# Apéndice C

# Demostraciones misceláneas

Este apéndice se dedicada a la presentación de demostraciones completas de algunas de las proposiciones enunciadas en el documento. Para comodidad del lector, en las secciones se presentan las demostraciones, una por sección, enunciando primero lo que se desea probar y seguidamente enlistando los pasos que lo demuestran.

## C.1. Demostración de lema 2.56

**Lema** (2.56)**.**

La demostración se descompone en dos partes principales:

1. Si $\vdash$ es abstracta, entonces $Cn_{\vdash}$ es abstracto.
   - *a*) Si $\vdash$ es abstracta, entonces (2.4). Este inciso ha sido probado en la demostración del lema 2.56 en la página 24.
   - *b*) Si $\vdash$ es abstracta, entonces (2.5).
     1) Si $\vdash$ es abstracta, entonces $Cn\left(Cn\left(T\right)\right) \subseteq Cn\left(T\right)$.
        - $a'$ Se asume que $\vdash$ es abstracta. Sea $x \in Cn\left(Cn\left(T\right)\right)$.
        - $b'$ Por teoría de conjuntos, se desea demostrar que $x \in Cn\left(T\right)$.
        - $c'$ Por notación 2.48, $(1b1a)$ es equivalente a $Cn\left(T\right) \vdash x$.
        - $d'$ Por notación 2.48, para demostrar $(1b1b)$ es suficiente demostrar $T \vdash x$.
        - $e'$ Por notación 2.48, $\forall y \in Cn\left(T\right), T \vdash y$.
        - $f'$ Por $(1b1c)$, $(1b1e)$ y (2.3) se demuestra $(1b1d)$.
     2) Si $\vdash$ es abstracta, entonces $Cn\left(Cn\left(T\right)\right) \supseteq Cn\left(T\right)$.
        - $a'$ Se asume que $\vdash$ es abstracta. Sea $x \in Cn\left(T\right)$.
        - $b'$ Por teoría de conjuntos, se desea demostrar que $x \in Cn\left(Cn\left(T\right)\right)$.
        - $c'$ Por notación 2.48, $(1b2a)$ es equivalente a $T \vdash x$.

$d'$ Por notación 2.48, para demostrar $(1b2b)$ es suficiente demostrar $Cn(T) \vdash x$.

$e'$ Por (2.1), .

$f'$ Por (2.2), $(1b2c)$ y $(1b2e)$ se demuestra $(1b2d)$.

$c)$ Si $\vdash$ es abstracta, entonces (2.6).

1) Se asume que $\vdash$ es abstracta y que $S \subseteq T$.
2) Se desea probar que $Cn(S) \subseteq Cn(T)$.
3) Sea $x \in Cn(S)$.
4) Por el paso anterior, para demostrar $(1c2)$ es suficiente demostrar $x \in Cn(T)$.
5) Por notación 2.48 y $(1c3)$, $S \vdash x$.
6) Por $(1c1)$ y $(1c5)$, (2.2), $T \vdash x$.
7) Por notación 2.48 y $(1c6)$ se demuestra $(1c4)$.

2. Si $Cn_{\vdash}$ es abstracto, entonces $\vdash$ es abstracta.

$a)$ Si $Cn_{\vdash}$ es abstracto, entonces (2.1).

1) Se asume que $Cn_{\vdash}$ es abstracto. Sea $x \in T$.
2) Se desea demostrar que $T \vdash x$.
3) Para demostrar el paso anterior, por notación 2.48 es suficiente demostrar $x \in Cn(T)$.
4) Por $(2a1)$ y (2.4) se demuestra el paso anterior.

$b)$ Si $Cn_{\vdash}$ es abstracto, entonces (2.2).

1) Se asume que $Cn_{\vdash}$ es abstracto y además ambas proposiciones siguientes:

   $a'$ $S \vdash x$

   $b'$ $S \subseteq T$
2) Se desea demostrar que $T \vdash x$.
3) Por notación 2.48, $(2b1a)$ es equivalente a $x \in Cn(S)$.
4) Por notación 2.48, para demostrar $(2b2)$ es suficiente demostrar $x \in Cn(T)$.
5) Por $(2b1b)$ y (2.6), $Cn(S) \subseteq Cn(T)$.
6) Por $(2b3)$ y $(2b5)$ se demuestra $(2b4)$.

$c)$ Si $Cn_{\vdash}$ es abstracto, entonces (2.3).

1) Se asume que $Cn_{\vdash}$ es abstracto y además ambas proposiciones siguientes:

   $a'$ $T \vdash x$

   $b'$ $\forall y \in T\,(S \vdash y)$
2) Se desea demostrar que $S \vdash x$.
3) Por notación 2.48, $(2c1a)$ es equivalente a $x \in Cn(T)$.

4) Por notación 2.48, para demostrar $(2c2)$ es suficiente demostrar $x \in Cn\,(S)$.
5) Por notación 2.48, $(2c1b)$ es equivalente a $\forall y \in T\,(y \in Cn\,(S))$.
6) Por teoría de conjuntos, el paso anterior es equivalente a $T \subseteq Cn\,(S)$.
7) Por el paso anterior y (2.6), $Cn\,(T) \subseteq Cn\,(Cn\,(S))$.
8) Por el paso anterior y (2.5), $Cn\,(T) \subseteq Cn\,(S)$.
9) Por el paso anterior y $(2c3)$ se demuestra $(2c4)$.

□

## C.2. Demostración de (2.7)

(2.7)

La demostración se divide en dos partes.

1. Demostración de: *Si* $S \subseteq Cn\,(T)$*, entonces* $Cn\,(S) \subseteq Cn\,(T)$.

   *a*) Se asume que $S \subseteq Cn\,(T)$.
   *b*) Se desea demostrar que $Cn\,(S) \subseteq Cn\,(T)$.
   *c*) Por $(1a)$ y (2.7), se tiene que $Cn\,(S) \subseteq Cn\,(Cn\,(T))$.
   *d*) Por (2.5), se puede sustituir el LMD de $(1c)$ por $Cn\,(T)$ y $(1b)$ queda demostrado.

2. Demostración de: *Si* $Cn\,(S) \subseteq Cn\,(T)$*, entonces* $S \subseteq Cn\,(T)$.

   *a*) Se asume que $Cn\,(S) \subseteq Cn\,(T)$.
   *b*) Se desea demostrar que $S \subseteq Cn\,(T)$.
   *c*) Por (2.4), se tiene que $S \subseteq Cn\,(S)$.
   *d*) Por $(2a)$, $(2c)$ y teoría de conjuntos, se demuestra $(2b)$.

