

Capítulo 2

Conceptos y convenciones generales

Las convenciones y definiciones presentadas en este capítulo son parte del contexto en el que se enmarcan los resultados de la investigación. El resto de dicho contexto se desarrollará en los siguientes capítulos paso a paso y a la par con la motivación de cada nuevo elemento.

El objetivo principal del capítulo es construir de manera gradual la definición de lógica asumida en este documento, enunciar sus características más importantes y tener una manera práctica de especificar lógicas. De esta forma, el clímax del capítulo se encuentra en las secciones 2.4, 2.5 y 2.6.

La exposición de los conceptos es bastante detallada y directa, y se asume una experiencia previa promedio en matemáticas en general y mínima en lógica matemática: se asume un conocimiento promedio en cálculo y solamente básico sobre teoría ingenua de conjuntos y matemáticas discretas. Estas características obedecen a dos razones principales que se desprenden de los objetivos del proyecto: (i) poner al alcance del estudiante de licenciatura en sistemas, matemáticas y áreas afines los resultados obtenidos, y (ii) aislar las condiciones suficientes que soportan los resultados obtenidos.

Se deja a consideración del lector experimentado el omitir en un inicio la lectura de este capítulo¹. La información presentada aquí puede ser consultada conforme la lectura de capítulos subsecuentes lo requiera.

2.1. Convenciones

Las siguientes son algunas indicaciones sobre como debe leerse e interpretarse el contenido de éste y otros capítulos.

¹Exceptuando la definición 2.63 en la página 27.

2.1.1. Títulos marcados con *

Aquellas secciones cuya información es verdaderamente introductoria o didáctica serán marcadas con un asterisco. Dichas secciones pueden ser omitidas sin riesgo por el lector experimentado.

2.1.2. Párrafos numerados

A lo largo de este documento se hace uso de párrafos que llevan un breve título (que describe su contenido) seguido de un número (que se usa con fines de referencia).

Sobre estos párrafos es importante señalar que no todos ellos son referenciados por otras partes del trabajo o son necesarios para comprenderlas. No obstante esto, se incluye dicha información para conservar la uniformidad del texto y/o por tener una fuerte relación con el tema tratado en esa parte del documento. En estos casos se usará un asterisco, entre paréntesis y después del título y número del párrafo, que permitirá distinguirlo de aquellos cuya información es necesaria en otras partes.

Además, cuando la información de un párrafo es tomada de, o está inspirada en alguna fuente, se colocará la cita en el mismo lugar que le corresponde a los asteriscos ya mencionados.

2.1.3. Uso de *si* y *sii*

Aunque en el área de las matemáticas existen ciertas convenciones *de facto* para interpretar el uso de las palabras *si* y *sii*, no está de más dejar bien clara la manera correcta de hacerlo.

En aquellas definiciones que hacen uso de la conjunción condicional *si* y siguen el esquema "un X es Y si Z ", debe entenderse que Z es una condición *necesaria y suficiente* para Y (es decir, que Y es equivalente a Z). En estos casos, es un ejercicio útil reemplazar la palabra *si* por la frase *si y sólo si*.

La convención anterior no aplica a las proposiciones que, sin importar si son parte de una definición o no, siguen el esquema "si X , entonces Y ", el cual claramente denota una proposición condicional.

Se utilizará la palabra *sii* como una abreviación para la frase *si y sólo si*. Entonces, las proposiciones que siguen el esquema " X *sii* Y " indican la equivalencia entre X y Y .

2.1.4. Uso de las relaciones $=$ y $\stackrel{\text{def}}{=}$

Siempre que dos elementos sintácticos estén relacionados por un signo $=$ o $\stackrel{\text{def}}{=}$, representan estrictamente hablando el mismo referente y por ello cualquiera de dichos elementos sintácticos puede ser reemplazado por el otro.

Aunque ambas relaciones tienen propiedades prácticamente iguales, existe una diferencia sutil. La relación $\stackrel{\text{def}}{=}$ es una notación especial que será utilizada exclusivamente para establecer definiciones; es decir, para indicar la asignación al símbolo de mano izquierda, del referente al cual representa el símbolo de mano derecha. En el caso de la relación $=$, ésta servirá para enunciar proposiciones en las que se afirma que ambos símbolos relacionados representan al mismo referente.

2.1.5. Subíndices

Se utilizan subíndices para denotar la parametrización o pertenencia del referente de un símbolo respecto a algún sistema o estructura matemática.² Sin embargo, podrá omitirse su uso siempre que no exista confusión acerca de respecto a qué se parametriza o a qué pertenece aquello representado por dicho símbolo.

En ocasiones la parametrización o pertenencia del referente de un símbolo Z respecto a algún sistema Y existe gracias a un objeto representado por un símbolo X_Y . En tales casos, en lugar de escribir Z_{X_Y} se usará Z_Y ³

2.1.6. Teoría de conjuntos

Por *teoría de conjuntos* debe entenderse *teoría ingenua de conjuntos*. El lector puede encontrar dicha teoría en [12].

Los símbolos definidos por la teoría de conjuntos serán usados sin ser necesario mencionar explícitamente sus propiedades. De cualquier forma, se ha hecho un esfuerzo por hacer lo más claro posible todo uso de la teoría de conjuntos.

2.2. *Conceptos elementales

Esta sección es un repaso breve de los conceptos más elementales que deben tenerse en mente.

²Ejemplo del primer caso es la definición 2.45 en la página 23; ejemplos del segundo se encuentran en la definición 2.63 en la página 27.

³Ejemplo de este caso es la definición 2.65 en la página 27.

2.2.1. *Conjuntos

Con respecto a teoría de conjuntos, se considera importante recordar las siguientes definiciones:

Definición 2.1 ([12]). El *conjunto potencia* $\wp(X)$ del conjunto X es el conjunto de todos los subconjuntos de X . Es decir:

$$\wp(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{Y \mid Y \subseteq X\}$$

Ejemplo 2.2. Si $X = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, entonces $\wp(X) = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}, \{\heartsuit, \spadesuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}\}$.

