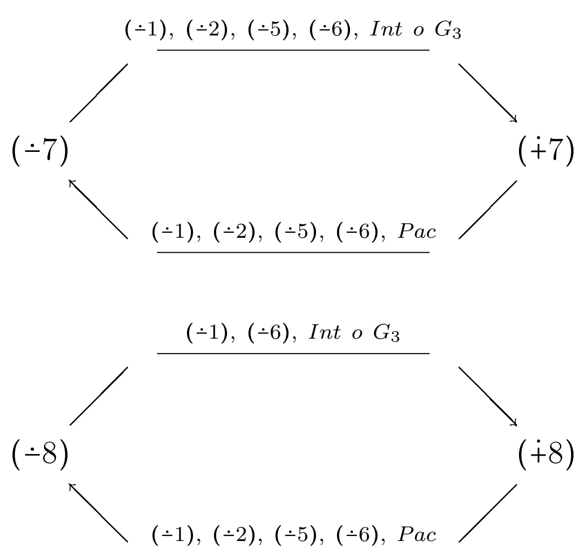

Figura 5.1: Relaciones de implicación de la tesis.

5.2. Hipótesis utilizadas

Recordemos del diseño de la investigación que, cuando se habla de *aislar las hipótesis*, nos referimos al hecho de analizar minuciosamente cada una de las proposiciones que sustentan las pruebas de los teoremas centrales de este trabajo que forman la tesis, y reducirlas a condiciones sobre las lógicas o los operadores AGM. En esta sección exponemos tales hipótesis detalladamente.

5.2.1. Una propiedad del operador de contracción bajo lógicas abstractas

Nuestra primera hipótesis *aislada* es una que tiene que ver con el operador de contracción del modelo AGM:

Lema 5.1. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface el postulado AGM $(\dot{-}5)$ y que está definido bajo una lógica con una relación de consecuencia abstracta. Entonces se cumple que: Si $\{y\} \vdash x$, entonces $A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup \{y\}\right)$.*

Demostración. Se demuestra asumiendo (2.9), (2.10), (2.12) y $(\dot{-}5)$; véase demostración completa en el apéndice C.

□

5.2.2. Algunas lógicas y sus propiedades

En esta subsección *aislamos las hipótesis* construyendo axioma por axioma algunas lógicas para obtener ciertos teoremas y meta-teoremas. Esto luego permite visualizar fácilmente todas las hipótesis que intervienen en la demostración de los teoremas de la sección 5.3.

Debe notarse que todas aquellas lógicas enunciadas en esta subsección, que no se usan en los teoremas principales 5.28, 5.31, 5.34 y 5.37 de la sección 5.3 (es decir, todas excepto $LT1$, $LT3$, $LT4$ e Int), han sido creadas para enfatizar el origen de ciertos meta-teoremas con que cuentan las lógicas que sí se utilizan en las demostraciones de tales teoremas (es decir, $LT1$, $LT3$, $LT4$ e Int); de esta forma también evitamos repetir proposiciones de manera innecesaria antes de cada demostración en la sección 5.3. Por otro lado, para las lógicas que se mencionan en los teoremas principales de esa misma sección, hemos reservado la demostración de ciertos teoremas de su lenguaje objeto que permiten probar los teoremas principales. Si bien existen también demostraciones de teoremas del lenguaje objeto en las lógicas que no se mencionan en tales teoremas principales, no han sido la razón primaria de enunciar dichas lógicas; el propósito de ellas es tener un c*onjunto mínimo de axiomas que impliquen sus meta-teoremas*[1], mientras que en $LT1$, $LT3$, $LT4$ e Int se pone énfasis en tener *conjuntos mínimos de axiomas que soporten los teoremas principales*[2] a los que se dirigen.

5.2.2.1. Lógica con teorema de deducción

Definición 5.2. $LG.TD$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.TD}$ con los siguientes elementos:

$$\alpha \to (\beta \to \alpha) \tag{5.1}$$

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) \tag{5.2}$$

Proposición 5.3. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LG.TD$:*

$$T \cup \{x\} \vdash y \, sii \, T \vdash x \to y \tag{5.3}$$

$$Si\ \neg y \notin A{+}x,\ entonces\ x \to \neg y \notin A \dot{-} \neg x \tag{5.4}$$

$$\vdash x \to x \tag{5.5}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.3) o *Teorema de Deducción*: Cualquier lógica que posea los axiomas de $LG.TD$ satisface el teorema de deducción [9].
- (5.4): Consecuencia de Levi, notación 2.48, teorema de deducción, ($\dot{-}$1) y (2.5); demostración en apéndice.
- (5.5): Fácilmente demostrable a partir de los axiomas de $LG.TD$ [17].

□

5.2.2.2. Lógica con introducción de disyunciones en las premisas

Definición 5.4. $LG.IDP$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.IDP}$ con todos los elementos de $\Omega_{LG.TD}$ y el axioma:

$$(\alpha \to \gamma) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)) \tag{5.6}$$

[1] En realidad no aseguramos la minimalidad de los conjuntos de manera formal, más bien nos referimos a *mínimo* en el sentido de que ningún axioma es superfluo para las pruebas presentadas.

[2] Aquí usamos *mínimos* de igual manera que para los otros conjuntos de axiomas.

Proposición 5.5. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LG.IDP$:*

$$Si\, T \cup \{x\} \vdash a\, y\, T \cup \{y\} \vdash a,\, entonces\, T \cup \{x \vee y\} \vdash a \tag{5.7}$$

$$Si\, T \cup \{x\} \vdash a,\, T \cup \{y\} \vdash a\, y\ \{x \vee y\} \in T,\, entonces\, T \vdash a \tag{5.8}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.7) o *Teorema de Introducción de Disyunción en las Premisas*: Consecuencia de (5.3), (5.6), convención 2.78, (2.2) y (2.3); demostración en apéndice.
- (5.8): Consecuencia de (5.7) y teoría de conjuntos; demostración en apéndice.

□

5.2.2.3. Lógica donde el bicondicional implica igualdad de cerradura lógica

Definición 5.6. $LG.BIC$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.BIC}$ con todos los elementos de $\Omega_{LG.TD}$ y los axiomas:

$$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \tag{5.9}$$

$$\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \tag{5.10}$$

Proposición 5.7. *Las siguiente proposición es válida bajo $LG.BIC$:*

$$Si\ \vdash x \leftrightarrow y,\ entonces\, Cn\left(\{y\}\right) = Cn\left(\{x\}\right) \tag{5.11}$$

Demostración. Es una consecuencia directa de (5.9), (5.10) y lema 2.83.

