

# Capítulo 3

## Lógicas estudiadas

En este capítulo se presentan formalmente las lógicas mencionadas en nuestro objetivo general<sup>1</sup>: la intuicionista (*Int*), paraconsistente trivaluada (*Pac*),  $G_3$  y  $G'_3$ . Cada una de ellas es enunciada en el contexto de un breve marco motivacional para el estudio de la familia de lógicas a la que pertenece. Se mencionará también una forma *semántica* para definir relaciones de consecuencia lógica, la cual es particularmente útil para determinar si una fórmula es un teorema de una lógica o no. Finalizamos el capítulo remarcando las relaciones de contención entre los conjuntos de teoremas de las lógicas presentadas.

Para el lector no experimentado, en la primera sección se pretende dar un panorama más completo de lo que es una *lógica*, uno que vaya más allá de simplemente conocer una definición formal. Consideramos que este tipo de lector debe tener en cuenta tres puntos que se desprenden de esa sección, pues son características comunes a las lógicas estudiadas en este proyecto:

- Las lógicas son modelos de razonamiento y es lo que se considere racional en cierta teoría de razonamiento lo que le da su justificación.
- Los lenguajes formales<sup>2</sup> carecen de significado sin una lógica.
- El lenguaje  $\mathcal{P}$  (definición 2.29 en la página 20) es insuficiente para modelar los aspectos clave del lenguaje natural.<sup>3</sup>

---

<sup>1</sup>Véase subsección 1.2.1 en la página 9.

<sup>2</sup>Véase definición 2.26 en la página 19.

<sup>3</sup>Aunque sí suficiente para el objetivo principal de este trabajo.

### 3.1. \*Lógica y lógicas

Ya en el capítulo anterior se ha definido lo que generalmente debemos entender por *lógica* en este trabajo. Sin embargo, para comprender el porqué se le denomina *lógica* a tal estructura matemática, y por consiguiente su importancia, es necesario distinguir y entender los demás significados que tiene el término.

La palabra *lógica* tiene sus usos más comunes en dos grandes áreas del conocimiento: *filosofía* y *matemáticas*. El lector sin duda habrá escuchado que la lógica es un área de estudio de cualquiera de las dos. Atendiendo a este uso, [20] distingue cuatro significados:

- El estudio matemático de los lenguajes formales artificiales.
- El estudio de las inferencias formalmente válidas y las consecuencias lógicas.
- El estudio de las verdades lógicas.
- El estudio de las características generales, o forma, de los juicios.

Todos los casos, excepto el primero, pertenecen a la filosofía y sólo los dos primeros merecen nuestra atención.

En el caso del «estudio de las inferencias formalmente válidas y las consecuencias lógicas», tres palabras saltan a la vista: *inferencias*, *formalmente* y *consecuencias*. Por *inferencia*, en el sentido que se usa en [21], debe entenderse cualquier paso simple que se da en un argumento (una serie de inferencias) y que lleva de ciertas *premisas* a una *conclusión* (o *consecuencia*). Por *formal*, se hace referencia a la forma que posee la representación (lingüística, mental, etcétera) de una inferencia [20]. Así, esta acepción se refiere al área que estudia “las inferencias cuya validez puede reducirse a las características formales de la representación involucrada” [20]. De manera equivalente a la idea anterior, *lógica* es el estudio de las características formales relevantes para establecer la validez de una inferencia, las cuales se encuentran al abstraer las premisas y las conclusiones de una inferencia y revelar su forma (o esquema) subyacente [21]. Partiendo de esta definición, llamaremos *proposición* a aquello que, en los esquemas de inferencia estudiados, puede colocarse como premisa y/o conclusión y que puede ser evaluado de verdadero o falso [21, 22].

El caso del «estudio matemático de los lenguajes formales artificiales» surge (inspirado en el del «estudio de las inferencias formalmente válidas y las consecuencias lógicas») como un medio para modelar inferencias usando un lenguaje formal [20]. Dicho modelado se lleva a cabo distinguiendo y mapeando a un lenguaje formal aquello que se

mantiene constante en la estructura de la representación original de las inferencias que tienen la misma forma (p. ej., en el caso del lenguaje natural, palabras que expresan negaciones, conjunciones, disyunciones, etcétera) y que comúnmente se les llama *constantes lógicas* [23]; lo que es variante y susceptible de calificarse como falso o verdadero (i.e. las proposiciones) pasa a ser entonces el contenido o significado de las fórmulas [22], ya sean atómicas (i.e. las representadas con letras proposicionales) o compuestas (i.e. las que contienen letras proposicionales y conectivos). Es aquí, evidentemente, donde se encuentra la utilidad de las estructuras matemáticas que en el capítulo anterior se han definido como *lógicas*: permiten en primer lugar modelar ciertas inferencias y argumentos, y en segunda instancia facilitan la codificación de cuerpos de conocimiento (o *teorías*, como sería, por ejemplo, una teoría geométrica o una teoría de conjuntos<sup>4</sup>) a fin de ser estudiados sin la carga extra que supone la complejidad de un lenguaje natural, e incluso llegar a ser explotados mediante dispositivos computacionales.

La relación entre los dos casos puede resumirse como: son las diferentes concepciones filosóficas<sup>5</sup> de lo que se considera como inferencias y argumentaciones racionales, las que dan pie a diferentes estructuras matemáticas que pretenden modelarlas<sup>6</sup>. Es en términos de tales concepciones que una *lógica* particular, en el sentido que se da en el capítulo anterior, tiene su justificación y toma su significado.

### 3.1.1. \*Significado de un lenguaje

Ya que lo que se considere racional es lo que dicta las características de una lógica, aunque al definir el alfabeto  $\Sigma$  se haya nombrado a cada uno de sus elementos como *conjunción*, *disyunción*, *negación*, etcétera, ellos no poseen significado alguno *a priori* [25]. De manera análoga, el nombre asignado a un operador (independientemente del símbolo utilizado para representarlo) no garantiza que posea ciertas características comunes a todas las lógicas, como lo resalta [25] haciendo alusión a la negación: «no se ha logrado un acuerdo común sobre cuáles propiedades básicas son las que un operador unario debe obedecer para ser llamado 'negación'».

<sup>4</sup>Véase la subsección siguiente para una aclaración sobre el lenguaje que se utiliza para lograrlo.

<sup>5</sup>Aquí, por *concepciones filosóficas* queremos decir una postura y el argumento que defiende dicha postura, sin importar si la postura, el argumento o ambos tienen un origen puramente teórico, práctico o una combinación. En general no usaremos el adjetivo *filosófico* para englobar aquello que es *práctico*; sin embargo, queda abierta la posibilidad de este uso y en tales casos se hace con cuidado (como en la subsección 3.4.2.2).

<sup>6</sup>Sin embargo, la conexión entre ambas disciplinas no se limita únicamente a una relación causal que origina a una de la otra. En [24] se mencionan algunas otras formas en que se relacionan y que no hemos incluido aquí.

### 3.1.2. \*Lenguajes formales y lenguaje natural

Pese a lo que sugiere la conexión señalada entre los dos casos discutidos al inicio de la sección 3.1, el lenguaje proposicional  $\mathcal{P}$  no es suficiente para modelar las constantes lógicas necesarias para lograr la expresividad mínima del lenguaje natural. Para hacer esto es necesario recurrir a una versión extendida de  $\mathcal{P}$  donde sea posible modelar *términos*, *predicados* y *cuantificadores* [26]. Las lógicas que se definen en este capítulo usando como el lenguaje  $\mathcal{P}$  pueden englobarse dentro del nombre genérico de *cálculos proposicionales*. Partiendo de dichas lógicas, al extender el lenguaje  $\mathcal{P}$  de tal forma y agregar algunos axiomas y reglas de inferencia adicionales, es posible obtener lo que se conoce bajo el nombre genérico de *cálculo de predicados*. Para los fines de este trabajo, bastará comprender los cálculos proposicionales que se definan.