Definición 2.3 ([13]). Un conjunto es *numerable* si tiene la misma cardinalidad que algún subconjunto de los números naturales; es decir, si es finito o tiene la misma cardinalidad que el conjunto de los números naturales.

Definición 2.4 ([14]). El *producto cartesiano* $X_1 \times \dots \times X_n$ de los conjuntos X_1, \dots, X_n es el conjunto definido como:

$$X_1 \times \dots \times X_n \stackrel{\text{def}}{=} \{(o_1, \dots, o_n) \mid o_1 \in X_1, \dots, o_n \in X_n\}$$

cuyos elementos son llamados *tuplas* y cuya *aridad* es n

Ejemplo 2.5. Asumiendo que $X = \{\heartsuit, \clubsuit\}$ y $Y = \{\spadesuit\}$, se tiene $X \times Y = \{(\heartsuit, \spadesuit), (\clubsuit, \spadesuit)\}$.

Observación 2.6. En este trabajo se considera que el término *aridad* también puede ser aplicado a las tuplas de un producto cartesiano. Se dice, por ejemplo, que las tuplas de $X \times Y$ tienen aridad 2. Además, se considera correcto (y más usual) referirse a los productos cartesianos y a las tuplas de aridad 2 como *binarios*, a los de aridad 3 como *ternarios* y así sucesivamente.

Observación 2.7. Es posible la existencia de productos cartesianos y tuplas con aridad 1 e incluso aridad 0. Para los fines que conciernen a esta investigación es suficiente comprender el producto cartesiano de aridad igual o mayor a 2.

Notación 2.8. Se utilizará la notación X^n para indicar el producto cartesiano de X consigo n veces.

2.2.2. *Relaciones

El punto de partida para algunos conceptos que esperan más adelante en este documento es el denotar de una forma rigurosa algún tipo de conexión o asociación entre

los elementos de varios conjuntos (e incluso de uno mismo). Partiendo de la definición 2.4, la siguiente permite alcanzar tal objetivo:

Definición 2.9 ([14]). Una *relación* sobre los conjuntos X_1, \dots, X_n es un subconjunto de $X_1 \times \dots \times X_n$.

Ejemplo 2.10. Puede definirse la relación *padre* P sobre los conjuntos X, Y (cualesquiera que el lector se imagine) como

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle o_X, o_Y \rangle \in X \times Y \mid o_X \text{ es el padre de } o_Y \}$$

para denotar con cada $\langle o_1, o_2 \rangle \in P$ el hecho de que existe una conexión o asociación de paternidad entre o_1 y o_2 , siendo o_1 el padre.

Observación 2.11. El término *aridad*, al igual que en el caso de los productos cartesianos, puede describir tanto a una relación como a sus tuplas. Además, similar a la observación 2.6, puede calificarse a las relaciones y a sus tuplas como *binarias*, *ternarias*, etc. En el ejemplo 2.10 se habla, por ejemplo, de una relación binaria.

En el caso particular de que una relación sea entre elementos de un mismo conjunto, se usará la siguiente definición para enfatizarlo:

Definición 2.12 ([13]). Una *n-relación* (o *relación con n argumentos*) sobre un conjunto X es un subconjunto de X^n .

2.2.2.1. *Relaciones binarias

Las relaciones binarias merecen especial atención, pues es posible considerar a una función como un caso particular de una relación binaria (como se estudiará en la subsección 2.2.3). Aquí se presentan algunas definiciones importantes:

Definición 2.13 ([14]). Dada una relación binaria B , el *dominio* \mathcal{D}_B de B es el conjunto definido como:

$$\mathcal{D}_B = \{ o_1 \mid \langle o_1, o_2 \rangle \in B \}$$

Observación 2.14. Es fácil demostrar que: (i) si $B \subseteq X_1 \times X_2$, entonces se cumple para el dominio \mathcal{D}_B de B que $\mathcal{D}_B \subseteq X_1$; (ii) $B \subseteq X_1 \times X_2$ no implica (no es una condición suficiente para) que $\mathcal{D}_B \supseteq X_1$, donde \mathcal{D}_B es el dominio de B .

Definición 2.15 ([14]). Dada una relación binaria B , el *rango* \mathcal{R}_B de B es el conjunto definido como:

$$\mathcal{R}_B = \{ o_2 \mid \langle o_1, o_2 \rangle \in B \}$$

Observación 2.16. Es fácil demostrar que: (i) si $B \subseteq X_1 \times X_2$, entonces se cumple para el rango \mathcal{R}_B de B que $\mathcal{R}_B \subseteq X_2$; (ii) $B \subseteq X_1 \times X_2$ no implica que $\mathcal{R}_B \supseteq X_2$, donde \mathcal{R}_B es el rango de B .

El siguiente ejemplo ilustra las definiciones de dominio y rango:

Ejemplo 2.17. Sea la relación binaria $B = \{\langle \heartsuit, \spadesuit \rangle, \langle \clubsuit, \spadesuit \rangle\}$. Su dominio queda como $\mathcal{D}_B = \{\heartsuit, \clubsuit\}$ y su rango como $\mathcal{R}_B = \{\spadesuit\}$.

2.2.3. *Funciones

Tal vez uno de los conceptos más vistosos de las matemáticas es aquel de *función*. La idea intuitiva detrás de él⁴ es la de una regla, procedimiento o algoritmo que indica como asignar a cada objeto de un conjunto X un solo objeto de otro conjunto Y . [15]

Aquí se establecerá el concepto de *función* a partir de relaciones binarias y se enunciarán algunas observaciones y notaciones relevantes.

Definición 2.18 ([13]). Una relación binaria f es una *función* si $\langle o_1, o_2 \rangle \in f$ y $\langle o_1, o_3 \rangle \in f$ implica que $o_2 = o_3$.

