Apéndice A. Algoritmos generales.

A.1. Punto más cercano sobre un segmento de línea a un punto en el espacio.

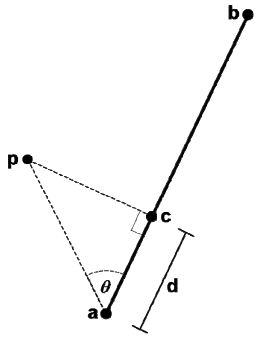

Fig A.1.- Punto más cercano sobre un segmento de línea a un punto en el espacio.

Dado un segmento de línea como se muestra en la figura anterior, queremos calcular el punto sobre ésta que sea el más cercano a un determinado punto *p* en el espacio. Los puntos *a* y *b* definen los límites del segmento de línea, *d* es la distancia que existe del punto *a* al punto *c* y *c* es el punto que queremos calcular y que definimos como el punto más cercano a *p* sobre el segmento de línea *ab*:

Podemos ver en la figura que el punto *c* corresponde a la proyección del vector $\overrightarrow{ap}$ sobre el vector $\overrightarrow{ab}$. Sean $U = \overrightarrow{ap}$ el vector que será proyectado y sea $V = \widehat{\overrightarrow{ab}}$ el vector normalizado que indica la dirección del vector $\overrightarrow{ab}$ en el cual se realiza la proyección. Usando las funciones trigonométricas podemos calcular la distancia *d* de modo que

$$d = \|U\| \cos\theta$$

Esta fórmula la podemos expresar en términos del producto punto de dos vectores ya que se ajusta a la siguiente formula utilizada para el cálculo del ángulo entre dos vectores

$$V_1 \bullet V_2 = \|V_1\|\|V_2\|\cos\theta$$

Entonces, el cálculo de la distancia *d* la podemos expresar como sigue:

$d = \|U\|\|V\|\cos\theta$, en donde $\|V\| = 1$ Por lo tanto : $d = U \bullet V$

La fórmula anterior la podemos traducir en palabras como: "que tanto se prolonga el vector *U* en la dirección del vector normalizado *V*". Tanto el vector *U* como el vector *V* están trazados a partir del punto *a* y por lo tanto podemos sacar las siguientes conclusiones:

Si $d < 0$	La proyección se lleva a cabo más allá del segmento de línea con dirección +*V*. Entonces, el punto más cercano está definido como $c = a$.
Si $d > \left\|\overrightarrow{ab}\right\|$	La proyección se lleva a cabo más allá del segmento de línea con dirección -*V*. Entonces, el punto más cercano está definido como $c = b$

Si no se cumple alguno de los casos anteriores entonces significa que la proyección se da dentro de los límites del segmento de línea. Teniendo al vector normalizado *V* indicándonos la dirección del punto *c* y teniendo al escalar *d* indicándonos la distancia a la cual se encuentra la proyección a parir del punto *a*, podemos finalmente calcular la posición del punto *c* como sigue

$$c = V \cdot d$$

[Bourke3, 1988]

A.2. Intersección de dos líneas en el espacio 2D.

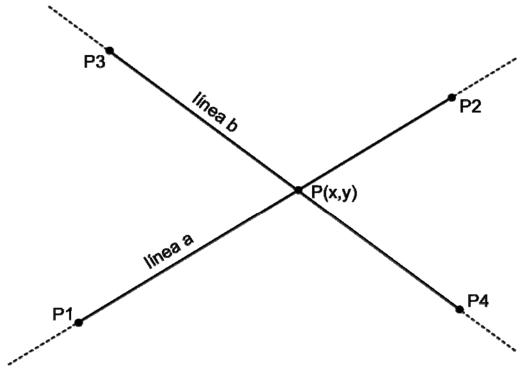

Fig A.2.- Intersección de dos líneas en el espacio bidimensional.