□

5.2.2.4. Lógica donde la cerradura de una teoría finita T' es igual a la cerradura de la conjunción de los elementos de T'

Definición 5.8. $LG.T'$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.T'}$ con todos los elementos de $\Omega_{LG.BIC}$ y el axioma:

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \tag{5.12}$$

Proposición 5.9. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LG.T'$:*

$$Cn\left(T'\right) = Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in T'} x\right\}\right) \tag{5.13}$$

$$Cn\left(Cn\left(T\cup\{x\}\right)\cup\{y\}\right)=Cn\left(T\cup\{x\wedge y\}\right) \tag{5.14}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.13): Consecuencia de notación 2.36, (2.1), notación 2.48, (2.7), (5.9), (5.10), y (5.12); demostración en apéndice.
- (5.14): Consecuencia de (2.10), (5.13) y teoría de conjuntos; demostración en apéndice.

□

5.2.2.5. Lógica Pos

Observación 5.10. El conjunto de axiomas de Pos (definición 3.16 en la página 42) contiene todos los elementos de $\Omega_{LG.IDP}\cup\Omega_{LG.T'}$ más dos axiomas:

$$\alpha\to\alpha\vee\beta \tag{5.15}$$

$$\beta\to\alpha\vee\beta \tag{5.16}$$

Proposición 5.11. *La siguiente proposición es válida bajo Pos:*

$$Cn\left(R\cup T\right)\cap Cn\left(S\cup T\right)\subseteq Cn\left(\left(Cn\left(R\right)\cap Cn\left(S\right)\right)\cup T\right) \tag{5.17}$$

Demostración. Es una consecuencia de (2.2), (2.3), notación 2.48, (2.7), (2.10), definición 2.58, (5.7), (5.13), (5.15), (5.16) y teoría de conjuntos; véase demostración en apéndice C.

□

5.2.2.6. Lógica donde $Cn\left(A\cup\{x\wedge y\}\right)\subseteq Cn\left(\left(A\dot{-}\left(\neg x\vee y\right)\right)\cup\{x\wedge y\}\right)$

Definición 5.12. *$LG.DM$* es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.DM}$ cuyos elementos son:

$$\alpha\wedge\beta\to\beta \tag{5.18}$$

$$\beta\to\alpha\vee\beta \tag{5.19}$$

Proposición 5.13. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LG.DM$:*

$$\{x\wedge y\}\vdash\neg x\vee y \tag{5.20}$$

$$Cn\left(A\cup\{x\wedge y\}\right)\subseteq Cn\left(\left(A\dot{-}\left(\neg x\vee y\right)\right)\cup\{x\wedge y\}\right) \tag{5.21}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.20): Consecuencia de (5.18) y (5.19); demostración en apéndice.
- (5.21): Consecuencia de (2.4), (2.7), lema 5.1, (5.20) y teoría de conjuntos; demostración en apéndice.

□

5.2.2.7. Lógica donde $Si\, T \nvdash x,\ entonces\, T \cup \{\neg x \vee \neg y\} \nvdash x$

Definición 5.14. $LG.TNX$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.TNX}$ con todos los elementos de $\Omega_{LG.IDP}$ y los axiomas:

$$\alpha \to \alpha \vee \beta \tag{5.22}$$

$$\alpha \vee \neg \alpha \tag{5.23}$$

Proposición 5.15. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LG.TNX$:*

$$\vdash ((\neg x \vee \neg y) \to x) \to x \tag{5.24}$$

$$Si\, T \nvdash x\, y \vdash y \to x,\ entonces\, T \nvdash y \tag{5.25}$$

$$Si\, T \nvdash x,\ entonces\, T \cup \{\neg x \vee \neg y\} \nvdash x \tag{5.26}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.24): Consecuencia de todos los axiomas de $LG.TNX$; demostración en apéndice.
- (5.25): Consecuencia de monotonía (2.2) y *modus ponens*; demostración en apéndice.
- (5.26): Consecuencia de las dos anteriores; demostración en apéndice.

□

5.2.2.8. Lógica donde $A \dot{+} (\neg (x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn (A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg x\})$

Definición 5.16. $LG.RCC$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.RCC}$ con todos los elementos de $\Omega_{LG.IDP} \cup \Omega_{LG.T'}$ y los axiomas:

$$\alpha \to \neg\neg \alpha \tag{5.27}$$

$$\neg\neg\alpha \to \alpha \tag{5.28}$$

$$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta) \tag{5.29}$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \to (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{5.30}$$

Proposición 5.17. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LG.RCC$:*

$$\vdash \neg(\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) \to \neg\neg x \tag{5.31}$$

$$\vdash \neg\neg x \to \neg(\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) \tag{5.32}$$

$$\vdash \neg(\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) \leftrightarrow \neg\neg x \tag{5.33}$$

$$\vdash \neg(x \wedge y) \wedge \neg x \to \neg x \tag{5.34}$$

$$\neg x \to \vdash \neg(x \wedge y) \wedge \neg x \tag{5.35}$$

$$\vdash \neg(x \wedge y) \wedge \neg x \leftrightarrow \neg x \tag{5.36}$$

$$A \dot{+} (\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg x\}) \tag{5.37}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.31): Consecuencia de axiomas de $LG.RCC$; demostración en apéndice.
- (5.32): Demostración análoga a la de (5.48) (pasos 3 al 7) usando sólo axiomas de $LG.RCC$.
- (5.33): Consecuencia directa de las dos anteriores y los axiomas de $LG.RCC$.
- (5.34): Consecuencia directa de los axiomas de $LG.RCC$.
- (5.35): Fácilmente demostrable a partir de teorema de deducción, (5.15), (5.29) y (5.12).
- (5.36): Consecuencia directa de las dos anteriores y los axiomas de $LG.RCC$.
- (5.37): Consecuencia de Levi, (5.33), (5.11), ($\dot{-}$6), (2.10) y (5.36); demostración en apéndice.

□

5.2.2.9. Lógica donde la cerradura de la unión de opuestos contradictorios se simplifica

Definición 5.18. $LG.UCS$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas $\Omega_{LG.UCS}$ con todos los elementos de $\Omega_{LG.IDP} \cup \Omega_{LG.T'}$ y los axiomas:

$$\alpha \vee \neg\alpha \tag{5.38}$$

Proposición 5.19. *La siguiente proposición es válida bajo $LG.UCS$:*

$$Si\ T \subseteq Cn\left(S \cup \{x\}\right)\ y\ T \subseteq Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right),\ entonces\ T \subseteq Cn\left(S\right) \tag{5.39}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C.

