

## CAPITULO 3

### Juego de Dados Musicales

Un aspecto interesante de la relación entre música y matemáticas es la composición de obras musicales a partir de reglas y conceptos tales como la probabilidad aplicada a juegos de azar, modelos estadísticos, entre otros. En este proyecto éste es el caso, pues se generarán composiciones musicales a partir de juegos de azar, lanzamientos de dados.

Por otro lado la relación entre matemáticas y computación es absoluta, en primera instancia, y la más sólida, debido a que los procesos en un computadora son matemáticos, el manejo de bits a lo que toda información es convertida, son solo ceros y unos. Más aún, la conexión ente música y computación se da por éstas, una ciencia que forma parte de la esencia de la vida cotidiana. Por tanto la generación de música, basada en reglas y conceptos matemáticos, puede ser construida mediante la utilización de herramientas, como lo es en este caso, la computadora, una de las más utilizadas y demandadas para el apoyo del trabajo humano.

En éste capítulo se dará una breve explicación acerca de la obra a generar, composición, características e información relevante; así también, una breve reseña de su autor.

#### **3.1 Wolfgang Amadeus Mozart**

Nació el 27 de enero de 1756, en Salzburgo, Austria. Un compositor que desde los primeros años comenzó a desarrollarse en el mundo de la música. Un niño prodigio que a la

edad de entre los cuatro y los seis años compuso 22 piezas que su padre publicó en una monografía. Como ejemplo de lo temprana que fue su carrera, al salir de su tierra natal el primer lugar que visitó fue Munich, ciudad a la que llegaron, sus padres y él, el mes de enero de 1762, y en la que causaron gran admiración, pues Mozart tocó un concierto ante el príncipe elector y fue todo un éxito.

Cómo no imaginar lo que Mozart hizo y creó durante toda su vida; está por demás explicar a detalle lo que compuso a una edad tan joven, pero se puede resumir todo esto en 46 sinfonías, 20 misas, 178 sonatas para piano, 27 conciertos para piano, 6 para violín, 23 óperas, otras 60 composiciones orquestales, entre muchas otras.

Toda una vida creando música que hasta en días actuales continúa viva, ya que Mozart dejó plasmado sentimiento, vida, entre muchas otras características en cada una de sus composiciones musicales.

### **3.1.1 ¿Qué es Juego de Dados Musicales?**

Es una obra creada por el compositor Wolfgang Amadeus Mozart, quien a los 21 años de edad, en el año de 1777, describió un juego de dados que consiste en la composición de una pequeña obra musical.

El actual proyecto tiene como objetivo el desarrollo de esta obra, para ello se cuenta con un artículo de esta misma. “Juego de Dados Musical” lleva como subtítulo “Método para componer valeses o rondas con dos dados, sin ser músico o entender de composición”. Este método fue publicado en 1793 por Hummel en Berlín y Amsterdam.

Se cuenta con un artículo, en el que la autora de este, Graciela Paraskevaidis, narra la forma en la que esta obra llega a sus manos, hace alusión al humor y positivismo de este

autor y a la obra musical en sí. En el artículo se explican, entre otras cosas, las características con las que cumple la obra [Anexo B.2].

Mozart compone 176 compases en Do Mayor para la composición de minuetos, estos compases están sueltos, es decir se toman cada uno por separado. Están numerados, pero ello no quiere decir que esa numeración es la de ejecución, pues esta última combinación se obtiene de una forma muy peculiar. Para lo anterior Mozart ofrece reglas basadas en el lanzamiento de dados que permite combinarlos de múltiples formas. Cada obra musical generada consta de 16 compases. Cada uno de los compases se escoge lanzando dos dados y anotando la suma del resultado. Se tienen 11 resultados posibles, del 2 al 12. Mozart diseñó dos tablas, una para la primera parte de la obra y otra más para la segunda; cada parte consta de 8 compases. Los números romanos sobre las columnas de estas tablas corresponden a los ocho compases de cada parte del vals, los números del 2 al 12 en las hileras (renglones) corresponden a la suma de los dados que fueron lanzados, los números en la matriz corresponden a cada uno de los 176 compases que Mozart compuso (ver Figura 3.1 y Figura 3.2).