*Observación 3.1.* Habiendo asumido el lenguaje  $\mathcal{P}$  para toda lógica en este trabajo, las lógicas que se definan serán *cálculos proposicionales*.

El lector puede referirse a [13, 26] para ampliar más el tema. En [7] se muestra el cálculo proposicional de lógica intuicionista y el de predicados, y se señala la diferencia entre ambos.

## 3.2. Dos enfoques para definir lógicas

De acuerdo al capítulo anterior, para definir una lógica basta indicar los elementos de una relación de consecuencia. Ahí mismo presentamos también a las teorías formales como una manera de definir relaciones de consecuencia. Sin embargo, existen otras opciones para hacer esto último.

El estudio de la noción de consecuencia lógica en el siglo pasado se centró en dos técnicas diferentes: *pruebas* y *modelos*<sup>7</sup>. El primer tipo considera que la existencia de una *prueba*<sup>8</sup> es lo que permite afirmar que una proposición es consecuencia de algunas premisas. En el caso de los modelos, una proposición puede concluirse a partir de ciertas premisas si no existe algún *caso*<sup>9</sup> en el que las premisas fallen en implicar a la conclusión. [27]

Las teorías formales son una instancia del primer enfoque y son la principal forma que usaremos para definir lógicas. Otras maneras de definir sintácticamente lógicas son

<sup>7</sup>Usualmente llamados enfoque *sintáctico* y *semántico*, respectivamente.

<sup>8</sup>La cual puede tomar muchas formas, pero que en general consta de una serie de inferencias que llevan de ciertas proposiciones a una conclusión.

<sup>9</sup>Donde un caso, o más precisamente una *interpretación* o un *modelo*, es alguna forma de asignar un valor de verdad a las proposiciones.

*sistemas de deducción natural y cálculos de secuentes*. Se deja al lector la oportunidad de encontrar la definición y un ejemplo de un sistema de deducción natural en [17], mientras que lo mismo puede ser encontrado en [8] para el cálculo de secuentes.

Los modelos son estructuras matemáticas abstractas que proveen un valor de verdad a los elementos primitivos de un lenguaje formal (a los átomos, en el caso de  $\mathcal{P}$ ), valor que luego se usa de alguna manera para decidir el valor de verdad las fórmulas de un lenguaje [27]. Ejemplos de estos son *álgebras*<sup>10</sup>, *modelos de Kripke* y *matrices lógicas*<sup>11</sup>. El lector puede encontrar una exposición de la idea general detrás de las álgebras en [17, 18]. Además, en [17] pueden encontrarse álgebras para dos lógicas presentadas en este capítulo<sup>12</sup> y un modelo de Kripke para una de las lógicas<sup>13</sup>.

En este trabajo, las matrices lógicas cumplen un papel particularmente importante al ayudar a decidir si una fórmula es teorema de cierta lógica o no. Antes de definir lo que son las matrices lógicas es primordial señalar que en ellas se asume:

**Principio de la verdad funcional 3.2** ([28]). El valor de verdad de una fórmula es determinado por los valores de verdad de sus subfórmulas.<sup>14</sup>

### 3.2.1. Matrices lógicas

Las matrices lógicas tienen como uno de sus componentes un álgebra. Puede, como en el caso de [17], definirse el concepto de álgebra como una estructura matemática muy abstracta. Aquí consideramos una definición enfocada al lenguaje  $\mathcal{P}$ , siguiendo el estilo de [18].

**Definición 3.3** ([17, 18]). Una  $\mathcal{P}$ -álgebra (o simplemente *álgebra*)  $\mathcal{A}$  consiste de:

1. Un conjunto no vacío  $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  llamado *universo de  $\mathcal{A}$* .
2. Un conjunto  $\{o_{\diamond} : \mathcal{U}_{\mathcal{A}}^2 \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \mid \diamond \in \Sigma_b\} \cup \{o_{\diamond} : \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}} \mid \diamond \in \Sigma_u\}$  cuyos elementos son llamados *operaciones fundamentales de  $\mathcal{A}$* .

*Observación 3.4*. Existe una operación fundamental de  $\mathcal{A}$  por cada conector del alfabeto  $\Sigma$ <sup>15</sup>.

<sup>10</sup>Que son una generalización de la interpretación de las fórmulas de un lenguaje por medio de *tablas de verdad* [18].

<sup>11</sup>Las cuales son un caso particular de las álgebras [28].

<sup>12</sup>Lógica clásica y lógica intuicionista.

<sup>13</sup>Para lógica intuicionista, para el que además se demuestra la equivalencia, respecto a toda álgebra de Heyting, de la validez (concepto análogo al de teorema y que explicamos enseguida) de una fórmula.

<sup>14</sup>Y entonces permanece sin variación cuando una de sus subfórmulas es reemplazada por otra subfórmula con el mismo valor de verdad.

<sup>15</sup>Véase definición de  $\Sigma$  en la página 19.

**Definición 3.5** ([18]). Una *matriz lógica*  $\mathcal{M}$  consiste de:

1. Un álgebra  $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ .
2. Un subconjunto  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$  del universo de  $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ , cuyos elementos se llaman *elementos designados* de  $\mathcal{M}$ .

**Notación 3.6.** Para referirnos a los elementos del universo de un álgebra usaremos la expresión *valores de verdad*. De manera similar, al hablar de los elementos designados de una matriz lógica usaremos la expresión *valores designados*.

La característica que hace a un álgebra particularmente interesante al definir lógicas es que con ella y una función (que llamaremos *interpretación*) que asigna valores de verdad a las fórmulas de un lenguaje (en nuestro caso  $\mathcal{P}$ ) siguiendo el principio de la verdad funcional, se puede decidir el valor de verdad<sup>16</sup> de una proposición. [18]

**Definición 3.7** ([18]). Una *interpretación* (o *valuación*) *atómica*  $\iota$  en un álgebra  $\mathcal{A}$  es una función  $\iota : \Sigma_a \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ .

**Definición 3.8** ([18]). Una *interpretación* (o *valuación*)  $I_\iota$  en un álgebra  $\mathcal{A}$  es una función  $I_\iota : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$  tal que

$$I_\iota(a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \iota(a) & \text{si } a \in \Sigma_a \\ o_\diamond(I_\iota(x), I_\iota(y)) & \text{si } \diamond \in \Sigma_b \text{ y } a = (x \diamond y) \\ o_\diamond(I_\iota(x)) & \text{si } \diamond \in \Sigma_u \text{ y } a = \diamond x \end{cases}$$

donde  $\iota$  es una interpretación atómica.

Los valores designados de una matriz lógica (que fungen como sustitutos del tradicional valor de verdad *verdadero* [28]) permiten decidir si una fórmula es *válida*<sup>17</sup> en una interpretación particular o no. Esto a su vez se utiliza para definir una noción de consecuencia similar a la de una teoría formal<sup>18</sup> y con ella finalmente definir una relación de consecuencia.

**Definición 3.9** ([28]). Una fórmula  $x$  es *válida* bajo una interpretación  $I_\iota$  en el álgebra  $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$  de una matriz lógica  $\mathcal{M}$  si  $I_\iota(x) \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ .

<sup>16</sup>Valor que, de manera similar a los símbolos de un lenguaje, carece de significado *a priori*.