Las ecuaciones de dos líneas representadas en la figura anterior son las siguientes:

$$P_a = P1 + u_a(P2 - P1)$$
$$P_b = P3 + u_b(P4 - P3)$$

Para obtener la intersección entre las dos líneas, debemos de igualar las dos ecuaciones de modo que $P_a = P_b$ obteniendo así las siguientes dos ecuaciones:

$$x1 + u_a(x2 - x1) = x3 + u_b(x4 - x3)$$

$$y1 + u_a(y2 - y1) = y3 + u_b(y4 - y3)$$

Ambas ecuaciones contienen las dos incógnitas u_a y u_b. Resolviendo las ecuaciones simultáneas obtenemos las siguientes expresiones para cada una de las incógnitas:

$$\boxed{\begin{aligned} u_a &= \frac{(x4 - x3)(y1 - y3) - (y4 - y3)(x1 - x3)}{(y4 - y3)(x2 - x1) - (x4 - x3)(y2 - y1)} \\ \\ u_b &= \frac{(x2 - x1)(y1 - y3) - (y2 - y1)(x1 - x3)}{(y4 - y3)(x2 - x1) - (x4 - x3)(y2 - y1)} \end{aligned}}$$

Sustituyendo una de las dos expresiones en su ecuación de la línea correspondiente, obtenemos los valores de las dos coordenadas del punto de intersección. Si elegimos usar la ecuación para obtener u_a entonces, sustituyéndola en la ecuación de la línea P_a obtenemos las componentes del punto de intersección $P(x, y)$ en donde:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x1 + u_a(x2 - x1) \\ y &= y1 + u_a(y2 - y1) \end{aligned}}$$

Y del mismo modo, si eligiéramos usar la ecuación u_b entonces, sustituyéndola en la ecuación de la línea P_b obtenemos las componentes del punto de intersección $P(x, y)$ en donde:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x3 + u_b(x4 - x3) \\ y &= y3 + u_b(y4 - y3) \end{aligned}}$$

Para finalizar el procedimiento solo resta tomar en cuenta las siguientes consideraciones [Bourke,1989]:

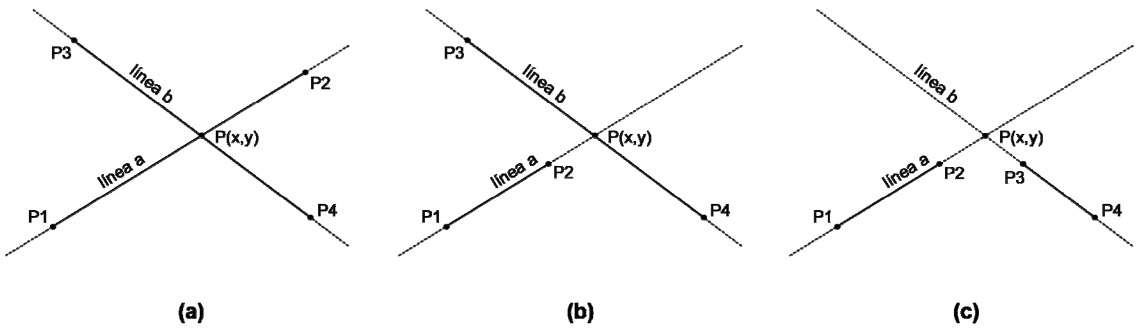

Fig A.3.- Tipos de intersección.

1. Las ecuaciones obtenidas están diseñadas para calcular el punto de intersección entre dos líneas que se extienden infinitamente en ambos extremos. En el caso en que se requiera saber el punto de intersección entre dos segmentos de línea debemos evaluar si los valores de u_a y u_b se encuentran entre el rango que va de 0 a 1. Si ambos valores se encuentran entre dicho rango, significa que la

intersección se lleva a cabo entre los dos segmentos de línea (inciso *a* de la figura anterior). Si solo uno de ellos se encuentra en el rango, significa que la intersección se lleva a cabo entre un segmento de línea (cuyo valor de u correspondiente fue localizado entre el rango de 0 a 1), y una línea (cuyo valor de u correspondiente no se encontró entre el rango de 0 a 1) (inciso *b* de la figura anterior). En caso de que ninguno de los dos valores se encuentre entre el rango de 0 a 1, significa que la intersección se lleva a cabo entre las dos líneas pero no en los segmentos de línea definidos por los puntos dados (inciso *c* de la figura anterior).