□

5.2.2.10. Lógica para el teorema 5.28

La lógica asumida en el teorema 5.28, presentado en la sección 5.3.1 y que es uno de los resultados del proyecto, es:

Definición 5.20. $LT1$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas Ω_{LT1} con todos los elementos de $\Omega_{LG.IDP} \cup \Omega_{LG.T'}$ y los axiomas:

$$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha \tag{5.40}$$

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \tag{5.41}$$

$$\beta \rightarrow \alpha \vee \beta \tag{5.42}$$

$$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \wedge \beta) \tag{5.43}$$

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\neg\alpha \vee \neg\beta) \tag{5.44}$$

$$(\neg\alpha \wedge \neg\beta) \rightarrow \neg(\alpha \vee \beta) \tag{5.45}$$

$$\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta) \tag{5.46}$$

$$\alpha \vee \neg\alpha \tag{5.47}$$

Proposición 5.21. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LT1$:*

$$\vdash x \rightarrow \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \tag{5.48}$$

$$\vdash \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \rightarrow x \tag{5.49}$$

$$\vdash x \leftrightarrow \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \tag{5.50}$$

$$\vdash y \leftrightarrow \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg y\right) \tag{5.51}$$

$$\vdash \neg(\neg x \vee \neg y) \rightarrow (x \wedge y) \tag{5.52}$$

$$\vdash (x \wedge y) \rightarrow \neg(\neg x \vee \neg y) \tag{5.53}$$

$$\vdash \neg(\neg x \vee \neg y) \leftrightarrow (x \wedge y) \tag{5.54}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.48), (5.49), (5.52) y (5.53): Consecuencia de los axiomas de $LT1$ y el teorema de deducción (5.3); la demostración de cada uno se encuentra en el apéndice.
- (5.50): Consecuencia directa de (5.48), (5.49) y los axiomas de $LT1$.
- (5.51): La demostración es análoga a la de (5.50) y se omite.
- (5.54): Consecuencia directa de (5.52) y (5.53) y los axiomas de $LT1$.

□

5.2.2.11. Lógica para el teorema 5.31

En el caso del teorema 5.31 de la sección 5.3.2, basta asumir a la lógica intuicionista (Int).

Observación 5.22. Teniendo el conjunto de axiomas de Int todos los axiomas de Pos más los siguientes dos[3]:

$$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta) \tag{5.55}$$

$$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha) \tag{5.56}$$

Y por el corolario 2.77 $Pos \leq_{\mathcal{T}} Int$, entonces todas los teoremas y meta-teoremas de Pos lo son de Int.

Proposición 5.23. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo Int:*

$$\vdash \neg x \to \neg (x \wedge y) \tag{5.57}$$

$$\vdash \neg y \to \neg (x \wedge y) \tag{5.58}$$

$$\vdash (\neg x \vee \neg y) \to \neg (x \wedge y) \tag{5.59}$$

$$\vdash \neg x \to \neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y) \tag{5.60}$$

$$\vdash \neg (x \wedge y) \to (x \to \neg y) \tag{5.61}$$

$$\vdash \neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y) \to \neg x \tag{5.62}$$

$$\vdash \neg x \leftrightarrow \neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y) \tag{5.63}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

[3] Véase definición 3.18 en la página 44.

- (5.57) y (5.58): Consecuencia de los axiomas de Int y el teorema de deducción (5.3); la demostración del primero se encuentra en el apéndice, la demostración del segundo es análoga.
- (5.59): Consecuencia directa de los dos anteriores y los axiomas de Int.
- (5.60): Consecuencia del anterior, los axiomas de Int y el teorema de deducción (5.3); demostración en el apéndice.
- (5.61): Consecuencia de los axiomas de Int; demostración en el apéndice.
- (5.62): Consecuencia del anterior, los axiomas de Int y el teorema de deducción (5.3); demostración en el apéndice.
- (5.63): Consecuencia directa de (5.60), (5.62) y los axiomas de Int.

□

5.2.2.12. Lógica para el teorema 5.34

Para presentar el teorema 5.34, se tiene la lógica $LT3$, definida como:

Definición 5.24. $LT3$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas Ω_{LT3} con todos los elementos de $\Omega_{LG.TNX} \cup \Omega_{LG.RCC}$.

Proposición 5.25. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LT3$:*

$$\vdash (x \wedge y) \leftrightarrow \neg\neg (x \wedge y) \tag{5.64}$$

$$\vdash \neg\neg x \rightarrow x \tag{5.65}$$

$$\vdash \neg x \vee \neg y \leftrightarrow \neg (x \wedge y) \tag{5.66}$$

$$\vdash \neg\neg x \leftrightarrow x \tag{5.67}$$

Demostración. Todas son consecuencias directas de los axiomas de $LT3$.

□

5.2.2.13. Lógica para el teorema 5.37

La lógica asumida en el teorema 5.37, presentado en la sección 5.3.4, tiene todos los axiomas de Int excepto uno:

Definición 5.26. $LT4$ es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas Ω_{LT4} con todos los elementos de $\Omega_{LG.IDP} \cup \Omega_{LG.T'}$ y los axiomas:

$$\alpha \to \alpha \vee \beta \tag{5.68}$$

$$\neg\alpha \to (\alpha \to \beta) \tag{5.69}$$

$$(\alpha \to \beta) \to ((\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha) \tag{5.70}$$

Proposición 5.27. *Las siguientes proposiciones son válidas bajo $LT4$:*

$$\vdash (\neg x \vee \neg y) \to (x \to \neg y) \tag{5.71}$$

$$\vdash \neg x \to (x \to \neg y) \wedge \neg x \tag{5.72}$$

$$\vdash (x \to \neg y) \wedge \neg x \to \neg x \tag{5.73}$$

$$\vdash \neg x \leftrightarrow (x \to \neg y) \wedge \neg x \tag{5.74}$$

$$\vdash (x \to \neg y) \to \neg (x \wedge y) \tag{5.75}$$

$$\vdash \neg (x \wedge y) \to (x \to \neg y) \tag{5.76}$$

$$\vdash (x \to \neg y) \leftrightarrow \neg (x \wedge y) \tag{5.77}$$

Demostración. Véase demostración en el apéndice C en los casos que se indique:

- (5.71): Consecuencia de los axiomas de $LT4$; demostración en apéndice.
- (5.72): Consecuencia de los axiomas de $LT4$, (5.71) y el teorema de deducción; demostración en apéndice.
- (5.73): Consecuencia directa de los axiomas de $LT4$.
- (5.74): Consecuencia directa de (5.72), (5.73) y los axiomas de $LT4$.
- (5.75): Consecuencia de los axiomas de $LT4$ y el teorema de deducción; demostración en apéndice.
- (5.76): Fue demostrado para (5.61) bajo Int usando sólo axiomas de $LT4$; véase demostración de (5.61) en apéndice.
- (5.77): Consecuencia directa de (5.75) y (5.76).