<sup>17</sup>Término que, aunque en filosofía se reserva para las inferencias y no las proposiciones (por ejemplo en [27]), se acostumbra utilizar para calificar a las proposiciones en la literatura sobre modelos.

<sup>18</sup>Véase definición 2.72 en la página 29.

**Definición 3.10** ([27]). Una fórmula  $x$  es una *consecuencia* en la matriz lógica  $\mathcal{M}$  de un conjunto  $T$  si, para toda interpretación  $I_i$  en el álgebra  $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ , cuando  $\forall y \in T (I_i(y) \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}})$  se cumple que  $I_i(x) \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ .

*Observación 3.11* ([18]). Una relación de consecuencia  $\vdash_{\mathcal{M}}$  sobre el lenguaje  $\mathcal{P}$  puede definirse como

$$T \vdash_{\mathcal{M}} x \text{ sii } x \text{ es una consecuencia en } \mathcal{M} \text{ de } T.$$

Si dos sistemas  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{M}$ , uno sintáctico y el otro semántico, definen una misma lógica, se dice que  $\mathcal{F}$  es *sólido* respecto a  $\mathcal{M}$  (toda consecuencia en  $\mathcal{F}$  es una consecuencia en  $\mathcal{M}$ ) y que  $\mathcal{M}$  es *completo* respecto a  $\mathcal{F}$  (toda consecuencia en  $\mathcal{M}$  es una consecuencia en  $\mathcal{F}$ ) [18]. Independientemente de como se defina en un inicio, la relación de consecuencia de toda lógica puede ser definida mediante una matriz lógica [18]; así, en las siguientes secciones al presentar la teoría formal de cada lógica también incluimos su correspondiente matriz lógica<sup>19</sup>, existiendo entre ambos sistemas solidez y completitud. Un aspecto interesante de las matrices lógicas, que no podemos dejar de mencionar, es:

**Lema 3.12** (\*[6]). *Toda relación de consecuencia definida mediante una matriz lógica es una relación de consecuencia abstracta<sup>20</sup> y toda relación de consecuencia abstracta es definible mediante una matriz lógica.*

Nuestro interés en las matrices lógicas es particularmente en su utilidad para decidir si una fórmula es una *tautología*<sup>21</sup> o no.

**Definición 3.13** ([18, 28]). Una fórmula  $x$  es una *tautología* bajo una matriz lógica  $\mathcal{M}$  si para toda interpretación  $I_i$  en el álgebra  $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}$ ,  $I_i(x) \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ .

*Observación 3.14.* La definición anterior puede ser formulada de manera equivalente como un caso particular de la definición 3.10: Una fórmula  $x$  es una *tautología* bajo una matriz lógica  $\mathcal{M}$  si  $x$  es una *consecuencia* en la matriz lógica  $\mathcal{M}$  del conjunto  $\emptyset$ .

En el apéndice A explicamos de qué manera nos hemos basado en las matrices lógicas para decidir cuales fórmulas son teoremas de  $Pac$ ,  $G_3$  y  $G'_3$ . En el caso de la lógica intuicionista, al no ser posible definirla usando una matriz lógica con un número *finito* de valores de verdad [7, 28], hemos optado por un método diferente que explicamos

<sup>19</sup>Excepto en el caso de la lógica intuicionista, pues tiene un número infinito de valores de verdad [7, 28].

<sup>20</sup>Véase definición 2.52 en la página 24.

<sup>21</sup>Término equivalente a *teorema* (véase definición 2.64 en la página 27). Nótese que los términos *tautología* y *teorema* usualmente se reservan para denotar a las fórmulas que son siempre verdaderas en los enfoques semántico y sintáctico respectivamente; el uso de *teorema* en este trabajo para referirnos en ocasiones a ambos casos es entonces, estrictamente hablando, un abuso de notación.

en el apéndice B. Ya que nuestro interés final es la construcción de pruebas sintácticas que demuestren la calidad de teorema de algunas fórmulas, esta información permite evitar realizar esfuerzos en aquellos casos donde una fórmula no es demostrable usando solamente los axiomas de alguna de tales cuatro lógicas.

*Observación 3.15.* Hemos hecho énfasis en las teorías formales como medio principal para definir lógicas por las siguientes razones:

- Una misma prueba de que  $T \vdash x$  en una lógica  $\mathcal{L}$  es válida en todas aquellas lógicas  $\mathcal{L}'$  tales que  $\Omega_{\mathcal{L}} \subseteq \Omega_{\mathcal{L}'}$ .<sup>22</sup>
- Es fácil comparar lógicas, en el sentido de la definición 2.66 en la página 27, cuando se definen usando teorías formales.<sup>23</sup>
- Consideramos que, en cierto sentido, una prueba (en una teoría formal) de que  $T \vdash x$  es más ilustrativa que su contraparte semántica (una tabla de verdad exhaustiva sobre los valores de verdad de los átomos).
- No es posible definir *Int* usando una matriz lógica con un número *finito* de valores de verdad [7, 28].

### 3.3. Lógica clásica

Ésta es la lógica que modela el pensamiento asumido por omisión, por lo menos en los tratados introductorios, en filosofía y matemáticas [29].<sup>24</sup> La orientación inicial del estudio de la lógica (como estudio filosófico de las inferencias válidas) se dio a través de la *lógica clásica* [17]. Esta lógica considera la existencia de dos valores de verdad (*verdadero* y *falso*, entendiendo a *falso* como *no verdadero* [17]) y asigna valores a sus proposiciones usando el principio de la verdad funcional [8]. En ella subyace la idea Platónica de que todos los objetos existen independientemente del pensamiento humano

<sup>22</sup>Y es fácilmente adaptable en aquellas lógicas  $\mathcal{L}'$  tales que, aunque  $\Omega_{\mathcal{L}} \not\subseteq \Omega_{\mathcal{L}'}$ ,  $\Omega_{\mathcal{L}} \subseteq Cn_{\mathcal{L}'}(\emptyset)$  (véase lema 2.76 y corolario 2.77 en la página 30)

<sup>23</sup>Véase lema 2.76 y corolario 2.77 en la página 30.

<sup>24</sup>De hecho, ha sido tal la difusión de la lógica clásica que, como lo hace notar [29], parece tener un gran *monopolio docente* donde en algunos textos introductorios se da la ilusión de que el cálculo proposicional y el cálculo de predicados son equivalentes a *lógica clásica*; ejemplos de ello son [13, 26]. Este fenómeno puede tratar de entenderse en las palabras de [26]: “En efecto, no es muy atrevido afirmar que la teoría de inferencia [clásica] es pertinente a toda deliberación humana seria”. No obstante la antigüedad de [26], a la fecha de su publicación la existencia de otras lógicas no era un secreto (por ejemplo, el resultado de Gödel sobre la no existencia de una matriz lógica finita para la lógica intuicionista [7]) y, como veremos en la sección siguiente, la afirmación no podría estar más fuera de lugar.