Observación 2.19. Sea \mathcal{D}_f el dominio de una relación binaria f . Una forma equivalente a la definición anterior es: f es una función si para todo $o_1 \in \mathcal{D}_f$ existe una única o_2 tal que $\langle o_1, o_2 \rangle \in f$ [13]. Es decir, a todo elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango. Sin embargo, nótese que es perfectamente posible que exista un elemento del rango al que le correspondan dos elementos del dominio.

Notación 2.20. Ya que la definición 2.18 es equivalente a la observación 2.19, en adelante cada o_2 , para la cual existe alguna o_1 tal que $\langle o_1, o_2 \rangle \in f$, podrá ser denotada por $f(o_1)$. Además, si $o_1 = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ (i.e. o_1 es una tupla de aridad n), se usará la notación $f(v_1, \dots, v_n)$ en lugar de $f(\langle v_1, \dots, v_n \rangle)$. Finalmente, la notación $f(o_1) = o_2$ se considerará una forma equivalente a $\langle o_1, o_2 \rangle \in f$.

La notación siguiente proporciona una manera de introducir al lector nuevas funciones indicando al mismo tiempo algunas de sus características:

Notación 2.21. Se utilizará $f : X \rightarrow Y$ para abreviar que $f \subseteq X \times Y$, f es una función y X es el dominio de f . En esta notación, Y recibirá el nombre de *codominio* de f .

⁴De la que existen otras variantes que no serán estudiadas. El lector puede encontrar algunas de ellas en [15].

Observación 2.22. Nótese que, por la observación 2.16, el rango \mathcal{R}_f y el codominio Y de f siempre guardan una relación de contención tal que $\mathcal{R}_f \subseteq Y$. La razón de usar tal notación puede ser, entre otras, referirse a una función de la cual se tiene bien claro su dominio pero no su rango [15].

Ejemplo 2.23. Sea $+$ el operador aritmético usual, $X = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$, $Y = \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 12\}$. Si se dice que $f : X \rightarrow Y$, por la notación 2.21 se puede entender que:

1. f es una función.
2. $f \subseteq \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\} \times \{1, 3, 5, 6, 7, 9, 12\}$
3. $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$ es el dominio de f .

Y si además se dice que $f(v_1, v_2) = v_1 + v_2$, por los incisos anteriores y la notación 2.20, se puede deducir que:

1. $f = \{\langle \langle 1, 2 \rangle, 3 \rangle, \langle \langle 2, 3 \rangle, 5 \rangle, \langle \langle 3, 4 \rangle, 7 \rangle\}$

2.2.4. *Alfabeto, cadena y lenguaje

A continuación se presenta el fundamento de aquellos conceptos presentados en la sección 2.3. Las siguientes tres definiciones son bien conocidas en el área de teoría de autómatas y computabilidad:

Definición 2.24. Un *alfabeto* es un conjunto numerable.

Definición 2.25 ([16]). Una *cadena* es una secuencia de longitud finita de elementos de un alfabeto.

Definición 2.26. Un *lenguaje (formal)* es un conjunto de cadenas.

Ejemplo 2.27. Sea el alfabeto $A = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$. Ejemplos de cadenas son $\heartsuit\clubsuit\spadesuit$, $\heartsuit\clubsuit\spadesuit\heartsuit\clubsuit\spadesuit$ y ϵ (la cadena de longitud 0, que no debe confundirse con el símbolo de pertenencia usado en teoría de conjuntos). Un lenguaje sobre A puede ser $L = \{w \mid w \text{ tiene un número par de } \heartsuit\}$, donde, por ejemplo, $\heartsuit\clubsuit\spadesuit\heartsuit\clubsuit\spadesuit \in L$ y $\clubsuit\spadesuit \in L$.

2.3. Lenguaje proposicional, fórmulas y teorías

El alfabeto y el lenguaje proposicional asumidos en este trabajo se definen como:

Definición 2.28 ([17]). Σ es el alfabeto constituido por la unión de:

1. Un conjunto numerable Σ_a de elementos llamados *átomos*, que en adelante serán denotados por las letras α, β y γ .
2. El conjunto Σ_b de los conectores binarios *conjunción*, *disyunción* e *implicación*, denotados por \wedge, \vee y \rightarrow respectivamente.
3. El conjunto unitario Σ_u del conector unario *negación*, denotado por \neg .
4. El conjunto de los símbolos auxiliares de *apertura* y *cierre de paréntesis*, denotados por $($ y $)$.

Definición 2.29 ([17]). El *lenguaje proposicional* \mathcal{P} es el lenguaje cuyos elementos, llamados *fórmulas* y denotados por las letras a, x, y y z , se forman recursivamente⁵ a partir de los elementos de Σ de acuerdo a las siguientes reglas:

1. Si $\alpha \in \Sigma_a$, entonces $\alpha \in \mathcal{P}$.
2. Si $x, y \in \mathcal{P}$, entonces $(x \wedge y), (x \vee y), (x \rightarrow y) \in \mathcal{P}$.
3. Si $x \in \mathcal{P}$, entonces $\neg x \in \mathcal{P}$.

Observación 2.30. \mathcal{P} es simplemente un lenguaje cuyo nombre ha sido extendido para dar la idea de que sus elementos representan *proposiciones*⁶. Además, en adelante, cuando se hable de fórmulas deberá entenderse que se trata de elementos de \mathcal{P} , a menos que se indique lo contrario.

Observación 2.31. Nótese que el conector binario \rightarrow de la definición 2.29 tiene un significado distinto al de la flecha utilizada en la notación convenida para introducir funciones⁷.

Adicionalmente a las definiciones anteriores, algunas notaciones relacionadas con fórmulas que hay que tener en mente son:

Notación 2.32. Se utilizará $(x \leftrightarrow y)$ como una notación equivalente a $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$.

Notación 2.33. El uso de paréntesis es omitido en la escritura de algunas fórmulas. En tales casos se asume la precedencia usual de los conectivos; entonces $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ y \leftrightarrow deben ser procesados en ese mismo orden.

⁵Por *recursivamente* quiere decirse que sus elementos solamente se pueden obtener utilizando las reglas mencionadas. Como nota cultural, una manera rigurosa que se pudo usar para definir \mathcal{P} es a través de una *gramática libre de contexto*, concepto estudiado en el área de teoría de autómatas y computabilidad.

