Capítulo 4.- Fundamentos matemáticos

En este capítulo se presentan definiciones y métodos geométricos y matemáticos utilizados para al implementación del navegador. Se describen fundamentos básicos como vectores, coordenadas homogéneas y planos así como conceptos básicos del navegador como transformaciones para rotar, trasladar y escalar objetos y proyecciones para transformar las coordenadas de los objetos a coordenadas de la pantalla.

4.1 Matemáticas básicas

En esta sección se describen elementos geométricos y matemáticos básicos. Es importante aclarar que no se realizan las demostraciones matemáticas de todas las definiciones.

4.1.1 El vector y sus propiedades

Un vector es un objeto geométrico representado por un conjunto ordenado de números con dos propiedades: dirección y magnitud. Los vectores y el álgebra vectorial fueron inventados para hacer más fácil analizar fenómenos de la física y la ingeniería que tienen estas dos propiedades[MORT89]. De la misma manera los vectores son invaluables en el estudio y aplicación de la geometría.

Formalmente, si D es la dimensión del vector y v_i es el desplazamiento en la dimensión i para $1<=i<=D$, un vector $\boldsymbol{v}$ puede representarse como una matriz de un renglón o una columna:

$$v = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{D}] \quad \text{o} \quad v = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \ldots, \mathrm{v}_\mathrm{D}]^T$$

Aunque un vector puede tener cualquier dimensión, en este trabajo se utilizarán vectores tridimensionales (D = 3, $\mathbf{v} = [\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \mathrm{v}_3]$ siendo v_1 el desplazamiento en x, v_2 en y y v_3 en z). La figura 4.1 muestra un vector tridimensional con sus propiedades. La longitud de la línea representa la magnitud del vector, denotada por $|\boldsymbol{v}|$, y la flecha su dirección. La magnitud de un vector tridimensional se calcula con la siguiente fórmula:

$$|v| = \sqrt{v_1 v_1 + v_2 v_2 + v_3 v_3} \tag{4.1}$$

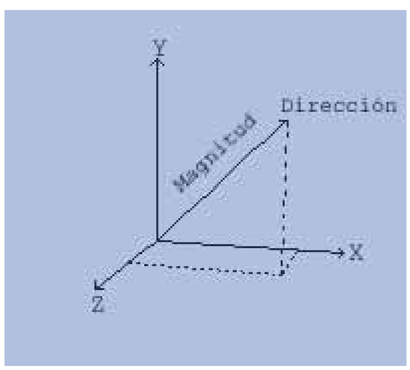

Fig. 4.1.- Vector tridimensional. La flecha indica la dirección del vector y la línea su magnitud.

Un vector unitario es aquel cuya magnitud es 1. Debido a que varias operaciones entre vectores son más fáciles de realizar si éstos son unitarios, muchas veces es conveniente modificar sus valores para que su magnitud sea 1 pero sin modificar su dirección. A este proceso se le conoce como normalización y se dice que un vector transformado así está normalizado. Matemáticamente, sea $v = [v_1, v_2, v_3]$, entonces el vector unitario que tiene la misma dirección que v es:

$$W = \left[\frac{v_1}{|v|}, \frac{v_2}{|v|}, \frac{v_3}{|v|} \right] \tag{4.2}$$

4.1.2 Operaciones con vectores

El producto interior o producto punto entre dos vectores es la suma de los productos de las respectivas componentes de los vectores y se denota por el símbolo "·". Formalmente, sean v y w dos vectores tridimensionales, su producto escalar se define como:

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \tag{4.3}$$

Una de las aplicaciones más importantes del producto punto entre dos vectores es encontrar el ángulo entre éstos. Sean v y w dos vectores tridimensionales, el ángulo entre éstos es:

$$\theta = \arccos\left(\frac{v \cdot w}{|v||w|} \right) \tag{4.4}$$

la cual aplicando la ecuación 4.3 puede escribirse como:

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{|v||w|}\right) \tag{4.5}$$

y si los dos vectores están normalizados, entonces la expresión se reduce a:

$$\theta = \arccos(v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \tag{4.6}$$

Si el ángulo entre los vectores es 90°, el coseno es 0 y por lo tanto $v \cdot w=0$. Si el ángulo es 0°, los vectores son paralelos.