[30], pues «la verdad [o falsedad] de una proposición es 'absoluta' e independiente de cualquier razonamiento, conocimiento o acción» [17]. Además, aquí se asume que toda proposición es siempre verdadera o falsa [17], pero no las dos cosas al mismo tiempo, en cuyo caso se dice que existe una contradicción y entonces puede deducirse cualquier proposición [24]. Algunas de las relaciones de consecuencia que son aceptadas en la lógica clásica (expresadas como principios e interpretados de acuerdo a esta lógica) son las siguientes<sup>25</sup> <sup>26</sup>:

- *Principio del medio excluido* o *tertium non datur*:  $\vdash x \vee \neg x$ , lo que significa que toda proposición es siempre verdadera o falsa. [24]
- *Introducción/eliminación de la doble negación*:  $\{x\} \vdash \neg\neg x$  y  $\{\neg\neg x\} \vdash x$ , respectivamente, que afirman la *equivalencia* de toda proposición y su doble negación<sup>27</sup>; la parte  $\neg\neg x \vdash x$  es rechazada en aquellas lógicas donde se rechaza el principio del medio excluido [24].
- *Principio de (no) contradicción*<sup>28</sup>:  $\vdash \neg(x \wedge \neg x)$ , una fórmula es verdadera si y sólo si su negación es falsa. [25]
- *Principio de explosividad* o *ex falso quodlibet*<sup>29</sup>:  $\{x, \neg x\} \vdash y$ , que significa que cualquier proposición es deducible a partir de un par de opuestos contradictorios. [6, 24]

Reservamos una definición formal para el final del capítulo (sección 3.5) con el objeto de hacer énfasis en que, para toda lógica  $\mathcal{L}$  de este capítulo, la lógica clásica  $Cl$  es tal que  $\mathcal{L} \leq_{\mathcal{T}} Cl$ .<sup>30</sup>

<sup>25</sup>Cuyas formulaciones son particulares para esta lógica y equivalentes a otras formulaciones más generales bajo el supuesto de que la relación de consecuencia es *monótona* (véase (2.2) en la página 24). En este caso son adecuadas para la lógica clásica gracias a que su relación de consecuencia es finitaria. Una formulación más general para, p. ej., el principio de explosividad debería decir  $T \cup \{x, \neg x\} \vdash y$  (donde  $T$  es cualquier teoría, posiblemente  $T = \emptyset$ ) [6, p. 4].

<sup>26</sup>Cuyas interpretaciones se enuncian en estrecha relación con el carácter bivaluado de la lógica clásica y la dualidad entre sus dos valores de verdad (*verdadero* y *falso*). Interpretaciones más generales requerirían dejar de lado estas asunciones, p. ej., el *principio del medio excluido* no implica en toda lógica que toda proposición sea siempre verdadera o falsa, mientras que el *principio de no contradicción* puede explicarse como «una fórmula es verdadera si y sólo si su negación no lo es». En la subsección 3.4.2.1 se hacen comentarios sobre este último principio que guardan cierta relación con lo señalado aquí.

<sup>27</sup>Equivalencia en el sentido de ser la una consecuencia de la otra y viceversa.

<sup>28</sup>Cuyas variantes pueden encontrarse en [31] y [25], y además en [8] se asigna este nombre a otro principio muy parecido (tal vez a causa de un error tipográfico).

<sup>29</sup>Que algunas veces también se llama *principio de contradicción*, como en [7, 32]. Este uso tal vez se haya dado gracias a la relación entre este principio y el de contradicción, como se menciona en la subsección 3.4.2.1.

<sup>30</sup>Véase definición 2.66 en la página 27.

### 3.4. Lógicas no clásicas

Estas lógicas surgen como respuesta a problemas que no puede enfrentar la lógica clásica [17], ya sean de origen práctico (como es el querer razonar sobre información inconsistente) o filosófico (como cuando el hecho de que la mente humana pueda lidiar con inconsistencias sugiere que un razonamiento *explosivo* no es *racional*). Las cuatro lógicas que hemos mencionado en el capítulo introductorio caen dentro de dos grandes familias: la de las lógicas intermedias y las paraconsistentes. Siguiendo la idea de [25] de que las personas explican el valor de las cosas en función de su uso práctico, remarcaremos en su momento las aplicaciones de dichas familias. Nos gustaría, sin embargo, hacer incapié en que no se deben menospreciar las motivaciones y aspectos puramente filosóficos que subyacen en cada lógica: además de que a veces la demarcación entre lo filosófico y lo práctico es muy difusa, lo teórico es siempre digno de estudio y tal vez lo que falte para pasarlo a un plano práctico sea sólo un poco de imaginación.

Las dos lógicas que presentamos a continuación no son estudiadas en este trabajo, pero sirven para completar el panorama de las relaciones de contención de los conjuntos de teoremas de las lógicas presentadas en la sección 3.5:

**Definición 3.16** ([8]). *Pos* (abreviación para *lógica positiva*) es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas  $\Omega_{Pos}$  con los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} & \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha) \\ & (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)) \\ & (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)) \\ & \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \\ & \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \\ & \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)) \\ & \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \\ & \beta \rightarrow \alpha \vee \beta \end{aligned}$$

**Definición 3.17** ([8]). *C<sub>w</sub>* es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas  $\Omega_{C_w}$  con todos los elementos de  $\Omega_{Pos}$  y los siguientes dos axiomas:

$$\begin{aligned} & \alpha \vee \neg\alpha \\ & \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Esta última lógica pertenece a la familia de lógicas paraconsistentes  $C_n$  que se presenta en la subsección 3.4.2.2.

### 3.4.1. Lógicas intermedias

El *intuicionismo* es una corriente o escuela filosófica que se consolida alrededor de 1908 con el matemático y filósofo alemán L. E. J. Brouwer a partir del pensamiento constructivo del s. XIX [17, 30]. La idea subyacente es básicamente la de considerar todo objeto (matemático) como una construcción mental sin existencia independiente de la mente humana [7]. Ante la existencia de ciertas paradojas<sup>31</sup>, los intuicionistas pensaban que las matemáticas clásicas estaban erradas y ofrecían, por medio de esta corriente, una forma alternativa de fundamentarlas<sup>32</sup> [30].

El intuicionismo pide así abandonar la concepción Platónica de verdad<sup>33</sup> y considerar que una proposición es cierta si existe una prueba *constructiva* de ella [17]. Una prueba constructiva (o construcción mental) es *inductiva* y *efectiva* [30]. Por *inductiva* se quiere decir que si uno desea construir un número, el 3 por ejemplo, sólo se puede hacer *después* de construirse los números 1 y 2 [30]. En el caso de *efectiva* (combinando las ideas de [30, 33]) que existe un procedimiento para construirla. El concepto *después* tiene sentido cuando se habla de tiempo; Brouwer concuerda con Kant en que el hombre tiene *conciencia inmediata* del tiempo, pues las pruebas constructivas no serían posibles si la mente humana no tuviera conciencia del tiempo [30]. En [30] se argumenta que como Kant utilizaba la palabra *intuición* para referirse a esta conciencia inmediata del tiempo, es de ahí de donde el *intuicionismo* toma su nombre.

Además de considerar las proposiciones como verdaderas bajo la existencia de una construcción mental, el intuicionismo distingue entre la no existencia (en cierto momento del tiempo) de una prueba y la imposibilidad de existencia de una prueba (el absurdo o falsedad intuicionista). Es decir, no confunde dos negaciones «desigualmente fuertes»: «entre lo que está comprobado verdadero y lo que se ha demostrado falso, existe un lugar para lo que no está ni erificado ni reconocido absurdo». Esto lleva finalmente a rechazar el principio del medio excluido. [34]

Otro principio que debe rechazarse es el de la eliminación de la doble negación, porque «la no absurdidad no conduce a la no negación». Es decir, el intuicionismo rechaza el poder afirmar la veracidad de una proposición ante la ausencia de una contradicción

<sup>31</sup>Como la *Paradoja de Russel* (véase [13]).