□

## C.3. Demostración de (2.8)

(2.8)

1. Por teoría de conjuntos, se tiene que $S \subseteq S \cup T$.

2. Por (2.4), se tiene que $S \cup T \subseteq Cn\,(S \cup T)$.

3. Por (1), (2) y teoría de conjuntos $S \subseteq Cn(S \cup T)$.
4. Por (3) y (2.7) $Cn(S) \subseteq Cn(S \cup T)$.
5. Siguiendo un razonamiento similar al desarrollado de (1) a (4), se tiene $Cn(T) \subseteq Cn(S \cup T)$.
6. Por (4), (5) y teoría de conjuntos, se demuestra que $Cn(S) \cup Cn(T) \subseteq Cn(S \cup T)$.

□

## C.4. Demostración de (2.10)

(2.10)

La demostración se divide en dos partes.

1. Demostración de: $Cn(S \cup T) \supseteq Cn(Cn(S) \cup T)$.
   a) Por (2.9), se tiene que $Cn(S \cup T) \supseteq Cn(S) \cup T$.
   b) Por (1$a$) y (2.7), se demuestra que $Cn(S \cup T) \supseteq Cn(Cn(S) \cup T)$.
2. Demostración de: $Cn(S \cup T) \subseteq Cn(Cn(S) \cup T)$.
   a) Por (2.4), se tiene que $S \subseteq Cn(S)$.
   b) Por (2$a$) y teoría de conjuntos $S \cup T \subseteq Cn(S) \cup T$.
   c) Por (2$b$) y (2.6), se demuestra que $Cn(S \cup T) \subseteq Cn(Cn(S) \cup T)$.

□

## C.5. Demostración de (2.11)

(2.11)

1. Se asumen ambas proposiciones siguientes:
   a) $\{x\} \vdash y$
   b) $\{y\} \vdash x$
2. Se desea demostrar que $Cn(\{y\}) = Cn(\{x\})$
3. Por notación 2.48, (1) es equivalente a:
   a) $y \in Cn(\{x\})$

   b) $x \in Cn(\{y\})$

4. Por (3) y teoría de conjuntos:
   a) $\{y\} \subseteq Cn(\{x\})$
   b) $\{x\} \subseteq Cn(\{y\})$

5. Por (4) y (2.7):
   a) $Cn(\{y\}) \subseteq Cn(\{x\})$
   b) $Cn(\{x\}) \subseteq Cn(\{y\})$

6. Por (5) y teoría de conjuntos, se demuestra (2).

□

## C.6. Demostración de (2.12)

(2.12)

La demostración se divide en dos partes.

1. Demostración de: *Si* $\{y\} \vdash x$, *entonces* $Cn(\{x,y\}) \supseteq Cn(\{y\})$. Para ello, es suficiente demostrar que $Cn(\{x,y\}) \supseteq Cn(\{y\})$.
   a) Por teoría de conjuntos, se tiene que $\{x,y\} \supseteq \{y\}$.
   b) Por (1$a$) y (2.6), se demuestra que $Cn(\{x,y\}) \supseteq Cn(\{y\})$.

2. Demostración de: *Si* $\{y\} \vdash x$, *entonces* $Cn(\{x,y\}) \subseteq Cn(\{y\})$.
   a) Se asume que $\{y\} \vdash x$.
   b) Se desea demostrar que $Cn(\{x,y\}) \subseteq Cn(\{y\})$.
   c) Por (2.1), se tiene que $\{y\} \vdash y$.
   d) Por notación 2.48, (2$a$) y (2$c$) son equivalentes a:
      1) $x \in Cn(\{y\})$
      2) $y \in Cn(\{y\})$
   e) Por (2$d$) y teoría de conjuntos:
      1) $\{x\} \subseteq Cn(\{y\})$
      2) $\{y\} \subseteq Cn(\{y\})$
   f) Por (2$e$) y teoría de conjuntos, se tiene que $\{x,y\} \subseteq Cn(\{y\})$.
   g) Por (2$f$) y (2.7), se demuestra (2$b$).

□

## C.7. Demostración de lema 5.1

$$\text{Si } \{y\} \vdash x, \text{ entonces } A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup \{y\}\right) \tag{5.1}$$

1. Se asume que $\{y\} \vdash x$.
2. Se desea demostrar que $A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup \{y\}\right)$.
3. Por ($\dot{-}$5), se tiene que $A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup \{x\}\right)$.
4. Por (3) y teoría de conjuntos, $A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup \{x\}\right) \cup \{y\}$.
5. Por (4), (2.9) y teoría de conjuntos, $A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup \{x\} \cup \{y\}\right)$.
6. Por teoría de conjuntos, puede sustituirse parte del LMD de (5):
$$A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup \{x, y\}\right)$$
7. Por (2.10), puede sustituirse el LMD de (6):
$$A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup Cn\left(\{x, y\}\right)\right)$$
8. Por (1) y (2.12), puede sustituirse parte del LMD de (7):
$$A \subseteq Cn\left((A \dot{-} x) \cup Cn\left(\{y\}\right)\right)$$
9. Por (2.10), puede sustituirse el LMD de (8) y se demuestra (2).

$\square$

## C.8. Demostración de (5.4)

$$\text{Si } \neg y \notin A \dotplus x, \text{ entonces } x \rightarrow \neg y \notin A \dot{-} \neg x \tag{5.4}$$

1. Se asume que $\neg y \notin A \dotplus x$.
2. Se desea demostrar que $x \rightarrow \neg y \notin A \dot{-} \neg x$.
3. Por Levi y (1) se tiene que $\neg y \notin Cn\left(A \dot{-} \neg x \cup \{x\}\right)$.
4. Por notación 2.48, (3) puede reescribirse como $A \dot{-} \neg x \cup \{x\} \nvdash \neg y$.
5. Por (4) y el teorema de deducción (5.3) $A \dot{-} \neg x \nvdash x \rightarrow \neg y$.
6. Por notación 2.48, (5) puede reescribirse como $x \rightarrow \neg y \notin Cn\left(A \dot{-} \neg x\right)$.
7. Por (6), ($\dot{-}$1) y (2.5) se demuestra (2).

$\square$

## C.9. Demostración de (5.7)

(5.7)

1. Se asumen ambas proposiciones siguientes:
   *a*) $T \cup \{x\} \vdash a$
   *b*) $T \cup \{y\} \vdash a$
2. Se desea demostrar que $T \cup \{x \vee y\} \vdash a$.
3. Por (1) y el teorema de deducción (5.3), se tiene que:
   *a*) $T \vdash x \to a$
   *b*) $T \vdash y \to a$
4. Por (5.6) y convención 2.78,$\vdash (x \to a) \to ((y \to a) \to (x \vee y \to a))$.
5. Por (4), (2.2) y teoría de conjuntos, se tiene:
   $$T \vdash (x \to a) \to ((y \to a) \to (x \vee y \to a))$$
6. Por (3), (5) y dos aplicaciones de *modus ponens* (definición 2.79), $T \vdash x \vee y \to a$.
7. Por (6) y el teorema de deducción (5.3), se demuestra (2).