Otra operación útil entre vectores es el producto vectorial o producto cruz. Esta operación es denotada por el símbolo "×" y obtiene el vector perpendicular a ambos vectores. Sean *v* y *w* dos vectores tridimensionales entonces

$$v \times w = \left(v_2 w_3 - v_3 w_2, -\left(v_1 w_3 - v_3 w_1\right), v_1 w_2 - v_2 w_1\right) \tag{4.7}$$

si $z=v\times w$ entonces $z \cdot v=0$ y $z \cdot w=0$. Si los dos vectores *v*, *w* son paralelos, entonces $v\times w=0$. Una manera sencilla para saber la dirección del nuevo vector es aplicar la regla de la mano derecha. Ésta consiste en doblar dos dedos de la mano derecha en la dirección en que rotaría el vector *v* hacia el vector *w* en el menor ángulo. La dirección en la que se encuentra el dedo pulgar, será la dirección del vector obtenido.

4.1.3 El plano y sus propiedades

Según Euclides, el plano es un lugar geométrico compuesto por un conjunto de puntos equidistantes de dos puntos fijos[MORT89]. Matemáticamente existen varias formas de representar un plano, la más sencilla y conocida es la ecuación general del plano:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{4.8}$$

donde los coeficientes *A*, *B* y *C* definen la normal del plano, el vector perpendicular al plano de cualquier dimensión denotado generalmente como ***n***, y *D* es la distancia de la línea que va del centro de coordenadas al plano perpendicularmente. Ver la figura 4.2 para una representación gráfica de un plano y su normal.

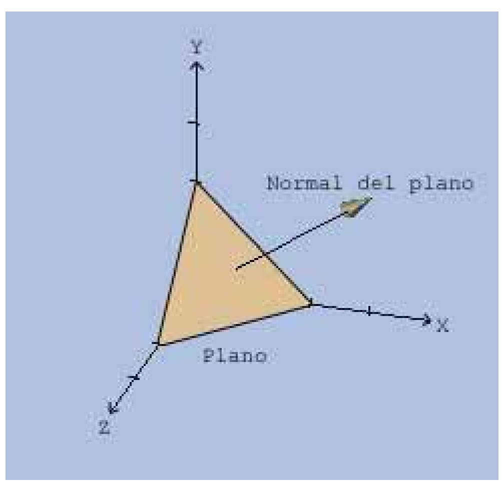

Fig. 4.2.- Plano y su normal en un octante del espacio.

Un plano puede ser definido por tres puntos no colineales. Para encontrar la ecuación del plano dados tres puntos no colineales *P1*, *P2* y *P3*, basta con encontrar la normal del plano (coeficientes *A*, *B* y *C*) y obtener el valor *D* despejándolo de la ecuación 4.8, substituyendo los coeficientes *A*, *B* y *C* encontrados y las coordenadas de cualquiera de los tres puntos. La normal del plano puede ser obtenida con el producto cruz de *P1P2* × *P1P3*, es decir, el vector que va de *P1* a *P2* por el vector que va de *P1* a *P3*.

Dado que la normal del plano es un vector perpendicular al plano de cualquier magnitud, puede normalizarse sin afectar la representación del plano y facilitar muchos cálculos. Es importante notar que la normal de un plano puede tener dos direcciones iguales pero de sentido contrario, dependiendo si el producto cruz se realizó la operación *P1P2* × *P1P3* o bien *P1P3* × *P1P2*. En este trabajo la normal de todos los planos y polígonos son producidos de acuerdo a la regla de la mano derecha (ver sección anterior); además, se considera la región delantera de un plano aquella hacia donde apunta su normal, y la trasera la otra.

4.1.4 Relación entre un plano y un punto

Dado un plano *S* y un punto *P*, existen tres posibles relaciones entre éstos:

+El punto *P* se encuentra delante del plano.
+El punto *P* se encuentra dentro del plano.
+El punto *P* se encuentra detrás del plano.

Para determinar esta relación basta con obtener el signo de sustituir el punto *P* en la ecuación del plano *S*. Si el resultado es positivo, el punto se encuentra enfrente del plano; si es 0 es parte de él y si es negativo se encuentra detrás de él.

4.1.5 Intersección de una línea con un plano

El cálculo de la intersección de una línea con un plano genera un punto (x_i, y_i, z_i). El método más eficiente (respecto a número de operaciones a realizar) para calcular este punto es mediante la ecuación del plano (ecuación 4.8) y las ecuaciones paramétricas de una recta, representada por dos puntos (x_1, y_1, z_1) y (x_0, y_o, z_o) que pertenecen a la recta y un parámetro *t*:

$$\begin{aligned} &Ax_i + By_i + Cz_i + D = 0 \\ &x_i = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ &y_i = (y_1 - y_0)t + y_0 \\ &z_i = (z_1 - z_0)t + z_0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

resolviendo estas cuatro ecuaciones para *t* se obtiene la ecuación 4.10:

$$t = \frac{A_{xo} + B_{yo} + C_{zo} + D}{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)} \tag{4.10}$$

y sustituyendo este valor en las ecuaciones 4.9 generan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{(x_1 - x_0)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)} + x_0 \\ y_i &= \frac{(y_1 - y_0)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)} + y_0 \\ z_i &= \frac{(z_1 - z_0)(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)} + z_0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

4.1.6 Coordenadas homogéneas

Las coordenadas homogéneas fueron desarrolladas primero en geometría y han sido aplicadas subsecuentemente a la graficación[FOLE90]. Como se verá más adelante, las coordenadas homogéneas hacen posible que varias transformaciones geométricas puedan incluirse en una sola matriz.