<sup>32</sup>En la cual, aquellas partes de las matemáticas clásicas que no pueden ser explicadas usando construcciones son simplemente «combinaciones de palabras sin sentido» y tal situación no preocupa al intuicionista. [30]

<sup>33</sup>Véase sección 3.3.

al asumirla. [34]

### 3.4.1.1. Lógica intuicionista

Para modelar el pensamiento intuicionista, Heyting propuso una teoría formal con once axiomas [34]. Aquí presentamos una teoría formal para la lógica intuicionista con diez axiomas:

**Definición 3.18** ([8]). *Int* (abreviación para *lógica intuicionista*) es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas  $\Omega_{Int}$  con todos los elementos de  $\Omega_{Pos}$  y los siguientes dos axiomas:

$$\begin{aligned} & \neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \\ & (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha) \end{aligned}$$

En esta lógica los conectivos no se comportan como en lógica clásica: no es posible definir un conectivo binario, usando negación, a partir de alguno de los otros [34]. Los conectivos tienen un significado especial:

- Una construcción de  $x \wedge y$  consiste de una construcción de  $x$  y una construcción de  $y$  [17].
- Una construcción de  $x \vee y$  consiste de solamente una de dos pruebas: la de  $x$  o la de  $y$  [17].
- Una prueba de  $x \rightarrow y$  es un algoritmo que convierte una prueba de  $x$  en una prueba de  $y$  [33].
- Una construcción de  $\neg x$  es un método que transforma toda construcción de  $x$  en un objeto inexistente [17].

### 3.4.1.2. Sistemas de Gödel y $G_3$

Gödel (alrededor de 1932 y 1933 [28, 7]), intentó definir la lógica intuicionista en términos de múltiples grados o valores de verdad, lo cual tuvo dos resultados [28].

El primer resultado fue una familia infinita de lógicas, llamadas sistemas de Gödel [28]. Los sistemas de Gödel, abreviados  $G_i$ , son lógicas multivaluadas cuya matriz lógica tiene un conjunto de valores de verdad  $\{0, 1, \dots, i-1\}$ , cuyas operaciones

fundamentales son como las de lógica clásica, excepto por  $o_{\rightarrow}$ , que se define como

$$o_{\rightarrow}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} i-1 & \text{si } u \leq v \\ v & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y su único valor designado es  $i-1$  [10].

El segundo resultado fue que *Int* no puede definirse usando una matriz lógica con un número finito de valores de verdad [28].<sup>34</sup> <sup>35</sup> GÅ¶del observó que tal familia se encuentra entre *Int* y *Cl* en términos de la inclusión del conjunto de teoremas de las lógicas, es decir

$$Int <_{\mathcal{T}} \dots <_{\mathcal{T}} G_{i+1} <_{\mathcal{T}} G_i <_{\mathcal{T}} \dots <_{\mathcal{T}} G_3 <_{\mathcal{T}} G_2 = Cl$$

donde  $G_2$  es en realidad *Cl* [10]. Con ello demostró su segundo resultado [7].

El término *lógica intermedia* se refiere a cualquier lógica cuyo conjunto de teoremas es consistente, contiene todos los axiomas de la lógica intuicionista, está cerrado bajo *modus ponens* y sustitución y se encuentra incluido en el conjunto de teoremas de la lógica clásica [7]. A su vez, el término *lógica intermedia propia* denota cualquier lógica intermedia que no sea *Cl*. La lógica  $G_3$  es entonces la lógica intermedia propia más fuerte de todas.

**Definición 3.19** ([8]).  $G_3$  (también conocida como *la lógica de aquí y allá* o *HT*) es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas  $\Omega_{G_3}$  con todos los elementos de  $\Omega_{Int}$  y el siguiente axioma:

$$(\neg\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$$

**Definición 3.20** ([8]). La matriz lógica  $\mathcal{M}_{G_3}$  de  $G_3$  se define como:

1.  $\mathcal{U}_{G_3} = \{0, 1, 2\}$
2.  $\mathcal{V}_{G_3} = \{2\}$
3. Siendo sus funciones elementales:

<sup>34</sup>En 1936, Jaśkowski construyó una matriz lógica con infinitos valores de verdad para la lógica intuicionista [28].

<sup>35</sup>Ante tal situación hemos decidido apoyar nuestra investigación en LWB, un software que permite decidir si una fórmula es demostrable o no en *Int* (Véase apéndice B).

$\circ_{\vee_{G_3}}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{u, v\}$
$\circ_{\wedge_{G_3}}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{u, v\}$

$u$	$\circ_{\neg_{G_3}}(u)$
0	2
1	0
2	0

$\circ_{\rightarrow_{G_3}}(u, v)$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

### 3.4.1.3. Aplicaciones

En [10] se mencionan algunas aplicaciones de las lógicas  $Int$  y  $G_3$  en *answer set programming*.

«Answer Set Programming (ASP), Stable Logic Programming o A-Prolog, es la materialización de gran parte del trabajo teórico realizado en los últimos 15 años<sup>36</sup> en las áreas de razonamiento no monótono y de programación lógica aplicada a inteligencia artificial» [10].

Entre las aplicaciones mencionadas, dos resultados son los más importantes.

El primero es una caracterización de los *answer sets* o *modelos estables* de un *programa*<sup>37</sup> en términos de lógica intuicionista. Se enuncia una versión mejorada de un teorema presentado por Pearce, la cual ofrece una caracterización de la noción de modelo estable para programas lógicos *aumentados*<sup>38</sup> y para programas con formulas proposicionales arbitrarias. Esto último permite una forma de extender la noción de modelos estables a otras lógicas, en particular para lógicas modales como  $S4$ . [10]

La otra aplicación es el uso de  $G_3$  para decidir si dos programas,  $P1$  y  $P2$ , son *fuertemente equivalentes* respecto a sus modelos estables. Dos programas son *débilmente equivalentes* cuando tienen exactamente los mismos modelos estables. Sin embargo, esto no es suficiente para que, siendo alguno de los dos parte de un programa más grande  $P3$ , pueda ser reemplazado uno por el otro dentro de  $P3$  sin afectar los modelos estables de  $P3$  (la cual es precisamente la definición de *fuertemente equivalente*). Así, dos programas aumentados son fuertemente equivalentes si y sólo si ambos son equivalentes en  $G_3$ . [10]

<sup>36</sup>A la fecha de la publicación de [10] en 2004.

<sup>37</sup>Un conjunto finito de fórmulas, usualmente restringidas a una forma llamada *cláusula* (una fórmula de forma  $x \leftarrow y$ , donde  $x$  es la *cabeza*,  $y$  el *cuerpo* y  $\leftarrow$  es el mismo conectivo que  $\rightarrow$ , pero escrito de derecha a izquierda) [10].

<sup>38</sup>Programas sin restricción en la forma de su cabeza y cuerpo.

### 3.4.2. Lógicas paraconsistentes

A diferencia de las lógicas intermedias, las lógicas paraconsistentes no surgen todas de una corriente filosófica<sup>39</sup> ni poseen una definición universalmente aceptada<sup>40</sup>. Casi cada aspecto de esta familia y de sus lógicas está envuelto en controversias. Y pese a todo ello, la importancia de su desarrollo ha sido equiparado a la de la geometría no-euclidiana [35, 32].

#### 3.4.2.1. ¿Qué es una lógica paraconsistente?

Para comprender la historia de las lógicas paraconsistentes conviene definir qué es una *lógica paraconsistente*. Al revisar la literatura es posible darse cuenta de que, como bien lo señala [6], se encuentran usualmente tres caracterizaciones diferentes de este concepto.