□

5.2.2.14. Comparación entre las lógicas

En vista de los conjuntos de axiomas de las lógicas construidas, éstas se pueden comparar de acuerdo a la definición 2.66 siguiendo el corolario 2.77[4]. La figura 5.2 muestra las relaciones entre las lógicas de esta sección y las que son de nuestro interés particular en la investigación; su lectura es exactamente de la misma forma que la de la figura 3.1 de la sección 3.5.

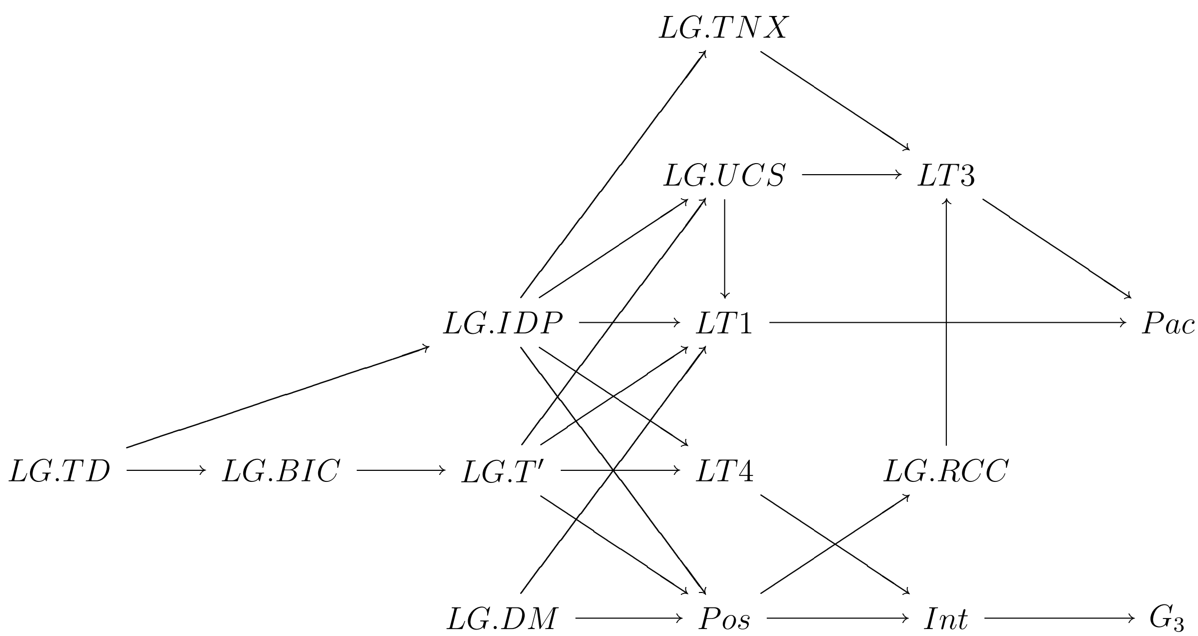

Figura 5.2: Contención de los conjuntos de teoremas de las lógicas genéricas.

5.3. Demostración de la tesis

Aquí enunciamos la tesis dividida en cuatro teoremas principales y sus corolarios, demostrando cada teorema en su momento. Para realizar las pruebas de esta sección nos hemos basado en las demostraciones encontradas en el trabajo seminal [19]; ellas nos han servido de guía, adaptándolas a las lógicas que nos conciernen[5], para encontrar los resultados que presentamos en esta sección.

Conviene hacer una aclaración acerca de lo que nos interesa en esta sección sobre

[4]Sabiendo además que los axiomas utilizados no son redundantes (i.e. no se puede obtener un axioma de una axiomática a partir de algunos otros), por lo que se puede asegurar que no existen ciertas contenciones entre conjuntos de teoremas (como entre $LG.IDP$ y $LG.BIC$).

[5]Lógicas $\mathcal{L}$ tales que $\mathcal{L} \leq_{\mathcal{T}} \mathcal{L}'$ donde $\mathcal{L}' \in \left\{Int, G_3, Pac, G_3'\right\}$.

los teoremas del lenguaje objeto que ya fueron demostrados para las lógicas $LT1$, $LT3$, $LT4$ e Int. Mientras en las lógicas presentadas en la sección anterior nos interesaba encontrar conjuntos *mínimos*[6] de axiomas que permitan tener ciertos meta-teoremas o teoremas del lenguaje objeto, aquí nos interesa descubrir cuales de dichos teoremas del lenguaje objeto no lo son en Int, G_3, Pac y G_3'. Para asegurar la calidad de teorema o no de una fórmula en tales lógicas, hemos utilizado la metodología de tablas de verdad basados en cada matriz lógica[7], o LWB[8] en el caso de Int. Cuando una fórmula no es teorema de alguna lógica, no es posible utilizarla en demostraciones cuyo razonamiento necesita que sea teorema; decimos que alguna prueba falla para Int, G_3, Pac o G_3' cuando algún teorema del lenguaje objeto bajo $LT1$, $LT3$, $LT4$ o Int, utilizado en la prueba, no lo es para la lógica (Int, G_3, Pac o G_3') en cuestión. En todos los casos se omiten las contrademostraciones por ser fáciles de reproducir.