2. El denominador en las ecuaciones para u_a y u_b es el mismo en ambas.
3. Si el denominador en ambas ecuaciones u_a y u_b es igual a cero, entonces significa que las dos líneas son paralelas entre sí y no coincidentes, como se muestra en la siguiente figura:

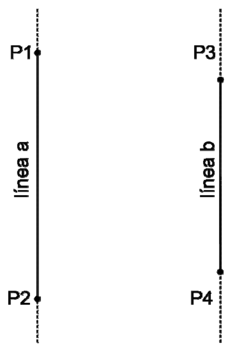

Fig A.4.- Líneas paralelas no coincidentes.

4. Si tanto el numerador como el denominador en ambas ecuaciones u_a y u_b son cero, entonces significa que las dos líneas son paralelas coincidentes, como se muestra en la siguiente figura:

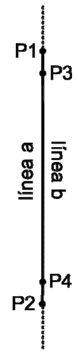

Fig A.5.- Líneas paralelas coincidentes.

[Bourke, 1989]

A.3. Intersección línea/segmento – plano.

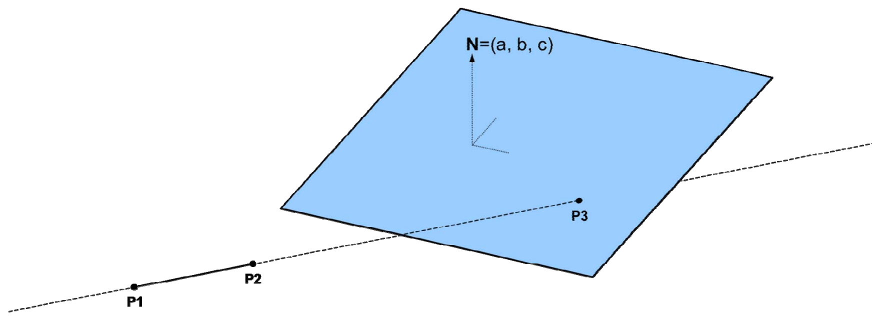

Fig A.6.- Intersección línea/segmento – plano.

Sabemos que un plano se puede representar por su ecuación correspondiente:

$$ax + by + cz + d = 0$$

Sabemos también que una línea recta puede representarse por sus ecuaciones paramétricas:

$$x = x_1 + u(x_2 - x_1)$$
$$y = y_1 + u(y_2 - y_1)$$
$$z = z_1 + u(z_2 - z_1)$$

en donde $P1(x_1, y_1, z_1)$ y $P2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos que pasan por la línea.

El punto *P3* en donde la línea intersecta al plano será aquel punto único (suponiendo que la línea no es paralela al plano), que se encuentre en alguna parte sobre la línea a la vez que se encuentre en alguna parte del plano. En otras palabras, las componentes del punto de intersección $P3(x_3, y_3, z_3)$ deben cumplir que:

$$\begin{aligned} x_3 &= x_1 + u(x_2 - x_1) \\ y_3 &= y_1 + u(y_2 - y_1) \\ z_3 &= z_1 + u(z_2 - z_1) \end{aligned}$$

y a la vez deben cumplir que:

$$ax_3 + by_3 + cz_3 + d = 0$$

Esto lo logramos sustituyendo las ecuaciones paramétricas dentro de la ecuación del plano de la siguiente manera:

$$a\left(x_1 + u(x_2 - x_1)\right) + b\left(y_1 + u(y_2 - y_1)\right) + c\left(z_1 + u(z_2 - z_1)\right) + d = 0$$