Nuestra primera definición, y una de las dos más usuales en la literatura<sup>41</sup>, es la que involucra *inconsistencia* y *trivialidad*:

**Definición 3.21** ([6]). Una teoría  $T$  es *inconsistente* si existe una  $x$  tal que  $T \vdash x$  y  $T \vdash \neg x$ .<sup>42</sup>

**Definición 3.22** ([6]). Una teoría  $T$  es *trivial* si para toda  $x$ ,  $T \vdash x$ .

**Definición 3.23** ([6]). Una teoría es *paraconsistente* si es inconsistente y no trivial.

**Definición 3.24** ([6]). Una lógica es *paraconsistente* si es posible formular con ella teorías *paraconsistentes*.

Desde este punto de vista, a diferencia de la lógica clásica (y las intermedias) las lógicas paraconsistentes rechazan la equivalencia de inconsistencia con trivialidad [25]. La lógica clásica mezcla ambas cosas al asumir, junto con el carácter finitario de su relación de consecuencia, el principio de explosividad. Esto queda claro al analizar la relación de la primera definición con una segunda, que también es popular en la literatura<sup>43</sup> y a simple vista es muy similar a la anterior:

<sup>39</sup>Véase [32, 35].

<sup>40</sup>Véase [36, 6].

<sup>41</sup>Enunciada en formas menos directas que la presentada aquí (como en [8, 6, 25, 35, 37] entre otras obras).

<sup>42</sup>En esta sección de lógicas paraconsistentes hacemos un intento por utilizar de manera diferente las palabras *inconsistencia* y *contradicción*, considerando que la segunda es la pertenencia de dos opuestos contradictorios  $x$  y  $\neg x$  a una misma teoría  $T$ ; esto porque ambos conceptos no son, en definitiva, equivalentes en *cualquier* lógica.

<sup>43</sup>Véase [8, 6].

**Definición 3.25** ([8]). Una lógica es *paraconsistente* si no es explosiva, es decir que existen fórmulas  $x$ ,  $y$  y una teoría  $T$  tales que  $T \cup \{x, \neg x\} \not\vdash y$ <sup>44</sup>.

Las definiciones 3.24 y 3.25 no son en general equivalentes para cualquier lógica [6]. Para asegurar su equivalencia la relación de consecuencia de la lógica debe ser al menos reflexiva y transitiva<sup>45</sup> <sup>46</sup>. La reflexividad se usa para asegurar que la definición 3.25 implica a la definición 3.24<sup>47</sup>, mientras que con transitividad la definición 3.24 implica a la definición 3.25<sup>48</sup>.

La tercera definición parece no ser enunciada rigurosamente en la literatura<sup>49</sup>, sino más bien de manera informal o como una consecuencia de rechazar el principio de explosividad:

**Meta-principio de la (no) contradicción 3.26** ([6]). Una proposición y su negación no pueden ambas ser verdaderas<sup>50</sup>.

**Definición 3.27** ([6]). Una lógica es *paraconsistente* si rechaza el meta-principio de (no) contradicción.

Si consideramos una lógica con una relación de consecuencia definida mediante una matriz lógica<sup>51</sup>, es posible demostrar que la definición 3.27 y la definición 3.25 son equivalentes [6]<sup>52</sup>.

Lo primero que llama la atención en esta última definición es que, a diferencia de la versión original de [6], se dice *meta-principio* y no *principio*. Ya hemos mencionado algunos principios propios de la lógica clásica en la sección 3.3 y entre ellos se encuentra el principio de contradicción. Queremos entonces diferenciar entre ambas versiones. Cuando hablamos del *principio de contradicción*, nos estamos refiriendo a un teorema

<sup>44</sup>Versión general y opuesta al principio de explosividad presentado en la sección 3.3.

<sup>45</sup>Véase definición 2.52 en la página 24.

<sup>46</sup>En [6, p. 5] solamente se indica que para que la equivalencia sea válida en «una lógica dada», la relación de consecuencia debe ser transitiva. Ahí, la definición de lógica es como la nuestra y al parecer no se apela a ninguna otra propiedad especial de la relación de consecuencia. En nuestra opinión la transitividad por sí sola no es suficiente para la validez de esta equivalencia en *cualquier* lógica.

<sup>47</sup>Se asume que  $T \cup \{x, \neg x\} \not\vdash y$ . Si se dice que  $S = T \cup \{x, \neg x\}$ , nuestra asunción pasa a ser  $S \not\vdash y$ . Luego, evidentemente  $S$  no es trivial y, por reflexividad,  $S$  es inconsistente.

<sup>48</sup>La demostración se hace por contradicción. Se asume que la relación de consecuencia es transitiva, que  $\exists T (\exists x (T \not\vdash x), \exists y (T \vdash y, T \vdash \neg y))$  y que  $S \cup \{x, \neg x\} \vdash y$ . Por la segunda asunción,  $T$  es inconsistente. Luego, por transitividad y la tercera asunción (haciendo  $S = \emptyset$ ),  $T$  es trivial. Pero por la primera asunción,  $T$  no es trivial. Por lo tanto hemos llegado a una contradicción y se concluye que  $S \cup \{x, \neg x\} \not\vdash y$ .

<sup>49</sup>Como en [31].

<sup>50</sup>En el sentido de tener ambas un valor designado.

<sup>51</sup>Lo cual es equivalente a una relación de consecuencia abstracta (véase lema 3.12).

<sup>52</sup>Aunque la semántica de [6] no es estrictamente una matriz lógica, es posible expresar con ella una matriz lógica como ya se explicó en la subsección 3.2.1.



(una fórmula) de una cierta lógica, mientras que cuando nos referimos al *meta-principio de contradicción* estamos hablando de un teorema (que no se codifica como una fórmula) que trata sobre algún aspecto de cierta lógica. Más aún (y en estrecha conexión con las consideraciones de la subsección 3.1.1), creemos que se puede distinguir entre ambos si atendemos a la diferencia entre los significados que se aplican a los términos *verdad* y *negación* en el lenguaje proposicional de una lógica (desde el punto de vista de su definición semántica) y en el meta-lenguaje<sup>53</sup> que se usa para describirla (en particular el significado dado al enunciar el meta-principio de contradicción).<sup>54</sup>

Al parecer ha llegado a existir alguna confusión sobre qué se debe rechazar de acuerdo a la versión original de esta definición. Un ejemplo de ello es [35, p. 115], donde se argumenta a favor del rechazo del principio de contradicción en cierta lógica porque el objetivo es que la presencia de contradicciones no de lugar a la trivialización de las teorías<sup>55</sup>. La definición 3.27 no pide estrictamente rechazar el principio de contradicción en una lógica para que sea paraconsistente; solamente pide rechazar que, al usar un enfoque semántico para definir una lógica, para cualquier  $x$ , los valores de verdad asignados a  $x$  y  $\neg x$  no sean ambos designados. Tal vez la confusión se haya dado por el uso libre y sin mucha aclaración del sustantivo *principio de (no) contradicción* en la literatura, donde algunas veces se refiere al meta-principio y otras al principio (como por ejemplo en [31, p. 416] y [37, p. 498]). Más aún esta forma de usar el sustantivo puede haber sido motivada por el hecho de que en lógica clásica el meta-principio y el principio son equivalentes gracias a que sólo tiene dos valores de verdad y uno de ellos es designado.

En resumen, la equivalencia entre algunas definiciones es válida solamente para aquellas lógicas cuya relación de consecuencia cumple con ciertas propiedades. Las tres definiciones no son entonces, en general, equivalentes. Es por ello que [31], por ejemplo,

<sup>53</sup>Que puede ser el lenguaje natural utilizado para explicar *desde afuera* una lógica, como lo es la mayoría del lenguaje natural de este capítulo.