⁶Tema analizado en la sección 3.1.

⁷Véase notación 2.21 en la página 18.

Muchas veces será necesario referirse a conjuntos de fórmulas y es conveniente hacerlo de una manera práctica. Para ello la siguiente definición provee un nombre adecuado:

Definición 2.34. Una *teoría* es un subconjunto de \mathcal{P} .

Notación 2.35. Se utilizarán los símbolos R , S y T para representar cualquier teoría. De manera similar, los símbolos R' , S' y T' denotarán cualquier teoría *finita*.

Notación 2.36. Se utilizará $\bigwedge_{x \in T'} x$ como una notación equivalente a la conjunción $x_1 \dots \wedge x_n$ de los n elementos x_1, \dots, x_n de una teoría T' .

Es importante señalar que en matemáticas el uso de la palabra *teoría* puede tener significados diferentes pero relacionados. Por ejemplo, mientras que en la subsección 2.1.6 se mencionó *teoría de conjuntos* haciendo referencia a un cuerpo de conocimientos de un área de las matemáticas, la definición 2.34 habla del uso de *teoría* para referirse a un conjunto de fórmulas; si bien estas acepciones son diferentes, pudiera darse el caso de que un cuerpo de conocimientos (una teoría en el primer sentido) fuese codificado mediante un conjunto de fórmulas (una teoría en el segundo sentido). Dicha posibilidad no es un accidente y tiene una razón de ser, como veremos en el capítulo 3.

Una propiedad que será deseable que posean algunas teorías es aquella de ser *cerrada bajo sustitución*. Se ilustrará esta propiedad con las siguientes definiciones⁸:

Definición 2.37 ([18]). Una *sustitución atómica* es una función $\phi : \Sigma_a \rightarrow \mathcal{P}$, es decir una función que asocia a cada $\alpha \in \Sigma_a$ una única $\phi(\alpha) \in \mathcal{P}$, indicando así la fórmula $\phi(\alpha)$ que debe corresponder a cada ocurrencia del átomo α al aplicar una *sustitución*.

Definición 2.38 ([18]). Una *sustitución* es una función $\Phi_\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ tal que

$$\Phi_\phi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \phi(a) & \text{si } a \in \Sigma_a \\ (\Phi_\phi(x) \diamond \Phi_\phi(y)) & \text{si } \diamond \in \Sigma_b \text{ y } a = (x \diamond y) \\ \neg \Phi_\phi(x) & \text{si } a = \neg x \end{cases}$$

donde ϕ es una sustitución atómica.

Definición 2.39 ([18]). Una fórmula y es una *instancia de sustitución* de una fórmula x si existe una sustitución Φ_ϕ para la cual $\Phi_\phi(x) = y$.

Definición 2.40 ([8]). Una teoría T es *cerrada bajo sustitución* si cumple la condición

$$\forall x \in T, \Phi \text{ sustitución } (\Phi(x) \in T)$$

⁸En [18] se consideran versiones más generales de las definiciones, basándose en una definición de *lenguaje* más flexible, que permite hablar de sustituciones sin siquiera definir un lenguaje concreto.

es decir, para toda fórmula $x \in T$, cualquier y que sea instancia de sustitución de x también es elemento de la teoría.

A continuación se ilustra la cerradura de una teoría bajo sustitución:

Ejemplo 2.41. Asúmase que $\Sigma_a = \{\alpha, \beta\}$ (i.e. α y β no son variables sobre Σ_a , como en otras partes del documento) y sean $\alpha \in T$, $(\alpha \wedge \beta) \in T$, $\phi_1 = \{\langle \alpha, (\alpha \vee \beta) \rangle, \langle \beta, \beta \rangle\}$ y $\phi_2 = \{\langle \alpha, \beta \rangle, \langle \beta, (\alpha \vee \beta) \rangle\}$. Si se dice que T es cerrada bajo sustitución, entonces:

- Por ϕ_1 las siguientes fórmulas también son elementos de T : $(\alpha \vee \beta)$, $((\alpha \vee \beta) \wedge \beta)$ y $((\alpha \vee \beta) \vee \beta) \wedge \beta$.
- Por ϕ_2 las siguientes fórmulas también son elementos de T : β , $(\alpha \vee \beta)$, $(\beta \wedge (\alpha \vee \beta))$ y $((\alpha \vee \beta) \wedge (\beta \vee (\alpha \vee \beta)))$.

2.4. Relaciones y operadores de consecuencia

El siguiente concepto es fundamental para construir la definición de lógica asumida en este trabajo:

Definición 2.42 ([18]). Una *relación de consecuencia lógica* (o simplemente *relación de consecuencia*) \vdash definida sobre un lenguaje L es una relación binaria sobre los conjuntos $\wp(L), L$; es decir, $\vdash \subseteq \wp(L) \times L$.⁹

Convención 2.43. A menos que se indique lo contrario, en adelante toda relación de consecuencia \vdash debe asumirse definida sobre el lenguaje \mathcal{P} , es decir $\vdash \subseteq \wp(\mathcal{P}) \times \mathcal{P}$. Además, debe entenderse que todo lo enunciado respecto a relaciones de consecuencia usando las notaciones para fórmulas y teorías, también es aplicable a relaciones de consecuencia definidas sobre cualquier lenguaje.

Notación 2.44. Se utilizará la notación $T \vdash x$ para denotar que $\langle T, x \rangle \in \vdash$, la cual debe leerse como x es una consecuencia lógica de T . De manera análoga, $T \not\vdash x$ será utilizada para denotar que $\langle T, x \rangle \notin \vdash$, y debe leerse como x no es una consecuencia lógica de T . En caso de que $T = \emptyset$, se escribirá $\vdash x$ para denotar que $\emptyset \vdash x$ y se usará $\not\vdash x$ para indicar que $\emptyset \not\vdash x$.