Observemos que la única incógnita en esta ecuación es la variable *u*. Entonces, resolviendo la ecuación anterior para obtener *u* llegamos a la siguiente expresión:

$$\boxed{u = \frac{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}{a\left(x_1 - x_2\right) + b\left(y_1 - y_2\right) + c\left(z_1 - z_2\right)}}$$

Ahora podemos calcular el punto de intersección $P3(x_3, y_3, z_3)$ sustituyendo los valores correspondientes en las ecuaciones paramétricas de la recta. Solo resta mencionar algunas notas adicionales:

1. Si en la ecuación para obtener *u* el valor del denominador es igual o muy cercano a cero, significa que la normal del plano es perpendicular a la línea. En este caso puede ser que la línea sea paralela al plano en cuyo caso no existe solución o bien que la línea esté sobre el plano para lo cual existe un número de

soluciones infinitas. Podemos verificar si la línea se encuentra sobre el plano sustituyendo los puntos $P1(x,y,z)$ y $P2(x,y,z)$ en la ecuación del plano. Si $ax+by+cz+d \approx 0$ para los dos puntos, podemos inferir que la línea se encuentra sobre el plano.

2. Si el valor de u se encuentra en el rango comprendido entre 0 y 1, significa que el punto de intersección se encuentra dentro del segmento de línea definido por $P1(x_1, y_1, z_1)$ y $P2(x_2, y_2, z_2)$.

[Bourke2,1991]

A.4. Intersección triángulo – plano.

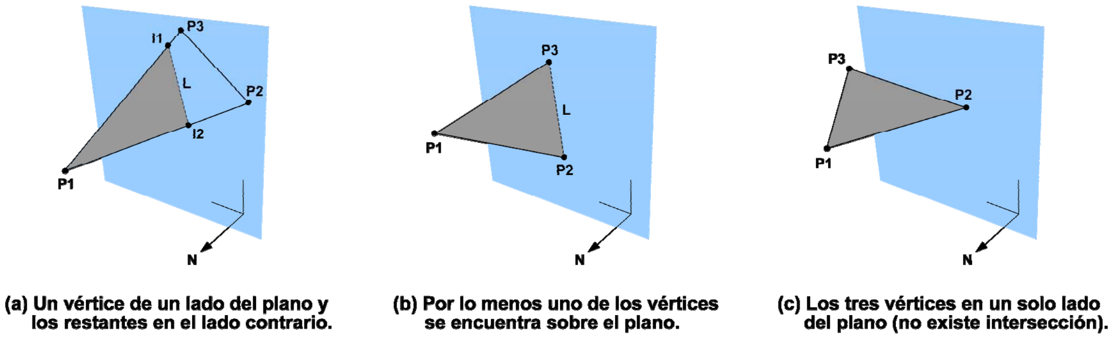

Fig A.7.- Intersección triángulo-plano.

Podemos ver en la figura anterior que existen básicamente dos casos en los que puede darse la intersección entre un triángulo y un plano. En el primero de ellos (inciso a de la figura), siempre existirá un vértice del triángulo de un lado del plano y los otros dos se encontraran en el lado contrario del plano. El segundo caso (inciso b de la figura), es aquel en que por lo menos uno de los vértices del triángulo se encuentra sobre el plano. Lógicamente si todos los vértices del triángulo se encuentran de un mismo lado del plano (inciso c de la figura), entonces significa que no existe intersección alguna.

Para evaluar de que lado del plano se encuentra un vértice $P(x,y,z)$, recurrimos a la ecuación del plano dado. Evaluando el vértice P en la ecuación del plano, podemos inferir lo siguiente:

Resultado de la evaluación	Interpretación
$ax+by+cz+d>0$	El vértice se encuentra en el lado $+N=(a,b,c)$ del plano.
$ax+by+cz+d<0$	El vértice se encuentre en el lado $-N=(-a,-b-c)$ del plano.
$ax+by+cz+d\approx 0$	El vértice se encuentra sobre el plano.

en donde *N* es la normal del plano. De este modo podemos obtener la ubicación de cada vértice con respecto al plano dado.