<sup>54</sup>En el caso de la palabra *verdad*: (i) en el meta-lenguaje del meta-principio, es sinónimo de *valor designado* (como concluimos a partir de [6]), mientras que falsedad es *falta de valor designado*; (ii) en el lenguaje proposicional, *verdad*, *falsedad* y cualquier otro valor de verdad corresponden directamente a los nombres con que se describen los posibles valores de verdad que pueden tomar las proposiciones. En el caso del término *negación*: (i) en el meta-lenguaje del meta-principio, es como en lógica clásica en el sentido de que la negación de lo verdadero produce el valor falso y viceversa; (ii) en el lenguaje proposicional, la negación se define por la matriz lógica y su significado varía de lógica a lógica (de ahí entonces la nota al pie que se hace sobre la explicación del principio de contradicción en la sección 3.3).

<sup>55</sup>Y sin embargo existen otros motivos por los cuales rechazar  $\vdash \neg(x \wedge \neg x)$  en una lógica paraconsistente. En este caso la lógica es  $C_1$  (véase subsección 3.4.2.2) y tal vez la motivación sea como se entiende en [37], que no se desea que la negación de cualquier contradicción sea un teorema y/o se desea tener una lógica con un carácter tan clásico como sea posible.

pide distinguir entre el meta-principio de contradicción y el principio de explosividad<sup>56</sup>.

### 3.4.2.2. Historia

Desde el punto de vista de algunos autores, las lógicas paraconsistentes son algo relativamente nuevo y que no necesariamente depende o se origina de una motivación filosófica, sino tal vez de una práctica o matemática<sup>57</sup>, llamándole así al hecho de querer formular teorías que lidien con contradicciones pero eviten la trivialidad [35]. Tal es el caso de [32, 35]. Otros consideran que la paraconsistencia tiene orígenes que remontan a la antigua Grecia [31]. Más aún, el primer grupo de autores parece estar inconforme en general con el trabajo del segundo, como se aprecia en [35], entre otras referencias. En vista de ambas corrientes, aquí las sintetizamos muy brevemente para ofrecer un panorama más completo.

La lógica formal más antigua formulada son los silogismos de Aristóteles, que no son explosivos y donde incluso se considera que algunos silogismos con premisas inconsistentes o contradictorias son válidos. Parece ser hasta el s. XII que hace aparición el principio de explosividad, gracias al lógico francés William de Soissons. Y es en el s. XIX que la *negación booleana* fue promovida e incorporada a lo que hoy se conoce como *lógica clásica*. [31]

En [35] se postula que la historia de las lógicas paraconsistentes ha tenido cuatro etapas, todas ellas en el s. XX. En la primera, de 1910 a 1963 se encuentran trabajos como los de Łukasiewicz (1910, quien analizó el trabajo de Aristóteles en relación al principio de contradicción, encontrando que el argumento que lo sustenta no es sólido [35, 32]), Vasiliev (1910, que visualizó la creación de una lógica «imaginaria o no-Aristotélica» [35]) y finalmente Jaśkowski (1948, que creó el primer calculo proposicional paraconsistente<sup>58</sup> [35, 32], el cual debía cumplir con ciertos requisitos [38, 36]).

El siguiente periodo comprende de 1963 a 1976. En él las lógicas paraconsistentes son reconocidas como objeto de estudio sistemático [35]. De entre los trabajos más importantes está el de da Costa, quien sin conocimiento de los trabajos del periodo anterior se concentró en la formulación de un calculo proposicional paraconsistente (y su primero también [32]) que, entre otros requisitos<sup>59</sup>, tuviera las más características clásicas posibles y a partir del cual fuera fácil formular un cálculo de predicados [35, 37].

<sup>56</sup>Y, evidentemente, tampoco es en general equivalente el principio de contradicción al principio de no explosividad [6].

<sup>57</sup>Suponiendo que uno no está dispuesto considerar que las explicaciones prácticas o matemáticas pueden reducirse a un plano filosófico y ser llamadas *filosóficas*.

<sup>58</sup>Que estrictamente hablando no es el primero, pero sí el primero que se creó buscando lidiar con teorías paraconsistentes [35].

<sup>59</sup>La lista completa puede encontrarse en [37, 38].

Este cálculo proposicional fue  $C_1$  y la familia  $C_n$  (a la cual pertenece la lógica  $C_w$  que fue presentada en la definición 3.17). La primera aparición de este cálculo fue como un sistema formal en 1963 [35, 32]<sup>60</sup>.

La tercera etapa es de 1976 a 1991. Aquí, el filósofo Miró Quesada, motivado por da Costa, acuña el término *paraconsistente* (donde «para-» es «por un lado de», dando la idea de que esta lógica no es enemiga de la lógica clásica y tratando de suavizar la controversia que la envuelve) para referirse a esta familia de lógicas. Además, en los 80's surge un interés por ellas, especialmente en el campo de la inteligencia artificial. [35]

La etapa de 1991 al presente está caracterizada por la aceptación por parte de la comunidad matemática como un área de estudio y se crea una sección especial para ella en la revista *Mathematical Reviews*. [35]

### 3.4.2.3. Lógica paraconsistente de tres valores

Nuestra primera lógica paraconsistente, al parecer, es muy popular y se ha desarrollado de manera independiente en varios trabajos [36].

**Definición 3.28** ([8]). *Pac* (abreviación para *lógica paraconsistente de 3 valores*) es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas  $\Omega_{Pac}$  con todos los elementos de  $\Omega_{C_w}$  y los siguientes:

$$\begin{aligned} \alpha &\rightarrow \neg\neg\alpha \\ ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) &\rightarrow \alpha \\ (\neg\alpha \vee \neg\beta) &\leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \beta) \\ (\neg\alpha \wedge \neg\beta) &\leftrightarrow \neg(\alpha \vee \beta) \\ \neg(\alpha \rightarrow \beta) &\leftrightarrow (\alpha \wedge \neg\beta) \end{aligned}$$

**Definición 3.29** ([8]). La matriz lógica  $\mathcal{M}_{Pac}$  de *Pac* se define como:

1.  $\mathcal{U}_{Pac} = \{0, 1, 2\}$
2.  $\mathcal{V}_{Pac} = \{1, 2\}$
3. Siendo sus funciones elementales:

<sup>60</sup>En [37] se presenta como sistema formal y con un enfoque semántico, aunque en [32] se dice que la primera semántica para  $C_1$  aparece en [39].

$o_{\vee_{Pac}}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{u, v\}$
$o_{\wedge_{Pac}}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{u, v\}$

$u$	$o_{\neg_{Pac}}(u)$
0	2
1	1
2	0

$o_{\rightarrow_{Pac}}(u, v)$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	1	2
2	0	1	2

Al revisar la literatura es difícil saber quien la formuló por primera vez. Y por si fuera poco, a su popularidad no la acompaña su nombre: la manera de llamarle varía de trabajo en trabajo. En 1960, la lógica  $J_3$  fue estudiada por primera vez por SchÄ(ette [36]. Esta lógica es lo que se conoce como *extensión conservativa* de  $Pac$ , obtenida por la adición de un conectivo unario adicional [36, 38]. En [40] se estudia a  $Pac$  bajo el nombre de  $RM_3^2$ , donde se da un conjunto de axiomas diferente a los presentados aquí. Y en [36] se le da el nombre de  $A_1$ .

En [36, 40] se señala que  $Pac$  tiene el mismo poder expresivo que la lógica  $RM3^{61}$ , que es la variante trivaluada de la lógica  $RM$ . En [40] se demuestra que  $Pac$  es una lógica paraconsistente maximal respecto a la no explosividad. En [41] se clasifica a  $Pac$  como una *lógica trivaluada natural*, lo que básicamente significa que posee tres valores de verdad, el 0 y el 2 deben verse como los valores de verdad clásicos *falso* y *verdadero* y que su operación de negación se comporta como la negación clásica. El valor de verdad 1 indica la presencia de información *inconsistente* [41].