□

## C.10. Demostración de (5.8)

(5.8)

1. Se asumen las proposiciones siguientes:
   *a*) $T \cup \{x\} \vdash a$
   *b*) $T \cup \{y\} \vdash a$
   *c*) $(x \vee y) \in T$
2. Se desea demostrar que $T \vdash a$.
3. Por (1$a$), (1$b$) e introducción de disyunción en las premisas (5.7), se tiene que $T \cup \{x \vee y\} \vdash a$.
4. Por (1$c$) y teoría de conjuntos, $T = T \cup \{x \vee y\}$.
5. Por (3) y (4), se demuestra (2).

□

## C.11. Demostración de (5.13)

(5.13)

La demostración se divide en dos partes.

1. Demostración de: $Cn(T') \supseteq Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in T'} x\right\}\right)$.

   a) Por (2.7), es suficiente demostrar que:

   $$Cn(T') \supseteq \left\{\bigwedge_{x \in T'} x\right\}$$

   b) Por teoría de conjuntos, para demostrar $(1a)$ es suficiente demostrar que:

   $$\bigwedge_{x \in T'} x \in Cn(T')$$

   c) Por notación 2.48, para demostrar $(1b)$ es suficiente demostrar que:

   $$T' \vdash \bigwedge_{x \in T'} x$$

   d) Por notación 2.36, para demostrar $(1c)$ es suficiente demostrar que:

   $$\text{Si } x_1, \ldots, x_{|T'|} \in T' \text{ , entonces } T' \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge x_{|T'|} \ .$$

   e) Para demostrar $(1d)$ se presenta una prueba por inducción matemática de que:

   $$\forall i \in \{1, \ldots, |\, T' \,|\} \,(\text{ Si } x_1, \ldots, x_i \in T' \text{ , entonces } T' \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \ .)$$

      1) *Caso base*: Se asume que $x_1 \in T'$. Por (2.1), se tiene que $T' \vdash x_1$.
      2) *Paso inductivo*: Sea $k \in \{1, \ldots, i-1\}$. Se asume como hipótesis de inducción que:

      $$\forall k \in \{1, \ldots, i-1\} \,(\text{ Si } x_1, \ldots, x_k \in T' \text{ , entonces } T' \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \ .)$$

      Se asume que $x_1, \ldots, x_k, x_i \in T'$. Como en el caso base, por $x_i \in T$ y (2.1), se tiene que $T' \vdash x_i$. Además, por la hipótesis de inducción y $x_1, \ldots, x_k \in T'$, se tiene que $T' \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge x_k$. Por (5.12), convención 2.78 y (2.2), se tiene que $T' \vdash (x_1 \wedge \ldots \wedge x_k) \rightarrow (x_i \rightarrow (x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \wedge x_i))$. Así, aplicando dos veces *modus ponens* (definición 2.79) se concluye que $T' \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \wedge x_i$, que es equivalente a $T' \vdash x_1 \wedge \ldots \wedge x_i$.

2. Demostración de: $Cn(T') \subseteq Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in T'} x\right\}\right)$.

*a*) Por (2.7), es suficiente demostrar que:

$$T' \subseteq Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in T'} x\right\}\right)$$

*b*) Por teoría de conjuntos, para demostrar (2$a$) es suficiente demostrar que:

$$\forall x \in T'\left(x \in Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in T'} x\right\}\right)\right)$$

*c*) Por notación 2.48, para demostrar (2$b$) es suficiente demostrar que:

$$\forall x \in T'\left(\left\{\bigwedge_{x \in T'} x\right\} \vdash x\right)$$

*d*) Sean $x_1$, ..., $x_n$ los $n$ elementos de $T'$. Entonces para demostrar (2$c$) es suficiente demostrar que:

$$\forall x \in \{x_1 \wedge ... \wedge x_n\}\left(\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x\right)$$

*e*) Por (2.1), se tiene que:

$$\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x_1 \wedge ... \wedge x_n$$

*f*) Para demostrar (2$d$), existen tres casos:

1) Caso $x = x_1$:

$a'$ Por (5.9), se tiene que:

$$\vdash x_1 \wedge ... \wedge x_n \rightarrow x_1$$

$b'$ Por (2$f$1$a$) y (2.2), se tiene que:

$$\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x_1 \wedge ... \wedge x_n \rightarrow x_1$$

$c'$ Por (2$e$), (2$f$1$b$) y una aplicación de *modus ponens*:

$$\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x_1$$

$d'$ Y como $x = x_1$, se demuestra este caso.

2) Caso $x = x_n$:

$a'$ Por (5.10), se tiene que:

$$\vdash x_1 \wedge ... \wedge x_n \rightarrow x_n$$

$b'$ Se demuestra este caso aplicando un razonamiento similar al desarrollado de (2$f$1$b$) a (2$f$1$d$).

3) Caso $x \in \{x_2, ..., x_{n-1}\}$:

$a'$ Por (5.9), se tiene que:

$$\vdash x_1 \wedge ... \wedge x_n \rightarrow x_1 \wedge ... \wedge x$$

$b'$ Por $(2f3a)$ y (2.2), se tiene que:

$$\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x_1 \wedge ... \wedge x_n \rightarrow x_1 \wedge ... \wedge x$$

$c'$ Por $(2e)$, $(2f3b)$ y una aplicación de *modus ponens*:

$$\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x_1 \wedge ... \wedge x$$

$d'$ Por (5.10), se tiene que:

$$\vdash x_1 \wedge ... \wedge x \rightarrow x$$

$e'$ Por $(2f3d)$ y (2.2), se tiene que:

$$\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x_1 \wedge ... \wedge x \rightarrow x$$

$f'$ Por $(2f3c)$, $(2f3e)$ y una aplicación de *modus ponens,* se demuestra este caso:

$$\{x_1 \wedge ... \wedge x_n\} \vdash x$$

□

## C.12. Demostración de (5.14)

(5.14)