En el caso *(a)* de la figura, para obtener el segmento de línea *L* que define la intersección triángulo-plano, debemos obtener los puntos *I1* e *I2* que definen dicho segmento de línea. Primero que nada hay que identificar cual es el vértice *P1* del triángulo que se encuentra en un lado del plano y cuales son sus otros dos vértices *P2* y *P3* localizados en el lado contrario del plano. De este modo obtenemos dos segmentos de línea: *P1P2* y *P1P3*. Los puntos de intersección de estas dos líneas con el plano dado se calculan como se explica en la sección **A.3** y así obtenemos los puntos *I1* e *I2* que estamos buscando, obteniendo así el segmento de línea *L* que define la intersección triángulo-plano.

En el caso *(b)* de la figura, el resultado de la intersección triángulo-plano puede ser un punto si se encuentra un solo vértice del triángulo sobre el plano, un segmento de línea (como en la figura) si se encuentran dos vértices del triángulo sobre el plano, o un triángulo si se encuentran tres vértices del triángulo dado sobre el plano. Evidentemente en cualquiera de estas tres situaciones los puntos que componen al elemento de intersección están definidos por los mismos puntos del triángulo, por lo que no es necesario hacer cálculos extra.

A.5. Traslación de los vértices de un polígono perpendicular a un plano cartesiano a un sistema de coordenadas 2D.

El siguiente polígono es perpendicular al plano *XZ* y esta ubicado en su eje ortogonal *y=6*:

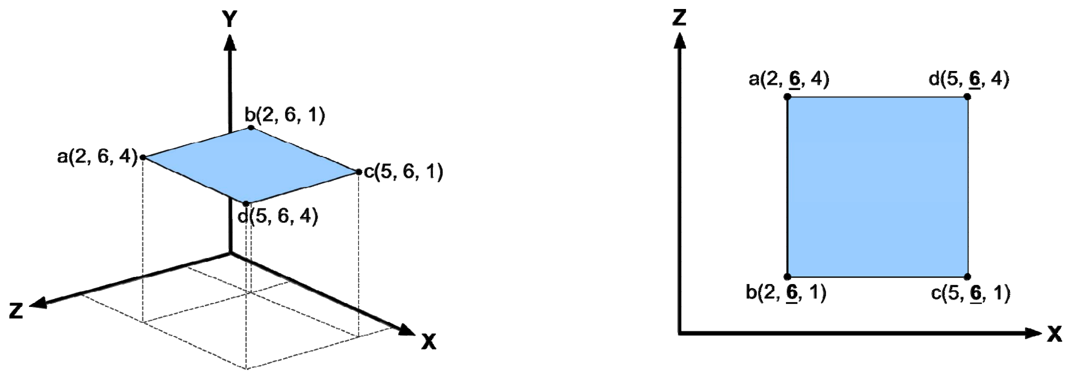

Fig A.8.- Polígono perpendicular al plano cartesiano *XZ* localizado en $y=6$.

Notemos que para todos los puntos sobre el polígono, su valor en la componente y será el mismo para todos estos puntos. Gracias a ésta propiedad, es posible trasladar temporalmente la información geométrica de un polígono al espacio bidimensional sin afectar la componente que sea suprimida. El espacio bidimensional al cual se trasladará la información corresponde al plano cartesiano con el cual es perpendicular el polígono. Solo es necesario recordar el valor de la componente cartesiana ortogonal a éste plano (que en este caso es la componente $y=6$), para posteriormente volver a trasladar ésta información al espacio tridimensional. La ventaja que esto nos ofrece radica en que es más sencillo trabajar en el espacio bidimensional que en el espacio tridimensional con lo cual realizaremos cálculos mas sencillos y por consiguiente de un menor costo para el microprocesador. A continuación presentaremos una tabla en donde podremos ver la equivalencia en coordenadas 2D de un punto sobre un polígono perpendicular a un plano cartesiano.