Utilizando coordenadas homogéneas, un punto tridimensional *P* es representado por cuatro componentes:

$$P = \lfloor P_x, P_y, P_z, W \rfloor \tag{4.12}$$

donde *W* es un escalar. Dos conjuntos de coordenadas homogéneas, (x, y, z, W) y (x’, y’, z’, W’) representan el mismo punto sí y sólo sí uno es múltiplo del otro. Así, (2,5,8, 4) y (4,10,16,8) representan el mismo punto. Las coordenadas homogéneas pueden transformarse a coordenadas ordinarias dividiendo cada elemento entre *W*:

$$\begin{aligned} x &= \frac{Px}{W} \\ y &= \frac{Py}{W} \\ z &= \frac{Pz}{W} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Las operaciones son fáciles de realizar si se escoge *W*=1, de manera que el punto (x, y, z, 1) en coordenadas homogéneas, representa el punto (x, y, z).

4.1.7 Distancia entre dos puntos

Dados dos puntos *P1*, *P2* la distancia *d* entre estos puntos puede ser obtenida mediante el teorema de Pitágoras y se define con la fórmula:

$$d = \sqrt{(P2_x - P1_x)^2 + (P2_y - P1_y)^2 + (P2_z - P1_z)^2} \tag{4.14}$$

4.1.8 Función arco tangente

En algunos casos es necesario calcular el ángulo entre un vector 2D y un eje de coordenadas. Utilizando el plano *XY* (Fig. 4.3), y sea el vector *v* = (*x*, *y*) entonces utilizando las identidades trigonométricas de triángulos rectángulos:

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \theta = a\tan\left(\frac{y}{x}\right)$$

siendo atan la función arco tangente.

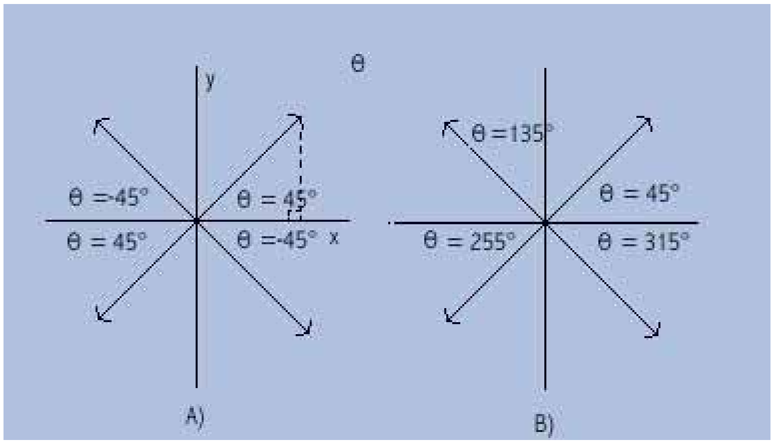

Fig. 4.3.- Vectores en los cuatro cuadrantes y el valor del ángulo formado con el eje x A) utilizando la función arco tangente normal y B) utilizando la función Arco tangente arreglada presentada en esta sección.

Si $x = y = 3$, entonces atan(3 / 3) = 45°, el cuál es el ángulo correcto. Sin embargo, si x= -3 y y=3, atan(3/-3) = -45°, lo que genera el ángulo incorrecto, ya que el ángulo con el eje x es 135°. Lo que sucede es que la función atan regresa el ángulo más pequeño entre el vector v y el eje x. Para corregir este problema es necesario implementar la función atan2 como sigue:

$$\text{Atan2} = \begin{cases} \text{Atan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \text{Atan}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\ \frac{PI}{2} & \text{si } x = 0 \text{ and } y > 0 \\ 0 & \text{si } x = y = 0 \\ \frac{-PI}{2} & \text{si } x = 0 \text{ and } y < 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

Ahora, si x=-3 y y=3, Atan2(-3, 3) = Atan(3/-3)+PI= -45+180=135°, el ángulo correcto.