5.3.1. Relación de implicación de ($\dot{+}$7) a ($\dot{-}$7)

Nuestro primer resultado es el siguiente:

Teorema 5.28. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM ($\dot{-}$1), ($\dot{-}$2), ($\dot{-}$5) y ($\dot{-}$6), la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica $LT1$. Dicho operador de contracción satisface ($\dot{-}$7) si satisface ($\dot{+}$7).*

Demostración. Asúmase ($\dot{+}$7). Se pretende demostrar que ($\dot{-}$7) es el caso. Sea

$$a \in ((A \dot{-} x) \cap (A \dot{-} y)) \ . \tag{5.78}$$

Por lo anterior y teoría de conjuntos, para probar ($\dot{-}$7) es suficiente demostrar

$$a \in A \dot{-} (x \wedge y) \ . \tag{5.79}$$

También por (5.78) y teoría de conjuntos, ambas proposiciones siguientes son el caso

$$a \in A \dot{-} x \ . \tag{5.80}$$

$$a \in A \dot{-} y \ . \tag{5.81}$$

Con la ayuda de ($\dot{-}$6), (5.11) y (5.50), (5.80) se convierte en

$$a \in A \dot{-} \neg((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x) \ . \tag{5.82}$$

[6]En el sentido indicado en la subsección 5.2.2.
[7]Véase apéndice A.
[8]Véase apéndice B.

Usando solamente teoría de conjuntos, se tiene que

$$A \dot{-} \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \subseteq A \dot{-} \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \cup \{((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x)\} \ . \tag{5.83}$$

Por el anterior, (2.4) y teoría de conjuntos

$$A \dot{-} \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \subseteq Cn\left(A \dot{-} \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \cup \{((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x)\}\right) \ . \tag{5.84}$$

Usando Levi, puede sustituirse el LMD del anterior

$$A \dot{-} \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \subseteq A \dot{+} \left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \ . \tag{5.85}$$

Por el anterior, $(\dot{+}7)$ y teoría de conjuntos

$$A \dot{-} \neg\left((\neg x \vee \neg y) \wedge \neg x\right) \subseteq Cn\left((A \dot{+} (\neg x \vee \neg y)) \cup \{\neg x\}\right) \ . \tag{5.86}$$

Entonces, por (5.82), (5.86) y teoría de conjuntos, se puede deducir que

$$a \in Cn\left((A \dot{+} (\neg x \vee \neg y)) \cup \{\neg x\}\right) \ . \tag{5.87}$$

Basados en (5.81), (5.51) y un razonamiento similar al desarrollado de (5.82) a (5.87),

$$a \in Cn\left((A \dot{+} (\neg x \vee \neg y)) \cup \{\neg y\}\right) \ . \tag{5.88}$$

Por lema 2.56, se pueden reescribir (5.87) y (5.88) como

$$(A \dot{+} (\neg x \vee \neg y)) \cup \{\neg x\} \vdash a \tag{5.89}$$

$$(A \dot{+} (\neg x \vee \neg y)) \cup \{\neg y\} \vdash a \tag{5.90}$$

Claramente, por teoría de conjuntos

$$(\neg x \vee \neg y) \in A \dot{-} \neg(\neg x \vee \neg y) \cup \{(\neg x \vee \neg y)\} \ . \tag{5.91}$$

Por el anterior, (2.4) y teoría de conjuntos

$$(\neg x \vee \neg y) \in Cn\left(A \dot{-} \neg(\neg x \vee \neg y) \cup \{(\neg x \vee \neg y)\}\right) \ . \tag{5.92}$$

Usando Levi, puede sustituirse el LMD del paso anterior

$$(\neg x \vee \neg y) \in A \dot{+} (\neg x \vee \neg y) \ . \tag{5.93}$$

Dados (5.89), (5.90), el paso anterior y (5.8),

$$A \dot{+} (\neg x \vee \neg y) \vdash a \ . \tag{5.94}$$

Por notación 2.48, lo anterior puede escribirse como

$$a \in Cn\left(A \dotplus (\neg x \vee \neg y)\right) \ . \tag{5.95}$$

Por Levi y (2.5), el LMD del paso anterior puede sustituirse, resultando

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} \neg(\neg x \vee \neg y)\right) \cup \{\neg x \vee \neg y\}\right) \ . \tag{5.96}$$

Dado (5.54), (5.11) y ($\dot{-}$6), puede sustituirse el LMD del paso anterior

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} (x \wedge y)\right) \cup \{\neg x \vee \neg y\}\right) \ . \tag{5.97}$$

Por (2.10), puede sustituirse el LMD de lo anterior

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} (x \wedge y)\right) \cup Cn\left(\{\neg x \vee \neg y\}\right)\right) \ . \tag{5.98}$$

Por (5.43), (5.44) y lema 2.83, puede sustituirse el LMD de lo anterior

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} (x \wedge y)\right) \cup Cn\left(\{\neg(x \wedge y)\}\right)\right) \ . \tag{5.99}$$

Por (2.10), puede sustituirse el LMD de lo anterior

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} (x \wedge y)\right) \cup \{\neg(x \wedge y)\}\right) \ . \tag{5.100}$$

Por (5.80), ($\dot{-}$2) y teoría de conjuntos

$$a \in A \ . \tag{5.101}$$

El postulado ($\dot{-}$5) permite deducir que

$$A \subseteq Cn\left(\left(A \dot{-} (x \wedge y)\right) \cup \{(x \wedge y)\}\right) \ . \tag{5.102}$$

Por los dos pasos anteriores y teoría de conjuntos,

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} (x \wedge y)\right) \cup \{(x \wedge y)\}\right) \ . \tag{5.103}$$

Por notación 2.48, se puede reescribir (5.100) y (5.103) como

$$A \dot{-} (x \wedge y) \cup \{\neg(x \wedge y)\} \vdash a \ . \tag{5.104}$$

$$A \dot{-} (x \wedge y) \cup \{(x \wedge y)\} \vdash a \ . \tag{5.105}$$

Por (5.47) y convención 2.78, se sabe que $\vdash (x \wedge y) \vee \neg(x \wedge y)$, y junto con ($\dot{-}$1) se deduce que

$$(x \wedge y) \vee \neg(x \wedge y) \in A \dot{-} (x \wedge y) \ . \tag{5.106}$$

Dados (5.104), (5.105), (5.106) y (5.8), se deduce que

$$A \dot{-} (x \wedge y) \vdash a \ . \tag{5.107}$$

Por notación 2.48, lo anterior puede reescribirse como

$$a \in Cn\left(A \dot{-} (x \wedge y)\right) \ . \tag{5.108}$$

Finalmente, por ($\dot{-}$1), (2.5) y el paso anterior, se demuestra que

$$a \in A \dot{-} (x \wedge y) \ . \tag{5.109}$$

□

En vista del teorema 5.28, la definición de Pac y el corolario 2.77 se tiene como consecuencia directa el siguiente corolario:

Corolario 5.29. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM* ($\dot{-}$1), ($\dot{-}$2), ($\dot{-}$5) *y* ($\dot{-}$6)*, la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica Pac. Dicho operador de contracción satisface* ($\dot{-}$7) *si satisface* ($\dot{+}$7)*.*

Observación 5.30. Un resultado similar no pudo ser encontrado para las otras lógicas estudiadas debido a los pasos tomados en la prueba del teorema 5.28. Específicamente (5.50), (5.51) y (5.54) no son teoremas de Int, G_3 o G_3': solamente la implicación → de (5.50), (5.51), y la implicación ← de (5.54) son válidas para Int y G_3; en cierto sentido de manera *simétrica*, solamente la dirección ← de la implicación de (5.50), (5.51), y la dirección → de (5.54) son válidos para G_3'. Además, es bien sabido que (5.47) no es un teorema de Int o G_3 (véase [9]), el cual es requerido por la prueba del teorema 5.28. En vista de esta situación, la validez de un resultado similar al corolario 5.29 bajo Int, G_3 o G_3' permanece como un problema abierto.

5.3.2. Relación de implicación de ($\dot{-}$7) a ($\dot{+}$7)

En el caso de esta implicación, se tiene que:

Teorema 5.31. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM* ($\dot{-}$1), ($\dot{-}$2), ($\dot{-}$5) *y* ($\dot{-}$6)*, la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica Int. Dicho operador de contracción satisface* ($\dot{+}$7) *si satisface* ($\dot{-}$7)*.*

Demostración. Asúmase ($\dot{-}7$). Se pretende demostrar que ($\dot{+}7$) es el caso. Sea

$$a \in A \dot{+} (x \wedge y) \ . \tag{5.110}$$

Por lo anterior y teoría de conjuntos, para demostrar ($\dot{+}7$) es suficiente demostrar que

$$a \in Cn\left((A \dot{+} x) \cup \{y\}\right) \ . \tag{5.111}$$

Basados en Levi, puede sustituirse el LMD del paso anterior

$$a \in Cn\left(Cn\left(A \dot{-} \neg x \cup \{x\}\right) \cup \{y\}\right) \tag{5.112}$$

y entonces para demostrar (5.111) es suficiente demostrar (5.112). Por (5.14), puede sustituirse el LMD del paso anterior

$$a \in Cn\left((A \dot{-} \neg x) \cup \{x \wedge y\}\right) \tag{5.113}$$

con lo que para demostrar (5.112) es suficiente demostrar (5.113). Luego, por (5.63), (5.11) y ($\dot{-}6$), puede sustituirse el LMD del paso anterior

$$a \in Cn\left((A \dot{-} (\neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y))) \cup \{x \wedge y\}\right) \tag{5.114}$$

de tal modo que para demostrar (5.113) es suficiente demostrar (5.114). Tomando en cuenta solamente a ($\dot{-}7$), se tiene que

$$A \dot{-} \neg (x \wedge y) \cap A \dot{-} (\neg x \vee y) \subseteq A \dot{-} (\neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)) \ . \tag{5.115}$$

Por teoría de conjuntos, a partir de lo anterior se tiene

$$(A \dot{-} \neg (x \wedge y) \cap A \dot{-} (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\} \subseteq A \dot{-} (\neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\} \ . \tag{5.116}$$

Por (2.6) y el paso anterior se deduce que

$$\begin{aligned} &Cn\left((A \dot{-} \neg (x \wedge y) \cap A \dot{-} (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right) \\ &\subseteq Cn\left(A \dot{-} (\neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right) \ . \end{aligned} \tag{5.117}$$

Luego, por ($\dot{-}1$) y (2.5), se puede sustituir parte del LMI del paso anterior, resultando

$$\begin{aligned} &Cn\left((Cn\left(A \dot{-} \neg (x \wedge y)\right) \cap Cn\left(A \dot{-} (\neg x \vee y)\right)) \cup \{x \wedge y\}\right) \\ &\subseteq Cn\left(A \dot{-} (\neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right) \ . \end{aligned} \tag{5.118}$$

Con el paso anterior, (5.17) y teoría de conjuntos, se tiene que

$$\begin{aligned} &Cn\left((A \dot{-} \neg (x \wedge y)) \cup \{x \wedge y\}\right) \cap Cn\left((A \dot{-} (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right) \\ &\subseteq Cn\left(A \dot{-} (\neg (x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right) \ . \end{aligned} \tag{5.119}$$

Entonces, por teoría de conjuntos y el paso anterior, para demostrar (5.114) es suficiente demostrar que

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} \neg\left(x \wedge y\right)\right) \cup \left\{x \wedge y\right\}\right) \cap Cn\left(\left(A \dot{-} \left(\neg x \vee y\right)\right) \cup \left\{x \wedge y\right\}\right) \ . \tag{5.120}$$

Por teoría de conjuntos, para demostrar el paso anterior, es suficiente demostrar ambas proposiciones siguientes:

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} \neg\left(x \wedge y\right)\right) \cup \left\{x \wedge y\right\}\right) \ . \tag{5.121}$$

$$a \in Cn\left(\left(A \dot{-} \left(\neg x \vee y\right)\right) \cup \left\{x \wedge y\right\}\right) \ . \tag{5.122}$$

Entonces, Levi, puede sustituirse el LMD de (5.110) y así se demuestra (5.121). Luego, solamente por ($\dot{-}2$), se tiene que

$$A \dot{-} \neg\left(x \wedge y\right) \subseteq A \ . \tag{5.123}$$

Por teoría de conjuntos y el paso anterior,

$$A \dot{-} \neg\left(x \wedge y\right) \cup \left\{x \wedge y\right\} \subseteq A \cup \left\{x \wedge y\right\} \ . \tag{5.124}$$

Por (2.6) y lo anterior,

$$Cn\left(A \dot{-} \neg\left(x \wedge y\right) \cup \left\{x \wedge y\right\}\right) \subseteq Cn\left(A \cup \left\{x \wedge y\right\}\right) \ . \tag{5.125}$$

Luego, usando el paso anterior, (5.121) y teoría de conjuntos, se tiene que

$$a \in Cn\left(A \cup \left\{x \wedge y\right\}\right) \ . \tag{5.126}$$

Finalmente, con lo anterior, (5.21) y teoría de conjuntos, se demuestra (5.122).