#### 3.4.2.4. Lógica $G'_3$

$G'_3$  es la segunda lógica paraconsistente de nuestro interés. Fue introducida por Osorio en el 2004, definiendo sus conectivos a partir de los de la lógica trivaluada de Łukasiewicz  $\mathbb{L}_3$  [9].

Esta lógica cuenta con tres conectivos *primitivos*, que son  $\rightarrow$ ,  $\wedge$  y  $\neg$ ; los demás conectivos son  $\vee$ ,  $\sim$ ,  $\leftrightarrow$  y  $\nabla$  [9].<sup>62</sup> El conectivo unario  $\nabla$  no es de interés en este trabajo. Se presenta el conectivo unario  $\sim$  con el objeto de enunciar la teoría formal de  $G'_3$ :

**Definición 3.30** ([9]). El operador unario  $\sim_{G'_3}$  está definido como:

$$\sim_{G'_3} x \stackrel{\text{def}}{=} \left( x \rightarrow_{G'_3} \left( \neg_{G'_3} x \wedge_{G'_3} \neg_{G'_3} \neg_{G'_3} x \right) \right)$$

**Definición 3.31** ([9]).  $G'_3$  es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas  $\Omega_{G'_3}$  con todos los elementos de  $\Omega_{C_w}$  y los siguientes:

<sup>61</sup>En particular, [36] muestra las identidades que permiten expresar una lógica en el lenguaje de la otra.

<sup>62</sup>Donde  $\leftrightarrow$  está definido como en la notación 2.32 en la página 20.

$$(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \leftrightarrow (\neg\neg\beta \rightarrow \neg\neg\alpha)$$

$$\neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\beta))$$

$$\neg\neg(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow (\neg\neg\alpha \wedge \neg\neg\beta)$$

$$((\beta \wedge \neg\beta) \wedge (\sim\sim\alpha \wedge \neg\alpha)) \rightarrow \alpha$$

**Definición 3.32** ([9]). La matriz lógica  $\mathcal{M}_{G'_3}$  de  $G'_3$  se define como:

1.  $\mathcal{U}_{G'_3} = \{0, 1, 2\}$
2.  $\mathcal{V}_{G'_3} = \{2\}$
3. Siendo sus funciones elementales:

$o_{\vee_{G'_3}}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{u, v\}$
$o_{\wedge_{G'_3}}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{u, v\}$

$u$	$o_{\neg_{G'_3}}(u)$
0	2
1	2
2	0

$o_{\rightarrow_{G'_3}}(u, v)$	0	1	2
0	2	2	2
1	0	2	2
2	0	1	2

Además de poderse expresar en el lenguaje de  $\mathbb{L}_3$ , en esta lógica se puede expresar tanto  $\mathbb{L}_3$  como  $G_3$  [9]. En el caso de  $G_3$ , los operadores  $\rightarrow$ ,  $\wedge$  y  $\vee$  son los mismos para ambas lógicas (como puede apreciarse en su matriz lógica), mientras que el operador  $\sim$  corresponde a su negación, es decir

$$\neg_{G_3}x = \sim_{G'_3}x$$

lo cual es el principal atractivo de  $G'_3$ , como veremos en breve [9].

### 3.4.2.5. Aplicaciones

De acuerdo a [25, 32], las lógicas paraconsistentes tienen una gama común de aplicaciones, como:

- *Sistemas expertos donde se combina la opinión de muchos expertos.* Es posible que al alimentar un sistema experto complejo, la información de diferentes fuentes tenga pequeñas contradicciones. Intentar volver consistente al sistema podría no ser práctico e incluso no deseable, sobre todo si toda la información proviene de

fuentes confiables. Al usar como lógica subyacente una lógica paraconsistente se evita la explosividad clásica que volvería al sistema inútil.

- *Modelar teorías que se sabe son inconsistentes.* El ejemplo clásico es la *teoría ingenua de conjuntos*. Con ello podrían estudiarse algunas paradojas que surgen en ellas, como la de *Russel* <sup>63</sup>.

En particular, *Pac* se encuentra relacionada con el trabajo de [11]. En [11] se propone de manera informal un modelo de recolección y procesamiento de datos donde las fuentes no están restringidas (a diferencia de los modelos anteriores) a proveer datos sobre proposiciones atómicas. El modelo es luego representado mediante una estructura matemática. Dicha estructura puede utilizarse para inducir una relación de consecuencia. Así, la relación de consecuencia de *Pac* es inducida por dicha estructura matemática cuando se asume que todas las fuentes proveen información sobre todas las fórmulas atómicas.

En el caso de  $G'_3$ , al poder expresar la lógica  $G_3$ , puede expresarse la semántica no monótona de modelos estables (como se mencionó en la sección de lógicas intermedias) [9]. De acuerdo a [9], gracias a un teorema presentado en [42] (que es una generalización del resultado presentado en [10] para lógica intuicionista), es posible caracterizar semánticas no monótonas usando lógicas monótonas; si se usa  $G'_3$ , en adición a la semántica de modelos estables puede obtenerse la semántica no monótona GNM-S5. En ese mismo trabajo se plantea como problema abierto la posibilidad de utilizar  $G'_3$  (y cualquier lógica paraconsistente) para crear semánticas no monótonas que pueda lidiar con programas inconsistentes.

### 3.5. Comparación de las lógicas

Concluimos este capítulo comparando las lógicas presentadas de acuerdo a la definición 2.66 de la página 27. Esto no sin antes definir rigurosamente a la lógica clásica:

**Definición 3.33** ([8]). *Cl* (*lógica clásica*) es la lógica cuya teoría formal tiene el conjunto de axiomas  $\Omega_{Cl}$ , que puede definirse de varias formas:

1. Con todos los elementos de  $\Omega_{Int}$  y  $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ .
2. Con todos los elementos de  $\Omega_{Pac}$  y  $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ .

---

<sup>63</sup>Véase [13].

En [8] se estudian las relaciones de contención de los conjuntos de teoremas de las lógicas presentadas en este capítulo. Es de ahí de donde tomamos prestada la figura 3.1. En ella, la existencia de una flecha entre dos lógicas indica la inclusión del conjunto de teoremas, donde los teoremas de la lógica de la que parte la flecha son también teoremas de la lógica que señala; la ausencia de una flecha entre dos lógicas indica que no son comparables.

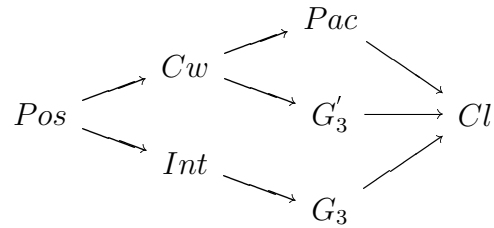


Figura 3.1: Contención de los conjuntos de teoremas [8].

Por el corolario 2.77 y las teorías formales presentadas en el capítulo, todas las flechas excepto las tres de la derecha son justificadas. Por el mismo lema y la definición de  $Cl$  es claro que  $Pac \leq_{\mathcal{T}} Cl$ . La flecha entre  $G_3$  y  $Cl$  se ha justificado en la subsección 3.4.1.2. Finalmente, es posible demostrar que todo axioma de  $G'_3$  es un teorema de  $Cl$ , y entonces por el lema 2.76 se justifica la flecha entre  $G'_3$  y  $Cl$ .