Muchas veces será útil tener una forma de referirse al conjunto de todas aquellas fórmulas que son consecuencia lógica de cierta teoría. Esta es la motivación de la siguiente definición y la subsecuente convención:

⁹Véase definición 2.9 en la página 17.

Definición 2.45 ([18]). Sea \vdash una relación de consecuencia definida sobre un lenguaje L , $\Gamma \subseteq L$ y $w \in L$. Un *operador de consecuencia lógica* (o simplemente *operador de consecuencia*) Cn_{\vdash} es una función $Cn_{\vdash} : \wp(L) \rightarrow \wp(L)$ tal que:

$$Cn_{\vdash}(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \mid \Gamma \vdash w\}$$

Convención 2.46. De manera análoga a las relaciones de consecuencia, en adelante todo operador de consecuencia debe asumirse una función $Cn_{\vdash} : \wp(\mathcal{P}) \rightarrow \wp(\mathcal{P})$ tal que $Cn_{\vdash}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid T \vdash x\}$, y todo lo enunciado usando notaciones relacionadas con \mathcal{P} también es válido para operadores de consecuencia sobre cualquier lenguaje.

Observación 2.47. Es posible definir una relación de consecuencia a partir de un operador de consecuencia. Aquí solamente se necesitará comprender las definiciones presentadas, pero se deja al lector la libertad de ampliar más el tema en [18].

Notación 2.48. Por la definición 2.45 y teoría de conjuntos, es claro que

$$x \in Cn_{\vdash}(T) \text{ sii } T \vdash x$$

por lo tanto ambas notaciones podrán intercambiarse sin más requisito que apelar a esta equivalencia.

También será útil tener un nombre para las teorías que son cerradas bajo un operador de consecuencia lógica:

Definición 2.49. Una *cn-teoría* A es una teoría cerrada bajo un operador de consecuencia lógica; es decir $A = Cn(A)$.

Notación 2.50. En adelante se utilizará el símbolo A para denotar cn-teorías.

A continuación se ilustran los conceptos de relación de consecuencia, operador de consecuencia y cerradura bajo un operador de consecuencia:

Ejemplo 2.51. Sea una relación de consecuencia $\vdash = \{\{\{\alpha, \beta\}, \alpha\}, \{\{\alpha, \beta\}, \beta\}\}$ y sea $T = \{\alpha, \beta\}$. Entonces, $T \vdash \alpha$, $T \vdash \beta$ y $Cn_{\vdash}(T) = \{\alpha, \beta\}$. Y por lo anterior T es cerrado bajo el operador de consecuencia lógica Cn_{\vdash} .

En este trabajo son de interés las relaciones de consecuencia y los operadores de consecuencia que cumplen con ciertas propiedades. En las siguientes dos subsecciones se presentan tales propiedades junto con algunas de sus implicaciones.

2.4.1. Relaciones y operadores de consecuencia abstractos

Como primer conjunto de propiedades relevantes de las relaciones de consecuencia, se tiene que:

Definición 2.52 ([18]). Una relación de consecuencia es *abstracta* si satisface las siguientes propiedades:

$$\text{Si } x \in T, \text{ entonces } T \vdash x . \quad (2.1)$$

$$\text{Si } S \vdash x \text{ y } S \subseteq T, \text{ entonces } T \vdash x . \quad (2.2)$$

$$\text{Si } T \vdash x \text{ y para cada } y \in T, S \vdash y, \text{ entonces } S \vdash x . \quad (2.3)$$

Observación 2.53. Las propiedades anteriores son usualmente llamadas *reflexividad*, *monotonía* y *transitividad* (o *CUT*) respectivamente, como en [6, 9]¹⁰.

De forma similar, el mismo adjetivo puede aplicarse a los operadores de consecuencia:

Definición 2.54 ([18]). Un operador de consecuencia es *abstracto* si satisface las siguientes propiedades:

$$T \subseteq Cn(T) \quad (2.4)$$

$$Cn(Cn(T)) = Cn(T) \quad (2.5)$$

$$\text{Si } S \subseteq T, \text{ entonces } Cn(S) \subseteq Cn(T) . \quad (2.6)$$

Observación 2.55. Pese a que las dos definiciones anteriores se han enunciado siguiendo las convenciones 2.43 y 2.46, dichas definiciones y sus implicaciones son válidas para toda relación de consecuencia y todo operador de consecuencia definidos sobre un lenguaje cualquiera.

Algunos resultados importantes respecto a las dos definiciones anteriores son:

Lema 2.56. *Un operador de consecuencia Cn_{\vdash} es abstracto si y sólo si la relación de consecuencia \vdash utilizada para definirlo es abstracta.*

Demostración. La prueba se descompone en varias partes. A continuación se presenta la prueba de que *si \vdash es abstracta, entonces (2.4)*. Las demás pruebas quedan a disposición del lector en el apéndice C.

¹⁰Aunque en ambos se da una versión mas general de la propiedad de transitividad, es fácil demostrar que aquella versión general es equivalente a la conjunción de nuestra versión de monotonía y transitividad.

1. Se asume que \vdash es abstracta. Sea $x \in T$.
2. Para demostrar $T \subseteq Cn(T)$ es suficiente demostrar que $x \in Cn(T)$.
3. Por (1) y (2.1), se tiene que $T \vdash x$.
4. Por (3) y notación 2.48, se demuestra (2).