□

En vista del teorema 5.31, la definición de G_3 y el corolario 2.77 se tiene como consecuencia directa el siguiente corolario:

Corolario 5.32. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM* ($\dot{-}1$), ($\dot{-}2$), ($\dot{-}5$) *y* ($\dot{-}6$), *la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica G_3. Dicho operador de contracción satisface* ($\dot{+}7$) *si satisface* ($\dot{-}7$).

Observación 5.33. Un resultado similar no pudo ser encontrado para las otras lógicas que estudiamos debido a los pasos tomados en la prueba del teorema 5.31. Específicamente, sólo la dirección $\leftarrow$ de (5.63) no es válida bajo Pac o G_3'. Esto queda entonces como problema abierto.

5.3.3. Relación de implicación de $(\dot{+}8)$ a $(\dot{-}8)$

Teorema 5.34. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM $(\dot{-}1)$, $(\dot{-}2)$, $(\dot{-}5)$ y $(\dot{-}6)$, la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica $LT3$. Dicho operador de contracción satisface $(\dot{-}8)$ si satisface $(\dot{+}8)$.*

Demostración. Asúmase $(\dot{+}8)$. Se pretende demostrar que $(\dot{-}8)$ es el caso. Sea

$$x \notin A \dot{-} (x \wedge y) \tag{5.127}$$

pues el otro caso es trivial. Por $(\dot{-}6)$, (5.64), (5.11), lo anterior y teoría de conjuntos

$$x \notin A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \tag{5.128}$$

Luego, por lo anterior, $(\dot{-}1)$ y (2.5)

$$x \notin Cn\left(A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y)\right) \tag{5.129}$$

Por notación 2.48, se puede reescribir como

$$A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \nvDash x \tag{5.130}$$

Por (5.26) y el paso anterior

$$A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup \{\neg x \vee \neg y\} \nvDash x \tag{5.131}$$

Por lo anterior, (5.25) y (5.65),

$$A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup \{\neg x \vee \neg y\} \nvDash \neg\neg x \tag{5.132}$$

Por notación 2.48, lo anterior se puede reescribir como

$$\neg\neg x \notin Cn\left(A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup \{\neg x \vee \neg y\}\right) \tag{5.133}$$

Con (2.10), se tiene que lo anterior se hace

$$\neg\neg x \notin Cn\left(A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup Cn\left(\{\neg x \vee \neg y\}\right)\right) \tag{5.134}$$

Usando lo anterior, (5.66) y (5.11),

$$\neg\neg x \notin Cn\left(A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup Cn\left(\{\neg (x \wedge y)\}\right)\right) \tag{5.135}$$

Por el anterior y (2.10)

$$\neg\neg x \notin Cn\left(A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup \{\neg (x \wedge y)\}\right) \tag{5.136}$$

Con Levi, lo anterior es

$$\neg\neg x \notin A \dot{+} \neg (x \wedge y) \tag{5.137}$$

Por ($\dot{-}$8) y el anterior,

$$Cn\left(A \dot{+} \neg (x \wedge y) \cup \{\neg x\}\right) \subseteq A \dot{+} \left(\neg (x \wedge y) \wedge \neg x\right) \tag{5.138}$$

Por lo anterior y (5.37)

$$Cn\left(A \dot{+} \neg (x \wedge y) \cup \{\neg x\}\right) \subseteq Cn\left(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg x\}\right) \tag{5.139}$$

Usando solamente teoría de conjuntos y (2.4)

$$A \dot{+} \neg (x \wedge y) \subseteq Cn\left(A \dot{+} \neg (x \wedge y) \cup \{\neg x\}\right) \tag{5.140}$$

Por el anterior y Levi, se tiene que:

$$Cn\left(A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup \{\neg (x \wedge y)\}\right) \subseteq Cn\left(A \dot{+} \neg (x \wedge y) \cup \{\neg x\}\right) \tag{5.141}$$

Usando solamente teoría de conjuntos y (2.4)

$$A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \subseteq Cn\left(A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \cup \{\neg (x \wedge y)\}\right) \tag{5.142}$$

Por teoría de conjuntos, los dos pasos anteriores y (5.139)

$$A \dot{-} \neg\neg (x \wedge y) \subseteq Cn\left(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg x\}\right) \tag{5.143}$$

Por ($\dot{-}$6), (5.64), (5.11) y el anterior

$$A \dot{-} (x \wedge y) \subseteq Cn\left(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg x\}\right) \tag{5.144}$$

Por ($\dot{-}$2), ($\dot{-}$5) y teoría de conjuntos

$$A \dot{-} (x \wedge y) \subseteq Cn\left(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg\neg x\}\right) \tag{5.145}$$

Usando (5.39) junto con los dos pasos anteriores,

$$A \dot{-} (x \wedge y) \subseteq Cn\left(A \dot{-} \neg\neg x\right) \tag{5.146}$$

Por (5.67), (5.11), ($\dot{-}$6) y el anterior

$$A \dot{-} (x \wedge y) \subseteq Cn\left(A \dot{-} x\right) \tag{5.147}$$

Finalmente, con ($\dot{-}$1) y (2.5)

$$A \dot{-} (x \wedge y) \subseteq A \dot{-} x \tag{5.148}$$

$\square$

En vista del teorema 5.34, la definición de Pac y el corolario 2.77 se tiene como consecuencia directa el siguiente corolario:

Corolario 5.35. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM* ($\dot{-}$1), ($\dot{-}$2), ($\dot{-}$5) *y* ($\dot{-}$6), *la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica Pac. Dicho operador de contracción satisface* ($\dot{-}$8) *si satisface* ($\dot{+}$8).

Observación 5.36. Un resultado similar no pudo ser encontrado para las otras lógicas estudiadas debido a los pasos tomados en la prueba del teorema 5.34. Específicamente (5.64) y (5.67) no son teoremas de Int, G_3 o G_3': solamente la implicación $\rightarrow$ de (5.64), y la implicación $\leftarrow$ de (5.67) son válidas para Int y G_3; en cierto sentido de manera *simétrica*, solamente la dirección $\leftarrow$ de la implicación de (5.64), y la dirección $\rightarrow$ de (5.67) son válidas para G_3'. En Int, sólo el lado $\rightarrow$ de (5.66) es teorema. Además, (5.26) se ha podido demostrar solamente para Pac y G_3', mientras que (5.65) no es un teorema de Int o G_3. Finalmente, es bien sabido que (5.23) no es un teorema de Int o G_3 (véase [9]), el cual es requerido por la prueba del teorema 5.34 (p. ej. para demostrar (5.24), que permite demostrar (5.26)). En vista de esta situación, la validez de un resultado similar al corolario 5.35 bajo Int, G_3 o G_3' permanece como un problema abierto.