Sea $P_{3D}(x_{3D}, y_{3D}, z_{3D})$ un punto sobre un polígono perpendicular a un plano cartesiano y sea $P_{2D}(x_{2D}, y_{2D})$ su equivalente en coordenadas bidimensionales correspondientes a dicho plano, determinamos las siguientes equivalencias:

Plano cartesiano perpendicular al polígono	**Componente perpendicular al plano cartesiano**	**Equivalencia en el espacio 2D**
ZY	x_{3D}	$P_{2D}(z_{3D}, y_{3D})$
XZ	y_{3D}	$P_{2D}(x_{3D}, z_{3D})$
XY	z_{3D}	$P_{2D}(x_{3D}, y_{3D})$

Como ejemplo consideremos el punto $a(2,6,4)$ perteneciente al polígono de la imagen anterior el cual es perpendicular al plano cartesiano *XZ*. Más concretamente hablando, el polígono se encuentra sobre el plano definido por *y=6*. Por consiguiente al trasladar el punto *a* al espacio 2D, su componente y_{3D} será suprimida. De acuerdo a la tabla anterior, la equivalencia del punto *a* en el espacio 2D sería $a_{2D}(2,4)$. Podemos mover este punto sobre el espacio 2D en el cual se encuentra. Al regresar el punto nuevamente al espacio 3D (añadiendo nuevamente la componente suprimida $y_{3D}=6$), veríamos que lo que en realidad ocurrió fue que el punto se movió sobre el plano *Y=6*.

A.6. Introducción a los quaterniones y operaciones básicas.

Primeramente es importante señalar que los quaterniones están basados en los números imaginarios. Sabemos que al calcular el cuadrado de cualquier número, el resultado debe ser un número mayor o igual a cero. Sin embargo podríamos preguntarnos cual o cuales serían aquellos números cuyo cuadrado resultaría en un número negativo. No parece haber una respuesta congruente a la pregunta anterior pero ciertamente se han definido a estos números como los *números imaginarios*. Estos números pueden ser escritos como *ib* en donde *b* es un número real y en donde *i* es la unidad imaginaria que tiene la siguiente propiedad:

$$i^2=-1$$

Los siguientes son ejemplos de números imaginarios: *9i*, *6+5.2i*, *-3.2-2.4i*, etc. Al igual que en los números reales, existe un conjunto de operaciones aritméticas para los números imaginarios:

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

$(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$

$(a + bi) / (c + di) = /frac(a + bi) \cdot (c - di)(c + di)(c - di)$

Cada número imaginario *q tiene a su conjugado q** definido como:

$$q = a + bi$$
$$q^* = a - bi$$

Cabe mencionar que los números imaginarios extienden el conjunto de números reales a los llamados números complejos. Dejando atrás esta breve introducción a los números complejos, procedamos ahora a explicar el concepto de *quaterniones*. Los *quaterniones* son una extensión de los números imaginarios en donde cada quaternion consta de un componente real y tres imaginarios i, j y k que cumplen con los siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = -1 \\ i \cdot j &= -j \cdot i = k \\ j \cdot k &= -k \cdot j = i \\ k \cdot i &= -i \cdot k = j \end{aligned}$$

Un quaternion q y su conjugado q* son definidos como:

$$\begin{aligned} q &= ai + bj + ck + d \\ q^* &= -ai - bj - ck + d \end{aligned}$$

Los quaterniones pueden ser representados como un vector de la siguiente forma:

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

Las operaciones básicas con quaterniones están definidas de manera similar a las operaciones con números complejos. A continuación definimos algunas operaciones básicas.

Suma entre quaterniones.