Por otro lado se cuenta también con 176 compases más, estos en la tonalidad de Re Mayor, para combinatoria de minuetos. Los compases para composición de minuetos en Re mayor son diferentes a los que corresponden solo para la generación de minuetos en tonalidad de Do mayor. La combinatoria, en la parte de tríos, cuenta también con 96 compases más en tonalidad de Sol mayor; numerados individualmente, donde la generación es muy parecida a la de minuetos. En realidad en la combinatoria se generan 32 compases, la primera parte de minuetos (16) y la segunda de tríos (16).

### 3.1.2 ¿Cómo se Genera una Nueva Obra?

Juego de Dados Musicales permite hacer combinaciones para minuetos de  $11^{16}$  (casi 46 mil billones) formas no equiprobables correspondientes a los dados, y para tríos se tienen  $6^{16}$  (casi 3 billones) equiprobables correspondientes al lanzamiento de un solo dado.

La obra conjunta (en minuetos y tríos) para la combinatoria es de  $66^{16}$ , es decir, más de  $10^{29}$ , esta combinatoria se compone de los 16 compases correspondientes a minuetos, más 16 compases de tríos. La generación de la combinatoria se maneja de la misma forma que la de minuetos, con una diferencia, los tríos solo utilizan un dado, por lo que los números probables a salir en cada tirada están entre 1 y 6.

A continuación se presentan las dos tablas de combinación para minuetos

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	96	22	141	41	105	122	11	30
3	32	6	128	63	146	46	134	81
4	69	95	158	13	153	55	110	24
5	40	17	113	85	161	2	159	100
6	148	74	163	45	80	97	36	107
7	104	157	27	167	154	68	118	91
8	152	60	171	53	99	133	21	127
9	119	84	114	50	140	86	169	94
10	98	142	42	156	75	129	62	123
11	3	87	165	61	135	47	147	33
12	54	130	10	103	28	37	196	5

**Tabla 3.1** Primera Parte Minuetos

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
2	70	121	26	9	112	49	109	14
3	117	39	126	56	174	18	116	83
4	66	139	15	132	73	58	145	79
5	90	176	7	34	67	160	52	170
6	25	143	64	125	76	136	1	93
7	138	71	150	29	101	162	23	151
8	16	155	57	175	43	168	89	172
9	120	88	48	166	51	115	72	111
10	65	77	19	82	137	38	149	8
11	102	4	31	164	144	59	173	78
12	35	20	108	92	12	124	44	131

**Tabla 3.2** Segunda Parte Minuetos

Mozart designó los compases por columna siguiendo un sencillo patrón armónico de acuerdo a su época. En ésta, se utiliza una escala de siete sonidos correspondientes a siete grados, los que más utilizan son: el 1er grado (I), el quinto grado (V) y el cuarto grado (IV) que en una escala de Do mayor corresponde al Do, Sol y Fa, además de los acordes que se construyen sobre ellos, lo cual lleva a una composición con la siguiente armonía:

1	2	3	4	5	6	7	8
do	do	do	do	sol	sol	sol	Sol
I	I	V	I-VI	V	I	IV-V	I

**Tabla 3.3** Armonía primera parte, 8 compases

1	2	3	4	5	6	7	8
sol	sol	do	do	do	do	do	do
V	I	IV-I	V	I	I	IV-V	I

**Tabla 3.4** Armonía primera parte, 8 compases

Para la combinatoria de tríos y minuetos se utiliza una tabla más, se añade la tabla 3.5 y 3.6 desplegadas a continuación para la generación de tríos, ya que las tablas para la generación de minuetos en la combinatoria sigue siendo la misma.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
1	72	6	59	25	81	41	89	13
2	56	82	42	74	14	7	26	71
3	75	39	54	1	65	43	15	80
4	49	73	16	68	29	55	2	61
5	83	3	28	53	37	17	44	70
6	18	45	62	38	4	27	52	94

**Tabla 3.5** Primera Parte Tríos

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VII
1	36	5	46	79	30	95	19	66
2	76	20	64	84	8	35	47	88
3	9	34	93	48	69	58	90	21
4	22	67	49	77	57	87	33	10
5	63	85	32	96	12	23	50	91
6	11	92	24	86	51	60	78	31

**Tabla 3.6** Segunda Parte Trío

### 3.2 Probabilidades para la composición de Minuetos

Las probabilidades en este proyecto son utilizadas indirectamente, pero en realidad son de gran importancia para éste. En este apartado se explicará de forma general la probabilidad de los lanzamientos de dados.