1. Por (2.10), se tiene que:

$$Cn\,(Cn\,(T \cup \{x\}) \cup \{y\}) = Cn\,(T \cup \{x\} \cup \{y\})$$

2. Por teoría de conjuntos, puede sustituirse parte del LMD de (1):

$$Cn\,(Cn\,(T \cup \{x\}) \cup \{y\}) = Cn\,(T \cup \{x, y\})$$

3. Por (2.10), puede sustituirse el LMD de (2):

$$Cn\,(Cn\,(T \cup \{x\}) \cup \{y\}) = Cn\,(T \cup Cn\,(\{x, y\}))$$

4. Por (5.13), puede sustituirse parte del LMD de (3):

$$Cn\,(Cn\,(T \cup \{x\}) \cup \{y\}) = Cn\,(T \cup Cn\,(\{x \wedge y\}))$$

5. Por (2.10), puede sustituirse el LMD de (4) y se demuestra que:

$$Cn\left(Cn\left(T \cup \{x\}\right) \cup \{y\}\right) = Cn\left(T \cup \{x \wedge y\}\right)$$

□

## C.13. Demostración de (5.17)

1. Sea:
$$a \in Cn\left(R \cup T\right) \cap Cn\left(S \cup T\right)$$

2. Por (1) y teoría de conjuntos, es suficiente demostrar que:

$$a \in Cn\left(\left(Cn\left(R\right) \cap Cn\left(S\right)\right) \cup T\right)$$

3. Por (1) y teoría de conjuntos, ambas proposiciones siguientes son verdaderas:

   *a)* $a \in Cn\left(R \cup T\right)$
   *b)* $a \in Cn\left(S \cup T\right)$

4. Por notación 2.48, (3) puede expresarse de manera equivalente como:

   *a)* $R \cup T \vdash a$
   *b)* $S \cup T \vdash a$

5. Por (4) teoría de conjuntos y definición 2.58, existen $R' \subseteq R$, $S' \subseteq S$ y $T' \subseteq T$ tales que ambas proposiciones siguientes son verdaderas:

   *a)* $R' \cup T' \vdash a$
   *b)* $S' \cup T' \vdash a$

6. Por (5), teoría de conjuntos y (2.2):

   *a)* $R' \cup T \vdash a$
   *b)* $S' \cup T \vdash a$

7. Por notación 2.48, (6) puede expresarse de manera equivalente como:

   *a)* $a \in Cn\left(R' \cup T\right)$
   *b)* $a \in Cn\left(S' \cup T\right)$

8. Por (7) y (2.10), se tiene que:

   *a)* $a \in Cn\left(Cn\left(R'\right) \cup T\right)$

*b*) $a \in Cn\left(Cn\left(S'\right) \cup T\right)$

9. Por (8) y (5.13):

*a*) $a \in Cn\left(Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in R'} x\right\}\right) \cup T\right)$

*b*) $a \in Cn\left(Cn\left(\left\{\bigwedge_{y \in S'} y\right\}\right) \cup T\right)$

10. Por (9) y (2.10):

*a*) $a \in Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in R'} x\right\} \cup T\right)$

*b*) $a \in Cn\left(\left\{\bigwedge_{y \in S'} y\right\} \cup T\right)$

11. Por notación 2.48, (10) puede expresarse de manera equivalente como:

*a*) $\left\{\bigwedge_{x \in R'} x\right\} \cup T \vdash a$

*b*) $\left\{\bigwedge_{y \in S'} y\right\} \cup T \vdash a$

12. Por (11) y (5.7), se tiene que:

$$\left\{\bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y\right\} \cup T \vdash a$$

13. Por (5.13) y teoría de conjuntos, ambas proposiciones siguientes son verdaderas:

*a*) $Cn\left(\left\{\bigwedge_{x \in R'} x\right\}\right) \subseteq Cn\left(R'\right)$

*b*) $Cn\left(\left\{\bigwedge_{y \in S'} y\right\}\right) \subseteq Cn\left(S'\right)$

14. Por (13) y (2.7):

*a*) $\left\{\bigwedge_{x \in R'} x\right\} \subseteq Cn\left(R'\right)$

*b*) $\left\{\bigwedge_{y \in S'} y\right\} \subseteq Cn\left(S'\right)$

15. Por (14) y teoría de conjuntos, se tiene que:

*a*) $\bigwedge_{x \in R'} x \in Cn\left(R'\right)$

b) $\bigwedge_{y \in S'} y \in Cn(S')$

16. Por notación 2.48, (15) puede expresarse de manera equivalente como:

    a) $R' \vdash \bigwedge_{x \in R'} x$

    b) $S' \vdash \bigwedge_{y \in S'} y$

17. Por (16), (2.3), (5.15) y (5.16), pueden demostrarse ambas proposiciones siguientes:

    a) $R' \vdash \bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y$

    b) $S' \vdash \bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y$

18. Por (17), (5) y (2.2), se tiene que:

    a) $R \vdash \bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y$

    b) $S \vdash \bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y$

19. Por notación 2.48, (18) puede expresarse de manera equivalente como:

    a) $\bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y \in Cn(R)$

    b) $\bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y \in Cn(S)$

20. Por (19) y teoría de conjuntos:

$$\bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y \in Cn(R) \cap Cn(S)$$

21. Por (20) y teoría de conjuntos:

$$\left\{ \bigwedge_{x \in R'} x \vee \bigwedge_{y \in S'} y \right\} \subseteq Cn(R) \cap Cn(S)$$

22. Por (12), (21), teoría de conjuntos y (2.2), se tiene que:

$$(Cn(R) \cap Cn(S)) \cup T \vdash a$$

23. Por (22) y notación 2.48, se demuestra (2):

$$a \in Cn((Cn(R) \cap Cn(S)) \cup T)$$

□

## C.14. Demostración de (5.20)

(5.20)

1. $x \wedge y$ — Premisa
2. $x \wedge y \rightarrow y$ — Esquema de axioma (5.18)
3. $y$ — M.P. (1) y (2)
4. $y \rightarrow \neg x \vee y$ — Esquema de axioma (5.19)
5. $\neg x \vee y$ — M.P. (3) y (4)

□

## C.15. Demostración de (5.21)

(5.21)

1. Por (2.7), es suficiente demostrar que:

$$A \cup \{x \wedge y\} \subseteq Cn\left((A \dot{-} (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right)$$

2. Por teoría de conjuntos, para probar (1) es suficiente probar ambas proposiciones siguientes:

   *a*) $A \subseteq Cn\left((A \dot{-} (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right)$
   *b*) $\{x \wedge y\} \subseteq Cn\left((A \dot{-} (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}\right)$

3. Por (5.20) y lema 5.1 se demuestra ($2a$).
4. Por teoría de conjuntos se tiene que $\{x \wedge y\} \subseteq \{x \wedge y\}$.
5. Por (4) y teoría de conjuntos $\{x \wedge y\} \subseteq (A \dot{-} (\neg x \vee y)) \cup \{x \wedge y\}$.
6. Por (5), (2.4) y teoría de conjuntos se demuestra ($2b$).