Sean dos quaterniones $q_1 = [\ x_1, y_1, z_1, w_1\ ]$ y $q_2 = [\ x_2, y_2, z_2, w_2\ ]$, sus respectivas operaciones de suma y resta serían las siguientes:

$$q_1 + q_2 = (\ x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2\ ,\ z_1+z_2\ ,\ w_1+w_2\ )$$
$$q_1 - q_2 = (\ x_1-x_2\ ,\ y_1-y_2\ ,\ z_1-z_2\ ,\ w_1-w_2\ )$$

[Tremblay, 2004].

Multiplicación entre quaterniones.

Sean dos quaterniones $q_1 = [\ x_1, y_1, z_1, w_1\ ]$ y $q_2 = [\ x_2, y_2, z_2, w_2\ ]$, sus respectiva operación de multiplicación se calcula de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} q_1 * q_2 &= (\ w_1 + x_1\ \mathbf{i} + y_1\ \mathbf{j} + z_1\ \mathbf{k}\ ) * (\ w_2 + x_2\ \mathbf{i} + y_2\ \mathbf{j} + z_2\ \mathbf{k}\ ) \\ &= (\ w_1*w_2 - x_1*x_2 - y_1*y_2 - z_1*z_2\ ) + \\ &\quad (\ w_1*x_2 + x_1*w_2 + y_1*z_2 - z_1*y_2\ )\ \mathbf{i} + \\ &\quad (\ w_1*y_2 + y_1*w_2 + z_1*x_2 - x_1*z_2\ )\ \mathbf{j} + \\ &\quad (\ w_1*z_2 + z_1*w_2 + x_1*y_2 - y_1*x_2\ )\ \mathbf{k} \end{aligned}$$

$q_1 * q_2 = [\ x_R, y_R, z_R, w_R\ ]$, en donde:

$$x_R = w_1*x_2 + x_1*w_2 + y_1*z_2 - z_1*y_2$$
$$y_R = w_1*y_2 + y_1*w_2 + z_1*x_2 - x_1*z_2$$
$$z_R = w_1*z_2 + z_1*w_2 + x_1*y_2 - y_1*x_2$$
$$w_R = w_1*w_2 - x_1*x_2 - y_1*y_2 - z_1*z_2$$

[GPG2, 2000].

$$q_1 \cdot q_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e \\ f \\ g \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ah + de + bg - cf \\ bh + df + ce - ag \\ ch + dg + af - be \\ dh - ae - bf - cg \end{bmatrix}$$

Multiplicación de un escalar por un quaternión.

A la multiplicación de un escalar por un quaternión se la llama también escalamiento. Si tenemos un escalar *s* y un quaternión $q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w = [\ x, y, z, w\ ]$, la multiplicación entre ellos sería como sigue:

$$q*s = [\ x*s, y*s, z*s, w*s\ ]$$

Conjugado de un quaternión.

El conjugado también conocido como inversa de un quaternión consiste simplemente en el cambio de signo de los elementos imaginarios, es decir, si tenemos un quaternión $q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w = [\ x, y, z, w\ ]$ entonces su conjugado $q*$ sería el siguiente:

$$q* = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k} + w$$
$$q* = [\ \text{-x, -y, -z, w}\ ]$$

[Tremblay, 2004].

Magnitud de un quaternión.

La magnitud de un quaternión se calcula de forma similar a la magnitud de un vector. Si tenemos un quaternión $q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w = [\ x, y, z, w\ ]$ entonces su magnitud $|q|$ se calcularía del siguiente modo:

$$|q| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + w^2}$$

Normalizar un quaternión.

De igual forma que en el caso anterior, un quaternión se normaliza de manera similar a la forma en que se hace con un vector. Si tenemos un quaternión $q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w = [\ x,\ y,\ z,\ w\ ]$ entonces calculamos su magnitud $|q|$ y calculamos su versión normalizada q_u de la siguiente forma:

$$q_u = \left[\frac{x}{|q|}, \frac{y}{|q|}, \frac{z}{|q|}, \frac{w}{|q|} \right]$$

A.7. Rotación utilizando quaterniones.