□

Proposición 2.57. *Se puede demostrar que dada una relación de consecuencia abstracta:*

1. Por (2.4), (2.5), (2.6) y teoría de conjuntos,

$$S \subseteq Cn(T) \text{ sii } Cn(S) \subseteq Cn(T) \quad (2.7)$$

2. Por (2.2), notación 2.48 y teoría de conjuntos,

$$Cn(S \cup T) \supseteq Cn(S) \cup Cn(T) \quad (2.8)$$

3. Por (2.8), (2.4) y teoría de conjuntos,

$$Cn(S \cup T) \supseteq Cn(S) \cup T \quad (2.9)$$

4. Por (2.7), (2.9), (2.4), (2.6) y teoría de conjuntos,

$$Cn(S \cup T) = Cn(Cn(S) \cup T) \quad (2.10)$$

5. Por notación 2.48, (2.7) y teoría de conjuntos,

$$\text{Si } \{y\} \vdash x \text{ y } \{x\} \vdash y, \text{ entonces } Cn(\{y\}) = Cn(\{x\}) . \quad (2.11)$$

6. Por (2.1), notación 2.48, (2.6), (2.7) y teoría de conjuntos,

$$\text{Si } \{y\} \vdash x, \text{ entonces } Cn(\{x, y\}) = Cn(\{y\}) . \quad (2.12)$$

Demostración. A continuación se muestra la prueba para (2.9). Las demostraciones de los demás incisos pueden encontrarse en el apéndice C.

1. Por (2.8), se tiene que $Cn(S \cup T) \supseteq Cn(S) \cup Cn(T)$.
2. Por (2.4), se tiene que $Cn(T) \supseteq T$.
3. Por (2) y teoría de conjuntos $Cn(S) \cup Cn(T) \supseteq Cn(S) \cup T$.
4. Por (1), (3) y teoría de conjuntos, se demuestra que $Cn(S \cup T) \supseteq Cn(S) \cup T$.

□

2.4.2. Relaciones y operadores de consecuencia finitarios

Otra propiedad que puede ser adicionada a las de una relación de consecuencia abstracta es:

Definición 2.58 ([18]). Una relación de consecuencia es *finitaria* si además de ser abstracta satisface la siguiente propiedad:

Si $T \vdash x$, entonces existe una teoría finita $T' \subseteq T$ tal que $T' \vdash x$.

Observación 2.59. La propiedad anterior es usualmente conocida como *compactez*, como en [19, 5].

Una vez más, es posible aplicar el mismo adjetivo de forma similar a un operador de consecuencia:

Definición 2.60 (*[18]). Un operador de consecuencia es *finitario* si además de ser abstracto satisface la siguiente propiedad:

$$Cn(T) = \bigcup \{Cn(T') \mid T' \subseteq T, T' \text{ es finita}\}$$

Observación 2.61. De manera análoga a la observación 2.55, las dos definiciones anteriores y el siguiente resultado son válidos para toda relación y operador de consecuencia sobre cualquier lenguaje.

Lema 2.62 ([18]). *Un operador de consecuencia Cn_{\vdash} es finitario si y sólo si la relación de consecuencia \vdash utilizada para definirlo es finitaria.*

Demostración. A continuación se presenta un esquema de prueba y se omite una demostración detallada. Sea \vdash una relación de consecuencia y Cn_{\vdash} el operador de consecuencia

definido a partir de \vdash . Por definición 2.58 y (2.8) se puede demostrar que *si \vdash es finitaria, entonces Cn_{\vdash} es finitario*. Por definición 2.60, (2.4) y (2.10) se puede demostrar que *si Cn_{\vdash} es finitario, entonces \vdash es finitaria*.

□

2.5. Lógica

La definición más importante a considerar a lo largo de este documento es la de *lógica*. Ella involucra a todos los conceptos definidos en este capítulo. La definición se presenta seguida de otros conceptos relacionados:

Definición 2.63 ([18]). Una *lógica* \mathcal{L} consiste de:

1. Un lenguaje $L_{\mathcal{L}}$.
2. Una relación de consecuencia lógica $\vdash_{\mathcal{L}}$ definida sobre $L_{\mathcal{L}}$, es decir $\vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \wp(L_{\mathcal{L}}) \times L_{\mathcal{L}}$.

Definición 2.64 ([18]). Una cadena $w \in L_{\mathcal{L}}$ es un *teorema* de una lógica \mathcal{L} si $\vdash_{\mathcal{L}} w$.¹¹

Definición 2.65 ([18]). El *conjunto de teoremas* $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ de una lógica \mathcal{L} se define como:¹²

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} Cn_{\mathcal{L}}(\emptyset)$$

En la subsección 5.2.2 se pretende comparar algunas lógicas respecto a la relación de contención existente entre sus conjuntos de teoremas. Para facilitar este ejercicio se conviene que:

Definición 2.66 ([8]). Una lógica \mathcal{L} es *más fuerte o igual* que una lógica \mathcal{L}' , también escrito como $\mathcal{L}' \leq_{\mathcal{T}} \mathcal{L}$, si $\mathcal{T}_{\mathcal{L}'} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Definición 2.67. Una lógica \mathcal{L} es *más fuerte* que una lógica \mathcal{L}' , también escrito como $\mathcal{L}' <_{\mathcal{T}} \mathcal{L}$, si $\mathcal{T}_{\mathcal{L}'} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$.

Finalmente, se hace la siguiente:

Convención 2.68. En adelante, se asume para toda lógica que:

1. $L_{\mathcal{L}} = \mathcal{P}$

¹¹Donde, por la convención 2.43, $\vdash_{\mathcal{L}} w$ tiene un significado análogo al descrito en la notación 2.44 en la página 22.

¹²Recuérdese la definición de operador de consecuencia (definición 2.45 en la página 23) y la convención hecha sobre subíndices (subsección 2.1.5).

$$2. \vdash_{\mathcal{L}} \subseteq \wp(\mathcal{P}) \times \mathcal{P}$$

Ejemplo 2.69. Sean \mathcal{L} y \mathcal{L}' dos lógicas cuyas relaciones de consecuencia son:

$$\vdash_{\mathcal{L}} = \{ \langle \{\alpha\}, \alpha \rangle, \langle \{\alpha, \beta\}, \beta \rangle, \langle \emptyset, \alpha \rangle, \langle \emptyset, \beta \rangle \}$$

$$\vdash_{\mathcal{L}'} = \{ \langle \{\alpha, \beta\}, \alpha \rangle, \langle \{\alpha\}, \beta \rangle, \langle \emptyset, \alpha \rangle \}$$

Claramente, $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \{\alpha, \beta\}$ y $\mathcal{T}_{\mathcal{L}'} = \{\alpha\}$. Entonces, $\mathcal{L}' \leq_{\mathcal{T}} \mathcal{L}$.