□

## C.16. Demostración de (5.24)

$$\vdash ((\neg x \vee \neg y) \to x) \to x \tag{5.24}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{(\neg x \vee \neg y) \to x\} \vdash x$.

1. $(x \to x) \to ((\neg x \to x) \to (x \vee \neg x \to x))$ — Esq. de ax. (5.6)
2. $x \to x$ — Teorema (5.5)
3. $(\neg x \to x) \to (x \vee \neg x \to x)$ — M.P. (1) y (2)
4. $((\neg x \vee \neg y) \to x) \to (\neg x \to ((\neg x \vee \neg y) \to x))$ — Esq. de ax. (5.1)
5. $(\neg x \vee \neg y) \to x$ — Premisa
6. $\neg x \to ((\neg x \vee \neg y) \to x)$ — M.P. (4) y (5)
7. $(\neg x \to (\neg x \vee \neg y \to x)) \to ((\neg x \to \neg x \vee \neg y) \to (\neg x \to x))$ — Esq. de ax. (5.2)
8. $(\neg x \to \neg x \vee \neg y) \to (\neg x \to x)$ — M.P. (6) y (7)
9. $\neg x \to \neg x \vee \neg y$ — Esq. de ax. (5.22)
10. $\neg x \to x$ — M.P. (8) y (9)
11. $x \vee \neg x \to x$ — M.P. (10) y (3)
12. $(x \vee \neg x \to x) \to ((\neg x \vee \neg y \to x) \to (x \vee \neg x \to x))$ — Esq. de ax. (5.1)
13. $(\neg x \vee \neg y \to x) \to (x \vee \neg x \to x)$ — M.P. (11) y (12)
14. $(x \vee \neg x) \to ((\neg x \vee \neg y \to x) \to (x \vee \neg x))$ — Esq. de ax. (5.1)
15. $x \vee \neg x$ — Esq. de ax. (5.23)
16. $(\neg x \vee \neg y \to x) \to (x \vee \neg x)$ — M.P. (15) y (14)
17. $((\neg x \vee \neg y \to x) \to (x \vee \neg x \to x)) \to (((\neg x \vee \neg y \to x) \to x \vee \neg x) \to ((\neg x \vee \neg y \to x) \to x))$
Esq. de ax. (5.2)
18. $((\neg x \vee \neg y \to x) \to x \vee \neg x) \to ((\neg x \vee \neg y \to x) \to x)$ — M.P. (13) y (17)
19. $(\neg x \vee \neg y \to x) \to x$ — M.P. (16) y (18)
20. $x$ — M.P. (5) y (19)

□

## C.17. Demostración de (5.25)

$$Si\, T \nvdash x \quad y \quad \vdash y \to x,\ entonces\, T \nvdash y \tag{5.25}$$

1. Es suficiente demostrar su forma contrapositiva $Si\, T \vdash y$, $entonces\, T \vdash x\ o\ \nvdash y \to x$.
2. Para demostrar lo anterior, se presenta una demostración por eliminación. Se asume entonces que:
   a) $T \vdash y$
   b) $\vdash y \to x$
3. Se desea demostrar que $T \vdash x$.
4. Por (2*b*) y monotonía (2.2), $T \vdash y \to x$.
5. Por (2*a*), el paso anterior y *modus ponens*, $T \vdash x$.

□

## C.18. Demostración de (5.26)

$$Si\, T \nvdash x,\ entonces\, T \cup \{\neg x \vee \neg y\} \nvdash x \tag{5.26}$$

1. Se asume que $T \nvdash x$.
2. Se desea demostrar que $T \cup \{\neg x \vee \neg y\} \nvdash x$.
3. Por (1), (5.24) y (5.25), se tiene que $T \nvdash \neg x \vee \neg y \to x$.
4. Por (3) y teorema de deducción (5.3), se demuestra (2).

□

## C.19. Demostración de (5.31)

$$\vdash \neg\left(\neg\left(x \wedge y\right) \wedge \neg x\right) \to \neg\neg x \tag{5.31}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{\neg\left(\neg\left(x \wedge y\right) \wedge \neg x\right)\} \vdash \neg\neg x$.

1. $\neg\left(\neg\left(x \wedge y\right) \wedge \neg x\right)$ — Premisa
2. $\neg\left(\neg\left(x \wedge y\right) \wedge \neg x\right) \to \left(\neg\neg\left(x \wedge y\right) \vee \neg\neg x\right)$ — Esq. de ax. (5.30)

3. $\neg\neg(x \wedge y) \vee \neg\neg x$ M.P. (1) y (2)
4. $\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow x \wedge y$ Esq. de ax. (5.28)
5. $x \wedge y \rightarrow x$ Esq. de ax. (5.9)
6. $(x \wedge y \rightarrow x) \rightarrow (\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow x))$ Esq. de ax. (5.1)
7. $\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow x)$ M.P. (5) y (6)
8. $(\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow (x \wedge y \rightarrow x)) \rightarrow ((\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow x))$ Esq. de ax. (5.2)
9. $(\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow x \wedge y) \rightarrow (\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow x)$ M.P. (7) y (8)
10. $\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow x$ M.P. (4) y (9)
11. $\neg\neg x \rightarrow x$ Esq. de ax. (5.28)
12. $(\neg\neg(x \wedge y) \rightarrow x) \rightarrow ((\neg\neg x \rightarrow x) \rightarrow (\neg\neg(x \wedge y) \vee \neg\neg x \rightarrow x))$ Esq. de ax. (5.6)
13. $(\neg\neg x \rightarrow x) \rightarrow (\neg\neg(x \wedge y) \vee \neg\neg x \rightarrow x)$ M.P. (10) y (12)
14. $\neg\neg(x \wedge y) \vee \neg\neg x \rightarrow x$ M.P. (11) y (13)
15. $x \rightarrow \neg\neg x$ Esq. de ax. (5.27)
16. $\neg\neg(x \wedge y) \vee \neg\neg x \rightarrow \neg\neg x$Partiendo de (14) y (15), mismo razonamiento que de (6) a (10)
17. $\neg\neg x$ M.P. (3) y (4)

□

## C.20. Demostración de (5.37)

$$A \dotplus (\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg x\}) \tag{5.37}$$