5.3.4. Relación de implicación de ($\dot{-}$8) a ($\dot{+}$8)

Teorema 5.37. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM* ($\dot{-}$1) *y* ($\dot{-}$6), *la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica $LT4$. Dicho operador de contracción satisface* ($\dot{+}$8) *si satisface* ($\dot{-}$8).

Demostración. Asúmase ($\dot{-}$8). Se pretende demostrar que ($\dot{+}$8) es el caso. Sea

$$\neg y \notin A \dot{+} x \tag{5.149}$$

(el otro caso es trivial). Se desea demostrar que

$$Cn\left(\left(A \dot{+} x\right) \cup \{y\}\right) \subseteq A \dot{+} \left(x \wedge y\right) . \tag{5.150}$$

Por (5.4) y (5.149), se tiene que

$$x \rightarrow \neg y \notin A \dot{-} \neg x . \tag{5.151}$$

Usando (5.74), el paso anterior, (5.11) y ($\dot{-}$6),

$$x \rightarrow \neg y \notin A \dot{-} \left(\left(x \rightarrow \neg y\right) \wedge \neg x\right) . \tag{5.152}$$

Por $(\dot{-}8)$ y el paso anterior,

$$A \dot{-} ((x \rightarrow \neg y) \wedge \neg x) \subseteq A \dot{-} (x \rightarrow \neg y) \ . \tag{5.153}$$

Nuevamente, usando (5.74), el paso anterior, (5.11) y $(\dot{-}6)$,

$$A \dot{-} \neg x \subseteq A \dot{-} (x \rightarrow \neg y) \ . \tag{5.154}$$

Luego, por (5.77), el paso anterior, (5.11) y $(\dot{-}6)$,

$$A \dot{-} \neg x \subseteq A \dot{-} \neg (x \wedge y) \ . \tag{5.155}$$

Por teoría de conjuntos y lo anterior se tiene que

$$A \dot{-} \neg x \cup \{x \wedge y\} \subseteq A \dot{-} \neg (x \wedge y) \cup \{x \wedge y\} \ . \tag{5.156}$$

Utilizando lo anterior y (2.6), se deduce que

$$Cn\,(A \dot{-} \neg x \cup \{x \wedge y\}) \subseteq Cn\,(A \dot{-} \neg (x \wedge y) \cup \{x \wedge y\}) \ . \tag{5.157}$$

Luego, por (5.14), puede reemplazarse el LMI del paso anterior

$$Cn\,(Cn\,(A \dot{-} \neg x \cup \{x\}) \cup \{y\}) \subseteq Cn\,(A \dot{-} \neg (x \wedge y) \cup \{x \wedge y\}) \ . \tag{5.158}$$

Aplicando Levi a ambos lados del paso previo, se deduce

$$Cn\,(A \dot{+} x \cup \{y\}) \subseteq A \dot{+} (x \wedge y) \ . \tag{5.159}$$

□

En vista del teorema 5.37, la definición de Int y G_3 y el corolario 2.77 se tienen como consecuencia directa:

Corolario 5.38. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM $(\dot{-}1)$ y $(\dot{-}6)$, la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica Int. Dicho operador de contracción satisface $(\dot{+}8)$ si satisface $(\dot{-}8)$.*

Corolario 5.39. *Sea $A \dot{-} x$ la cn-teoría que es asignada a A y x por un operador de contracción $\dot{-}$ que satisface los postulados AGM $(\dot{-}1)$ y $(\dot{-}6)$, la identidad de Levi y que está definido bajo la lógica G_3. Dicho operador de contracción satisface $(\dot{+}8)$ si satisface $(\dot{-}8)$.*

Observación 5.40. Un resultado similar no pudo ser encontrado para las otras lógicas de interés debido a los pasos tomados en la prueba del teorema 5.37. Específicamente ni (5.74) ni (5.77) son teoremas de Pac o G_3': la dirección $\rightarrow$ de (5.74) no es un teorema de Pac ni de G_3'; la dirección $\leftarrow$ de (5.77) no es un teorema de de Pac ni de G_3'.

5.4. Trabajos relacionados con este proyecto

Existen otros trabajos con objetivos similares al nuestro, pero enfocados a lógicas no clásicas diferentes a las que hemos elegido.

En [51] se investiga el modelo AGM asumiendo como lógica subyacente una *paraconsistente* que, partiendo de una simple modificación de la relación de consecuencia clásica, considera que los valores de verdad de las proposiciones son subconjuntos de $\{0, 1\}$ [9]: *deducción de primer grado* (*first degree entailment*). Se demuestra que el conjunto completo de postulados de contracción, junto con la identidad de Levi, implica al conjunto completo de postulados de revisión; este resultado es un superconjunto de parte de lo que serían nuestros objetivos específicos aplicados a deducción de primer grado. Al investigar los teoremas de representación que unen a los postulados del modelo AGM con los modelos constructivos de firmeza epistémica, contracción de elección parcial transitivamente relacional y de mundos posibles, resulta que estos mantienen su validez; comparado con nuestro proyecto, este resultado va más allá de los objetivos actuales. El trabajo carece de demostraciones detalladas y se pone más atención a los resultados concernientes a modelos constructivos, por lo que no nos hemos basado en él para realizar nuestra investigación. Sin embargo, consideramos relevantes sus resultados en el sentido de que apoyan el interés teórico de nuestra investigación en vista de que dos de nuestras lógicas son paraconsistentes.

En [52] se estudia el cambio de los postulados de revisión para adaptarlos a las características de la lógica llamada *deducción tautológica*[10]; en particular, se piden condiciones de consistencia ligeramente más débiles a las de los postulados originales. Tales postulados resultan ser lo suficientemente útiles para propósitos prácticos. Ello muestra que es perfectamente aceptable atacar el problema de la validez de las relaciones de equivalencia entre los conjuntos de postulados modificando los postulados mismos en aquellos casos donde los requerimientos de los postulados no son coherentes con las características que ofrece la lógica subyacente, como ya lo hemos hecho[11]. Además, es posible ir más allá haciendo propuestas como la que explicamos en la subsección 6.2.2.

[9] Siendo 0 *falso* y 1 *verdadero.*

[10] La cual es un fragmento de la *lógica relevante* [52].

[11] Al proponer nuestra variante del postulado ($\dot{+}5$) en la subsección 4.3.3.2.