2.6. Teorías formales

Hasta ahora se han dado las nociones de relación de consecuencia y de lógica.¹³ En la sección anterior el lector habrá podido notar que, por la convención 2.68, para definir una lógica hace falta definir su relación de consecuencia. Es aquí donde entra en juego el concepto de *teoría formal* junto con otros, pues con ellos podrán definirse relaciones de consecuencia de una manera práctica.

Definición 2.70 ([17]). Una *teoría formal* \mathcal{F} consiste de:

1. Un alfabeto llamado el *conjunto de símbolos de* \mathcal{F} , abreviado como $Cs_{\mathcal{F}}$. A cada cadena de símbolos se le llamará una *expresión en* \mathcal{F} .
2. Un lenguaje de expresiones en \mathcal{F} llamado el *conjunto de fórmulas bien formadas de* \mathcal{F} , el cual se abrevia como $Cfbf_{\mathcal{F}}$. El sustantivo *fórmula bien formada* se abreviará como *fbf*.
3. Un subconjunto de $Cfbf_{\mathcal{F}}$ que recibe el nombre de *conjunto de axiomas de* \mathcal{F} y será denotado por $\Omega_{\mathcal{F}}$.
4. Un conjunto finito $Cri_{\mathcal{F}} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ de n -relaciones sobre $Cfbf_{\mathcal{F}}$ ¹⁴, llamadas *reglas de inferencia*. Para toda $w \in Cfbf_{\mathcal{F}}$, si existen $f_1, \dots, f_m \in Cfbf_{\mathcal{F}}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\langle f_1, \dots, f_m, w \rangle \in X_j$, entonces w es una *consecuencia directa* de f_1, \dots, f_m a partir de X_j .

Definición 2.71 ([17]). Una *prueba* o *deducción* en una teoría formal \mathcal{F} de $w \in Cfbf_{\mathcal{F}}$ a partir de un conjunto de *premisas* $\Gamma \subseteq Cfbf_{\mathcal{F}}$ es una sucesión finita f_1, \dots, f_n , donde $f_1, \dots, f_n \in Cfbf_{\mathcal{F}}$, tal que:

¹³Secciones 2.4 y 2.5 respectivamente.

¹⁴Véase definición 2.12 en la página 17.

1. $f_n = w$
2. Para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ se satisface: $f_j \in \Gamma$ ó $f_j \in \Omega_{\mathcal{F}}$ ó f_j es una consecuencia directa de algunas de las fbf 's anteriores en la sucesión a partir de alguna regla de inferencia de \mathcal{F} .

Definición 2.72 ([13]). Una $w \in Cfbf_{\mathcal{F}}$ es una *consecuencia* en la teoría formal \mathcal{F} del conjunto $\Gamma \subseteq Cfbf_{\mathcal{F}}$ si existe una prueba en \mathcal{F} de w a partir de Γ .

Observación 2.73. Partiendo de la definición 2.72, una relación de consecuencia $\vdash_{\mathcal{F}}$ sobre el lenguaje $Cfbf_{\mathcal{F}}$ puede definirse como

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} w \text{ sii } w \text{ es una consecuencia en } \mathcal{F} \text{ de } \Gamma.$$

donde $\vdash_{\mathcal{F}}$ se encuentra parametrizada respecto a la teoría formal \mathcal{F} y \mathcal{F} es referida como *la teoría formal de $\vdash_{\mathcal{F}}$* .

Lema 2.74. *Toda relación de consecuencia definida a partir de una teoría formal es finitaria.*

Demostración. Es necesario demostrar que cada inciso de la definición de relación de consecuencia finitaria (definición 2.58) se puede deducir al definir una relación de consecuencia de esta forma.¹⁵ Se omite una demostración completa y se presenta un esquema de prueba para el único inciso mostrado en la definición 2.58. Por la observación 2.73 y definición 2.72, para toda $w \in Cfbf_{\mathcal{F}}$ para la cual existe $\Gamma \subseteq Cfbf_{\mathcal{F}}$ tal que $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} w$, existe una prueba en \mathcal{F} de w a partir de Γ . Por la definición 2.71, dicha prueba tiene un número finito de pasos y por tanto existe un subconjunto finito Γ' de Γ tal que w es una consecuencia en \mathcal{F} de Γ' . Es decir, por la observación 2.73, existe un subconjunto finito Γ' de Γ tal que $\Gamma' \vdash_{\mathcal{F}} w$.

□

El definir relaciones de consecuencia mediante teorías formales resulta ser particularmente útil al momento de comparar las lógicas. Si la relación de consecuencia de una lógica se define de esta manera, se puede utilizar el lema 2.76 para compara lógicas de acuerdo a la definición 2.66.

Lema 2.75. *Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos teorías formales tales que $Cs_{\mathcal{F}} = Cs_{\mathcal{F}'}$, $Cfbf_{\mathcal{F}} = Cfbf_{\mathcal{F}'}$ y $Cri_{\mathcal{F}} = Cri_{\mathcal{F}'}$, sea $\Gamma \subseteq Cfbf_{\mathcal{F}}$ y sean $Cn_{\mathcal{F}}$ y $Cn_{\mathcal{F}'}$ los operadores de consecuencia*

¹⁵En [13] se enuncian algunas propiedades que se desprenden de la definición de *prueba* y que coinciden con la definición de relación de consecuencia finitaria.

definidos mediante \mathcal{F} y \mathcal{F}' respectivamente. Si $\Omega_{\mathcal{F}} = \emptyset$ y $\Omega_{\mathcal{F}'} = \Gamma$, entonces $Cn_{\mathcal{F}}(\Gamma) = Cn_{\mathcal{F}'}(\emptyset)$.