1. Por Levi: $A \dotplus (\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn(A \dot{-} \neg(\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) \cup \{\neg(x \wedge y) \wedge \neg x\})$
2. Por (5.33), (5.11), ($\dot{-}$6), parte del LMD del anterior se sustituye: $A \dotplus (\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg(x \wedge y) \wedge \neg x\})$
3. Por (2.10), el LMD del anterior se puede sustituir: $A \dotplus (\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn(A \dot{-} \neg\neg x \cup Cn(\{\neg(x \wedge y) \wedge \neg x\}))$
4. Por (5.36) y (5.11), parte del LMD del anterior se puede sustituir: $A \dotplus (\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn(A \dot{-} \neg\neg x \cup Cn(\{\neg x\}))$
5. Por (2.10), el LMD del anterior se puede sustituir: $A \dotplus (\neg(x \wedge y) \wedge \neg x) = Cn(A \dot{-} \neg\neg x \cup \{\neg x\})$

□

# C.21. Demostración de (5.39)

$$Si\ T \subseteq Cn\left(S \cup \{x\}\right)\ y\ T \subseteq Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right),\ entonces\ T \subseteq Cn\left(S\right) \tag{5.39}$$

1. Se asume que $T \subseteq Cn\left(S \cup \{x\}\right)$ y $T \subseteq Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right)$.
2. Se desea demostrar que $T \subseteq Cn\left(S\right)$.
3. Se asume que $T'$ es una teoría finita tal que $T' \subseteq T$.
4. Por (1) y (3): $T' \subseteq Cn\left(S \cup \{x\}\right)$ y $T' \subseteq Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right)$.
5. Por lo anterior y (2.7): $Cn\left(T'\right) \subseteq Cn\left(S \cup \{x\}\right)$ y $Cn\left(T'\right) \subseteq Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right)$.
6. Por lo anterior y (5.13): $Cn\left(\{\bigwedge_{x \in T'} x\}\right) \subseteq Cn\left(S \cup \{x\}\right)$ y $Cn\left(\{\bigwedge_{x \in T'} x\}\right) \subseteq Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right)$.
7. Por lo anterior y (2.7): $\{\bigwedge_{x \in T'} x\} \subseteq Cn\left(S \cup \{x\}\right)$ y $\{\bigwedge_{x \in T'} x\} \subseteq Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right)$.
8. Por lo anterior y teoría de conjuntos: $\bigwedge_{x \in T'} x \in Cn\left(S \cup \{x\}\right)$ y $\bigwedge_{x \in T'} x \in Cn\left(S \cup \{\neg x\}\right)$.
9. Por lo anterior y notación 2.48: $S \cup \{x\} \vdash \bigwedge_{x \in T'} x$ y $S \cup \{\neg x\} \vdash \bigwedge_{x \in T'} x$.
10. Por lo anterior y (5.7): $S \cup \{x \vee \neg x\} \vdash \bigwedge_{x \in T'} x$.
11. Por lo anterior y notación 2.48: $\bigwedge_{x \in T'} x \in Cn\left(S \cup \{x \vee \neg x\}\right)$.
12. Por (5.38) y (2.2): $S \vdash x \vee \neg x$.
13. Por lo anterior y notación 2.48: $x \vee \neg x \in Cn\left(S\right)$.
14. Por lo (11) y (2.10): $\bigwedge_{x \in T'} x \in Cn\left(Cn\left(S\right) \cup \{x \vee \neg x\}\right)$.
15. Por lo anterior, (13) y teoría de conjuntos: $\bigwedge_{x \in T'} x \in Cn\left(Cn\left(S\right)\right)$.
16. Por lo anterior y (2.5): $\bigwedge_{x \in T'} x \in Cn\left(S\right)$.
17. Por lo anterior y teoría de conjuntos: $\{\bigwedge_{x \in T'} x\} \subseteq Cn\left(S\right)$.
18. Por lo anterior y (2.7): $Cn\left(\{\bigwedge_{x \in T'} x\}\right) \subseteq Cn\left(S\right)$.
19. Por lo anterior y (5.13): $Cn\left(T'\right) \subseteq Cn\left(S\right)$.
20. Por definición 2.58 y (2.6), es posible asumir que $T'$ es tal que $Cn\left(T'\right) = Cn\left(T\right)$.
21. Por lo anterior y (19): $Cn\left(T\right) \subseteq Cn\left(S\right)$.
22. Por lo anterior y (2.7): $T \subseteq Cn\left(S\right)$.

$\square$

## C.22. Demostración de (5.48)

$$\vdash x \rightarrow \neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right) \tag{5.48}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{x\} \vdash \neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right)$.

1. $x$ — Premisa
2. $x \rightarrow \neg\neg x$ — Esq. de ax. (5.40)
3. $\neg\neg x$ — M.P. (1) y (2)
4. $\neg\neg x \rightarrow \neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \vee \neg\neg x$ — Esq. de ax. (5.42)
5. $\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \vee \neg\neg x$ — M.P. (3) y (4)
6. $\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \vee \neg\neg x \rightarrow \neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right)$ — Esq. de ax. (5.43)
7. $\neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right)$ — M.P. (5) y (6)

□

## C.23. Demostración de (5.49)

$$\vdash \neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right) \rightarrow x \tag{5.49}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{\neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right)\} \vdash x$.

1. $\neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right)$ — Premisa
2. $\neg\left(\left(\neg x \vee \neg y\right) \wedge \neg x\right) \rightarrow \neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \vee \neg\neg x$ — Esq. de ax. (5.44)
3. $\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \vee \neg\neg x$ — M.P. (1) y (2)
4. $\neg\neg x \wedge \neg\neg y \rightarrow \neg\neg x$ — Esq. de ax. (5.9)
5. $\left(\neg\neg x \wedge \neg\neg y \rightarrow \neg\neg x\right)$
   $\rightarrow \left(\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \left(\neg\neg x \wedge \neg\neg y \rightarrow \neg\neg x\right)\right)$ — Esq. de ax. (5.1)
6. $\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \left(\neg\neg x \wedge \neg\neg y \rightarrow \neg\neg x\right)$ — M.P. (4) y (5)
7. $\left(\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \left(\neg\neg x \wedge \neg\neg y \rightarrow \neg\neg x\right)\right)$
   $\rightarrow \left(\left(\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \neg\neg x \wedge \neg\neg y\right) \rightarrow \left(\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \neg\neg x\right)\right)$ — Esq. de ax. (5.2)
8. $\left(\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \neg\neg x \wedge \neg\neg y\right) \rightarrow \left(\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \neg\neg x\right)$ — M.P. (6) y (7)
9. $\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \neg\neg x \wedge \neg\neg y$ — Esq. de ax. (5.46)
10. $\neg\left(\neg x \vee \neg y\right) \rightarrow \neg\neg x$ — M.P. (9) y (8)