De requerirse refiérase a la sección **A.6** en donde se da una introducción a los quaterniones. Para rotar un punto v alrededor de un eje normalizado A, debemos definir dos quaterniones. El primero de ellos corresponde al punto $v(x_v, y_v, z_v)$ que queremos rotar y lo definiremos de la siguiente forma:

$$p = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dado el vector normalizado $A(x_A, y_A, z_A)$ alrededor del cual realizaremos la rotación y dado un ángulo θ en radianes que corresponde a la magnitud de la rotación deseada, el segundo quaternion que requerimos lo definimos de la siguiente forma:

$$q = \begin{bmatrix} x_A \cdot \sin\left(\theta/2\right) \\ y_A \cdot \sin\left(\theta/2\right) \\ z_A \cdot \sin\left(\theta/2\right) \\ \cos\left(\theta/2\right) \end{bmatrix}$$

y a su conjugado como:

$$q^* = \begin{bmatrix} -a_q \\ -b_q \\ -c_q \\ d_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_A \cdot \sin\left(\theta/2\right) \\ -y_A \cdot \sin\left(\theta/2\right) \\ -z_A \cdot \sin\left(\theta/2\right) \\ \cos\left(\theta/2\right) \end{bmatrix}$$

Finalmente el resultado de la rotación la podemos definir como un punto *r* definido por la siguiente fórmula:

$$r = q \cdot p \cdot q^*$$

Para comprender el procedimiento veamos un ejemplo con los siguientes datos:

- El punto a rotar esta definido por *v*(3,7,-2). cuyo quaternion sería $p = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- Vector *a*(1,-2,6) alrededor del cual se realizara la rotación. Su versión normalizada la podemos definir como $A\left(\frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{-2}{\sqrt{41}}, \frac{6}{\sqrt{41}}\right)$.
- Queremos realizar una rotación equivalente a $\theta = 30$ radianes.

Con los datos anteriores podemos obtener los elementos requeridos:

$$q = \begin{bmatrix} 1 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ -2 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ 6 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ \cos 15 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad q^* = \begin{bmatrix} -1 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ 2 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ -6 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ \cos 15 \end{bmatrix}$$

y finalmente calculamos el punto *r* utilizando la multiplicación de quaterniones:

$$r = q \cdot p \cdot q^* = \begin{bmatrix} 1 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ -2 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ 6 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ \cos 15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ 2 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ -6 \cdot \frac{\sin 15}{\sqrt{41}} \\ \cos 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.44438 \\ 7.774228 \\ -1.16786 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para realizar las multiplicaciones anteriores, hay que referirse a la sección **A.6** en donde se explican las operaciones básicas con quaterniones.

[Adamson, 2002].

A.8. Conversión de un quaternión a matriz de rotación y viceversa.

Para convertir un quaternión $q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} + w = [\ x, y, z, w\ ]$ a una matriz de rotación R_m de cuatro dimensiones, se sigue la siguiente forma:

$$R_m = \begin{vmatrix} 1-2y^2-2z^2 & 2xy+2wz & 2xz-2wy & 0 \\ 2xy-2wz & 1-2x^2-2z^2 & 2yz-2wx & 0 \\ 2xz+2wy & 2yz-2wx & 1-2x^2-2y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

En caso de que se quiera convertir a una matriz de 3x3, lo único que se debe de hacer es Eliminar la última columna y el último renglon [Bobick, 2002] [Tremblay, 2004].

Para el caso contrario, es decir, para convertir una matriz de rotación R_m de cuatro dimensiones en un quaternión q, seguiríamos la siguiente forma:

$$q = \begin{vmatrix} \dfrac{R_{32} - R_{23}}{2\sqrt{R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44}}} \\ \dfrac{R_{31} - R_{13}}{2\sqrt{R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44}}} \\ \dfrac{R_{21} - R_{12}}{2\sqrt{R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44}}} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{R_{11} + R_{22} + R_{33} + R_{44}}} \end{vmatrix}$$

[Tremblay, 2004]