El lanzamiento de un dado tiene un espacio muestral de seis puntos, su función de densidad de probabilidad es discreta-uniforme, ya que para cualquier resultado tiene una probabilidad de  $1/6$ . El lanzamiento de dos dados genera un espacio muestral bidimensional de 36 parejas de resultados con una probabilidad  $p=1/36$ .

El lanzamiento de dos dados permite construir una variable aleatoria, la cual se deriva de la suma de los resultados del lanzamiento. El espacio muestral de este caso es de 11 puntos, pero la función de densidad de probabilidad es discreta-triangular, lo cual se infiere de la siguiente tabla:

Resultado	Probabilidad
2	$1/36$
3	$2/36$
4	$3/36$
5	$4/36$
6	$5/36$
7	$6/36$
8	$5/36$
9	$4/36$
10	$3/36$
11	$2/36$
12	$1/36$

**Tabla 3.7** Probabilidades de lanzamiento de dos dados

En la tabla anterior se denota que el resultado de mayor probabilidad de aparecer es el número 7. Los resultados 2,3,10,11 y 12 a pesar de ser el 55% de los resultados tienen una probabilidad de aparición de 0.167.

Explicada ya la forma de generación de las obras musicales y una generalidad sobre la probabilidad del lanzamiento de dados, se explicará a continuación una prueba que se

llevó a cabo para la visualización de lo antes mencionado. Cabe mencionar que esta prueba se llevó a cabo sólo para la generación de minuetos.

Se lanzaron 16 veces dos dados simultáneamente y se anotó la suma de cada lanzamiento. El resultado de lo que se obtuvo es el siguiente:

Los primeros ocho resultados fueron (primera parte):

$$\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8\} = \{5, 5, 7, 11, 5, 12, 8, 7\}$$

Los segundos ocho resultados fueron (segunda parte):

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8\} = \{11, 12, 9, 7, 5, 4, 11, 1\}$$

El algoritmo de Mozart hace que los compases del resultado 7, de las dos tablas, sean los que más aparecen, siendo los resultados 6 y 8 los siguientes, los resultados 5 y 9 siguientes al anterior y así sucesivamente, pues los siguientes son los resultados 4 y 10, resultados 3 y 11, siguiendo los resultados 2 y 12. En este sentido los compases del resultado 5 al resultado 9 de las dos tablas genera una tendencia central ya que 10 resultados de 16 caen entre dichos números (63%). Los resultados 2,3,4,10,11 y 12 a pesar de ser más del 50% de posibilidades sólo caen 6 resultados de 16 (17%), lo que confirma la veracidad del modelo de la función de probabilidad triangular.

Al buscar los compases correspondientes a las tiradas antes mencionadas en las tablas 3.1 y 3.2 se encontró lo siguiente:

$$C = \{40, 17, 27, 61, 161, 37, 21, 91\} \text{ y } \{102, 20, 48, 29, 67, 58, 173, 13\}$$

A partir de este resultado se obtiene la composición generada, que de acuerdo al esquema armónico mencionado con anterioridad, en la primera parte se encuentra:

1	Compases en do I
2	Compases en Do
3	Compases en sol V
4	Compases en sol y sol <sub>6</sub>
5	Compases en re <sub>7</sub>

6	Compases en sol-sol <sub>7</sub>
7	Compases en do-re
8	Compases en sol

y en la segunda parte se encuentra:

9	Compases en sol V
10	Compases en sol I
11	Compases en sol IV= do I
12	Compases en do V
13	Compases en do I
14	Compases en do I
15	Compases en do IV-V
16	Compases en do

Esta obra en realidad no es tan elegante como muchas de las piezas cortas que Mozart compuso, pero no deja de ser sorprendente que usando un método aleatorio, por la forma en la que está diseñado, tenga su sello debido a la manera en la que está escrito cada compás y el respeto de las reglas de armonía de su tiempo.

Sin duda alguna la creación de Mozart plasmada en los compases individuales, en las matrices y en la idea, es grandiosa. Es por un motivo de curiosidad y de implementar un sistema de generación automática de estas obras, en las que se unen y conectan las artes y las ciencias exactas, las que fundamentan el desarrollo de este proyecto.