11. $\neg\neg x \to x$ Esq. de ax. (5.41)
12. $(\neg\neg x \to x) \to (\neg(\neg x \lor \neg y) \to (\neg\neg x \to x))$ Esq. de ax. (5.1)
13. $\neg(\neg x \lor \neg y) \to (\neg\neg x \to x)$ M.P. (11) y (12)
14. $(\neg(\neg x \lor \neg y) \to (\neg\neg x \to x))$
    $\to ((\neg(\neg x \lor \neg y) \to \neg\neg x) \to (\neg(\neg x \lor \neg y) \to x))$ Esq. de ax. (5.2)
15. $(\neg(\neg x \lor \neg y) \to \neg\neg x) \to (\neg(\neg x \lor \neg y) \to x)$ M.P. (13) y (14)
16. $\neg(\neg x \lor \neg y) \to x$ M.P. (10) y (15)
17. $(\neg(\neg x \lor \neg y) \to x)$
    $\to ((\neg\neg x \to x) \to (\neg(\neg x \lor \neg y) \lor \neg\neg x \to x))$ Esq. de ax. (5.6)
18. $(\neg\neg x \to x) \to (\neg(\neg x \lor \neg y) \lor \neg\neg x \to x)$ M.P. (16) y (17)
19. $\neg(\neg x \lor \neg y) \lor \neg\neg x \to x$ M.P. (11) y (18)
20. $x$ M.P. (3) y (19)

□

## C.24. Demostración de (5.52)

$$\vdash \neg(\neg x \lor \neg y) \to (x \land y) \tag{5.52}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{\neg(\neg x \lor \neg y)\} \vdash x \land y$.

1. $\neg(\neg x \lor \neg y)$ Premisa
2. $\neg(\neg x \lor \neg y) \to \neg\neg x \land \neg\neg y$ Esq. de ax. (5.46)
3. $\neg\neg x \land \neg\neg y$ M.P. (1) y (2)
4. $\neg\neg x \land \neg\neg y \to \neg\neg x$ Esq. de ax. (5.9)
5. $\neg\neg x$ M.P. (3) y (4)
6. $\neg\neg x \to x$ Esq. de ax. (5.41)
7. $x$ M.P. (5) y (6)
8. $\neg\neg x \land \neg\neg y \to \neg\neg y$ Esq. de ax. (5.10)
9. $\neg\neg y$ M.P. (3) y (8)
10. $\neg\neg y \to y$ Esq. de ax. (5.41)
11. $y$ M.P. (9) y (10)

12. $x \to (y \to x \land y)$ Esq. de ax. (5.12)
13. $y \to x \land y$ M.P. (7) y (12)
14. $x \land y$ M.P. (11) y (13)

$\square$

## C.25. Demostración de (5.53)

$$\vdash (x \land y) \to \neg(\neg x \lor \neg y) \tag{5.53}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{x \land y\} \vdash \neg(\neg x \lor \neg y)$.

1. $x \land y$ Premisa
2. $x \land y \to x$ Esq. de ax. 5.9
3. $x$ M.P. (1) y (2)
4. $x \to \neg\neg x$ Esq. de ax. 5.40
5. $\neg\neg x$ M.P. (3) y (4)
6. $x \land y \to y$ Esq. de ax. 5.10
7. $y$ M.P. (1) y (6)
8. $y \to \neg\neg y$ Esq. de ax. 5.40
9. $\neg\neg y$ M.P. (7) y (8)
10. $\neg\neg x \to (\neg\neg y \to (\neg\neg x \land \neg\neg y))$ Esq. de ax. 5.12
11. $\neg\neg y \to (\neg\neg x \land \neg\neg y)$ M.P. (5) y (10)
12. $\neg\neg x \land \neg\neg y$ M.P. (9) y (11)
13. $\neg\neg x \land \neg\neg y \to \neg(\neg x \lor \neg y)$ Esq. de ax. 5.44
14. $\neg(\neg x \lor \neg y)$ M.P. (12) y (13)

$\square$

## C.26. Demostración de (5.57)

$$\vdash \neg x \to \neg(x \wedge y) \tag{5.57}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{\neg x\} \vdash \neg(x \wedge y)$.

1. $\neg x$ — Premisa
2. $\neg x \to (x \wedge y \to \neg x)$ — Esq. de ax. (5.1)
3. $x \wedge y \to \neg x$ — M.P. (1) y (2)
4. $x \wedge y \to x$ — Esq. de ax. (5.9)
5. $(x \wedge y \to x) \to ((x \wedge y \to \neg x) \to \neg(x \wedge y))$ — Esq. de ax. (5.56)
6. $(x \wedge y \to \neg x) \to \neg(x \wedge y)$ — M.P. (4) y (5)
7. $\neg(x \wedge y)$ — M.P. (3) y (6)

□

## C.27. Demostración de (5.60)

$$\vdash \neg x \to \neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y) \tag{5.60}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{\neg x\} \vdash \neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)$.

1. $\neg x$ — Premisa
2. $\neg x \to \neg x \vee \neg y$ — Esq. de ax. (5.15)
3. $\neg x \vee \neg y$ — M.P. (1) y (2)
4. $\neg x \vee \neg y \to \neg(x \wedge y)$ — Teorema (5.59)
5. $\neg(x \wedge y)$ — M.P. (3) y (4)
6. $\neg x \to \neg x \vee y$ — Esq. de ax. (5.15)
7. $\neg x \vee y$ — M.P. (1) y (6)
8. $\neg(x \wedge y) \to (\neg x \vee y \to \neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y))$ — Esq. de ax. (5.14)
9. $\neg x \vee y \to \neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)$ — M.P. (5) y (8)
10. $\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)$ — M.P. (7) y (9)