Demostración. La igualdad de ambos conjuntos es evidente dada la definición 2.71. □

Lema 2.76. Sean \mathcal{F} y \mathcal{F}' dos teorías formales tales que $Cs_{\mathcal{F}} = Cs_{\mathcal{F}'}$, $Cfbf_{\mathcal{F}} = Cfbf_{\mathcal{F}'}$ y $Cri_{\mathcal{F}} = Cri_{\mathcal{F}'}$, y sean \mathcal{L} y \mathcal{L}' dos lógicas cuyas relaciones de consecuencia se han definido mediante \mathcal{F} y \mathcal{F}' respectivamente. Si $\Omega_{\mathcal{F}'} \subseteq Cn_{\mathcal{F}}(\emptyset)$, entonces $\mathcal{L}' \leq_{\mathcal{T}} \mathcal{L}$.

Demostración. Sea \mathcal{F}'' la teoría formal tal que $Cs_{\mathcal{F}''} = Cs_{\mathcal{F}}$, $Cfbf_{\mathcal{F}''} = Cfbf_{\mathcal{F}}$, $Cri_{\mathcal{F}''} = Cri_{\mathcal{F}}$ y $\Omega_{\mathcal{F}''} = \emptyset$. Si $\Omega_{\mathcal{F}'} \subseteq Cn_{\mathcal{F}}(\emptyset)$, entonces por el lema 2.75 se tiene que $\Omega_{\mathcal{F}'} \subseteq Cn_{\mathcal{F}''}(\Omega_{\mathcal{F}})$. Luego por (2.7) se tiene que $Cn_{\mathcal{F}''}(\Omega_{\mathcal{F}'}) \subseteq Cn_{\mathcal{F}''}(\Omega_{\mathcal{F}})$. De nuevo por el lema 2.75, se tiene que $Cn_{\mathcal{F}'}(\emptyset) \subseteq Cn_{\mathcal{F}}(\emptyset)$. Finalmente por definición 2.66, $\mathcal{L}' \leq_{\mathcal{T}} \mathcal{L}$. □

Corolario 2.77. Sean las mismas dos lógicas que se han definido en el lema 2.76. Si $\Omega_{\mathcal{F}'} \subseteq \Omega_{\mathcal{F}}$, entonces $\mathcal{L}' \leq_{\mathcal{T}} \mathcal{L}$.

Demostración. Se sigue de (2.4), el lema 2.76 y teoría de conjuntos. □

El enunciar de manera breve teorías formales y tener consistencia con las convenciones hechas para *relación de consecuencia y lógica* es la motivación para la siguiente:

Convención 2.78. En adelante, se asume que para toda teoría formal se cumple que:

1. $Cs_{\mathcal{F}} = \Sigma$
2. $Cfbf_{\mathcal{F}} = \mathcal{P}$
3. El conjunto $\Omega_{\mathcal{F}}$ es cerrado bajo sustitución¹⁶.
4. *Modus ponens* es la única regla de inferencia.

Definición 2.79 ([17]). *Modus ponens* o *M.P.* es la n-relación sobre \mathcal{P} definida como:

$$M.P. \stackrel{\text{def}}{=} \{ \langle x, y, z \rangle \in \mathcal{P}^3 \mid y = x \rightarrow z \}$$

Ejemplo 2.80. Sea \mathcal{F} una teoría formal, $\vdash_{\mathcal{F}}$ una relación de consecuencia definida a partir de \mathcal{F} y $T = \{y \rightarrow z, x \rightarrow y, x\}$. Es claro que $T \vdash_{\mathcal{F}} z$, es decir que z es una consecuencia en \mathcal{F} de T . Esto porque existe una prueba en \mathcal{F} de z a partir de T :

¹⁶Véase definición 2.40 en la página 21.

1. x	Premisa
2. $x \rightarrow y$	Premisa
3. y	M.P. (1) y (2)
4. $y \rightarrow z$	Premisa
5. z	M.P. (3) y (4)

Como consecuencia de adoptar *modus ponens* como regla de inferencia, se desprenden los siguientes dos lemas:

Lema 2.81. *Sea $\vdash_{\mathcal{F}}$ una relación de consecuencia definida mediante una teoría formal \mathcal{F} que cuenta con modus ponens como regla de inferencia. Si $\vdash_{\mathcal{F}} x \rightarrow y$, entonces $x \vdash_{\mathcal{F}} y$.*

Demostración. Evidente a partir de la definición 2.71. □

Observación 2.82. El converso del lema 2.81 no es válido para toda relación de consecuencia definida a partir de una teoría formal. Tómese por ejemplo la teoría formal \mathcal{F} cuyo conjunto de axiomas $\Omega_{\mathcal{F}}$ contiene solamente los esquemas de axioma $\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ y $\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$, junto con todas sus instancias de sustitución¹⁷. Es evidente que $x \wedge y \vdash x \vee y$, pero $\nvdash x \wedge y \rightarrow x \vee y$.

Lema 2.83. *Sea $Cn_{\mathcal{F}}$ el operador de consecuencia definido a partir de una teoría formal \mathcal{F} que cuenta con modus ponens como regla de inferencia. Si $\vdash_{\mathcal{F}} y \rightarrow x$ y $\vdash_{\mathcal{F}} x \rightarrow y$, entonces $Cn_{\mathcal{F}}(\{y\}) = Cn_{\mathcal{F}}(\{x\})$.*

Demostración. Consecuencia directa de lema 2.81 y (2.11). □

2.7. Notación sobre lógicas

Para finalizar este capítulo es conveniente hacer una última convención. La notación siguiente es una excepción a la convención de la subsección 2.1.5; permite referirse de forma práctica a todo aquello que esté relacionado con cierta lógica:

¹⁷Véase definición 2.39 en la página 21.

Notación 2.84. La abreviación del nombre de cada lógica será colocada como subíndice de todo símbolo que esté relacionado con ella. Por ejemplo, cuando se hable de *lógica intuicionista*, por \mathcal{F}_{Int} , Ω_{Int} , \vdash_{Int} y Cn_{Int} deberá entenderse que se trata, respectivamente, de la teoría formal, el conjunto de axiomas de la teoría formal, la relación de consecuencia y el operador de consecuencia de la lógica intuicionista.