□

## C.28. Demostración de (5.61)

$$\neg(x \wedge y) \to (x \to \neg y) \tag{5.61}$$

1. $(y \to x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y)$ Esq. de ax. (5.56)
2. $((y \to x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y))$
   $\to (x \to ((y \to x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y)))$ Esq. de ax. (5.1)
3. $x \to ((y \to x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y))$ M.P. (1) y (2)
4. $x \to (y \to x \wedge y)$ Esq. de ax. (5.12)
5. $(x \to ((y \to x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y)))$
   $\to ((x \to (y \to x \wedge y)) \to (x \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y)))$ Esq. de ax. (5.2)
6. $(x \to (y \to x \wedge y)) \to (x \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y))$ M.P. (3) y (5)
7. $x \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y)$ M.P. (4) y (6)
8. $(x \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to \neg y))$
   $\to ((x \to (y \to \neg(x \wedge y))) \to (x \to \neg y))$ Esq. de ax. (5.2)
9. $(x \to (y \to \neg(x \wedge y))) \to (x \to \neg y)$ M.P. (7) y (8)
10. $((x \to (y \to \neg(x \wedge y))) \to (x \to \neg y))$
    $\to (\neg(x \wedge y) \to ((x \to (y \to \neg(x \wedge y))) \to (x \to \neg y)))$ Esq. de ax. (5.1)
11. $\neg(x \wedge y) \to ((x \to (y \to \neg(x \wedge y))) \to (x \to \neg y))$ M.P. (9) y (10)
12. $(\neg(x \wedge y) \to ((x \to (y \to \neg(x \wedge y))) \to (x \to \neg y)))$
    $\to ((\neg(x \wedge y) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y)))) \to (\neg(x \wedge y) \to (x \to \neg y)))$
    Esq. de ax. (5.2)
13. $(\neg(x \wedge y) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y)))) \to (\neg(x \wedge y) \to (x \to \neg y))$ M.P. (11) y (12)
14. $(y \to \neg(x \wedge y)) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y)))$ Esq. de ax. (5.1)
15. $((y \to \neg(x \wedge y)) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y))))$
    $\to (\neg(x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y)))))$ Esq. de ax. (5.1)
16. $\neg(x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y))))$ M.P. (14) y (15)
17. $(\neg(x \wedge y) \to ((y \to \neg(x \wedge y)) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y)))))$
    $\to ((\neg(x \wedge y) \to (y \to \neg(x \wedge y))) \to (\neg(x \wedge y) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y)))))$ Esq. de ax. (5.2)
18. $(\neg(x \wedge y) \to (y \to \neg(x \wedge y)))$
    $\to (\neg(x \wedge y) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y))))$ M.P. (16) y (17)

19. $\neg(x \wedge y) \to (y \to \neg(x \wedge y))$ — Esq. de ax. (5.1)
20. $\neg(x \wedge y) \to (x \to (y \to \neg(x \wedge y)))$ — M.P. (19) y (18)
21. $\neg(x \wedge y) \to (x \to \neg y)$ — M.P. (20) y (13)

$\square$

## C.29. Demostración de (5.62)

$$\vdash \neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y) \to \neg x \tag{5.62}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)\} \vdash \neg x$.

1. $\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y)$ — Premisa
2. $\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y) \to \neg(x \wedge y)$ — Esquema de axioma (5.9)
3. $\neg(x \wedge y)$ — M.P. (1) y (2)
4. $\neg(x \wedge y) \to (x \to \neg y)$ — Teorema (5.61)
5. $x \to \neg y$ — M.P. (3) y (4)
6. $\neg(x \wedge y) \wedge (\neg x \vee y) \to (\neg x \vee y)$ — Esquema de axioma (5.10)
7. $\neg x \vee y$ — M.P. (1) y (6)
8. $\neg x \to (x \to y)$ — Esquema de axioma (5.55)
9. $y \to (x \to y)$ — Esquema de axioma (5.1)
10. $(\neg x \to (x \to y)) \to ((y \to (x \to y)) \to (\neg x \vee y \to (x \to y)))$ — Esquema de axioma (5.6)
11. $(y \to (x \to y)) \to (\neg x \vee y \to (x \to y))$ — M.P. (7) y (10)
12. $\neg x \vee y \to (x \to y)$ — M.P. (9) y (11)
13. $x \to y$ — M.P. (7) y (12)
14. $(x \to y) \to ((x \to \neg y) \to \neg x)$ — Esquema de axioma (5.56)
15. $(x \to \neg y) \to \neg x$ — M.P. (13) y (14)
16. $\neg x$ — M.P. (5) y (15)

$\square$

## C.30. Demostración de (5.71)

$$\vdash (\neg x \vee \neg y) \to (x \to \neg y) \tag{5.71}$$

1. $\neg x \to (x \to \neg y)$ Esq. de ax. (5.69)
2. $\neg y \to (x \to \neg y)$ Esq. de ax. (5.1)
3. $(\neg x \to (x \to \neg y)) \to ((\neg y \to (x \to \neg y)) \to (\neg x \vee \neg y \to (x \to \neg y)))$ Esq. de ax. (5.6)
4. $(\neg y \to (x \to \neg y)) \to (\neg x \vee \neg y \to (x \to \neg y))$ M.P. (1) y (3)
5. $\neg x \vee \neg y \to (x \to \neg y)$ M.P. (1) y (3)

□

## C.31. Demostración de (5.72)

$$\vdash \neg x \to (x \to \neg y) \wedge \neg x \tag{5.72}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{\neg x\} \vdash (x \to \neg y) \wedge \neg x$.

1. $\neg x$ Premisa
2. $\neg x \to \neg x \vee \neg y$ Esq. de ax. (5.68)
3. $\neg x \vee \neg y$ M.P. (1) y (2)
4. $\neg x \vee \neg y \to (x \to \neg y)$ Teorema (5.71)
5. $x \to \neg y$ M.P. (3) y (4)
6. $(x \to \neg y) \to (\neg x \to ((x \to \neg y) \wedge \neg x))$ Esq. de ax. (5.12)
7. $\neg x \to ((x \to \neg y) \wedge \neg x)$ M.P. (5) y (6)
8. $(x \to \neg y) \wedge \neg x$ M.P. (1) y (7)

□

## C.32. Demostración de (5.75)

$$\vdash (x \to \neg y) \to \neg (x \wedge y) \tag{5.75}$$

Por el teorema de deducción (5.3), es suficiente demostrar $\{(x \to \neg y)\} \vdash \neg (x \wedge y)$.

1. $x \wedge y \to y$ Esq. de ax. (5.10)

2. $(x \wedge y \to y) \to ((x \wedge y \to \neg y) \to \neg(x \wedge y))$ Esq. de ax. (5.70)
3. $(x \wedge y \to \neg y) \to \neg(x \wedge y)$ M.P. (1) y (2)
4. $x \to \neg y$ Premisa
5. $(x \to \neg y) \to (x \wedge y \to (x \to \neg y))$ Esq. de ax. (5.1)
6. $x \wedge y \to (x \to \neg y)$ M.P. (4) y (5)
7. $(x \wedge y \to (x \to \neg y)) \to ((x \wedge y \to x) \to (x \wedge y \to \neg y))$ Esq. de ax. (5.2)
8. $(x \wedge y \to x) \to (x \wedge y \to \neg y)$ M.P. (6) y (7)
9. $x \wedge y \to x$ Esq. de ax. (5.9)
10. $x \wedge y \to \neg y$ M.P. (9) y (8)
11. $\neg(x \wedge y)$ M.P. (10) y (3)

$\square$