4.2 Transformaciones geométricas

Desplegar en pantalla un escenario tridimensional no es suficiente para considerar un sistema como navegador. Además, es necesario poder realizar operaciones sobre los objetos como trasladarlos, rotarlos y escalarlos para simular los movimientos de una persona dentro del mundo virtual. Por ejemplo, para simular el movimiento de una persona avanzando hacia su izquierda, es necesario desplazar todo el escenario hacia la derecha, lo que generará el mismo efecto visual. Debido a que los objetos son definidos por las coordenadas de sus vértices, las transformaciones geométricas son procedimientos para calcular nuevas coordenadas para esos puntos.

Las transformaciones básicas son: traslación, rotación y escalamiento, las cuales son descritas en esta sección. Existen otras transformaciones como reflejos, distorsiones y transformaciones de sistemas de coordenadas, pero no serán vistas en este trabajo ya que no son de utilidad para el desarrollo del navegador. Las proyecciones también son consideradas transformaciones y serán explicadas más adelante.

Estas transformaciones tiene dos tipos de representaciones: vectorial y matricial. En esta sección se describen los dos tipos de representaciones, comenzando con la representación vectorial y una descripción de las transformaciones y sus principales propiedades, para finalmente definir sus representaciones matriciales que son utilizadas por el navegador.

4.2.1 Representación vectorial de las transformaciones

Las transformaciones geométricas pueden representarse mediante las ecuaciones que producen el cambio deseado para cada componente de un punto, es decir, una ecuación es utilizada para calcular el nuevo componente x del punto, otra para y y otra para z. Las transformaciones analizadas en esta sección son la traslación, rotación y escalamiento.

4.2.1.1 Traslación

La traslación es un movimiento lineal de un objeto de una posición a otra. Un punto (x, y, z) es trasladado a una nueva posición (x’, y’, z’) mediante:

$$x' = x + T_x \qquad y' = y + T_y \qquad z' = z + T_z \tag{4.16}$$

donde T_x, T_y y T_z son valores reales que representan las distancias de traslación en cada componente. El vector (T_x, T_y, T_z) es llamado vector de traslación y define la dirección en la que los cuerpos son movidos. Por ejemplo, utilizando el vector (T_x, 0, 0) la escena es trasladada T_x unidades hacia la derecha y con el vector ($-T_x$, 0, 0) hacia la izquierda. Así, para trasladar un objeto tridimensional es necesario trasladar todos los puntos que lo definen (Fig. 4.4).

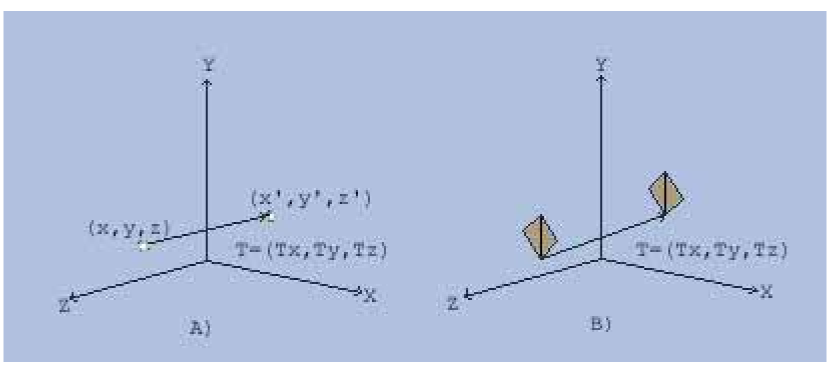

Fig. 4.4.- Traslación A)de un punto (x, y, z), B)de un objeto mediante la traslación de todos los puntos que lo definen.

4.2.1.2 Escalamiento

El escalamiento es una transformación geométrica que cambia el tamaño de los objetos. Esta operación es realizada multiplicando los puntos del cuerpo por los factores de escalamiento (S_x, S_y, S_z):

$$x' = xS_x \qquad y' = yS_y \qquad z' = zS_z \tag{4.17}$$

S_x es el escalamiento en la dirección x, S_y en la dirección y y S_z en z y pueden tomar cualquier valor positivo. Valores menores que uno disminuyen el tamaño del objeto, mientras que valores mayores producen un agrandamiento. Si S_x=S_y=S_z, el objeto es escalado manteniendo sus proporciones originales. A este escalamiento se le conoce como escalamiento uniforme (Fig. 4.5 D) y E)). Cuando los factores de escalamiento no son iguales, el objeto es deformado con respecto a uno o varios de los ejes de coordenadas; la figura 4.5 F) se produjo con los factores S_x=1, S_y=0.5 y S_z=1.5, conservando en x su mismo tamaño, en y disminuyendo a la mitad y en z aumentando una mitad.

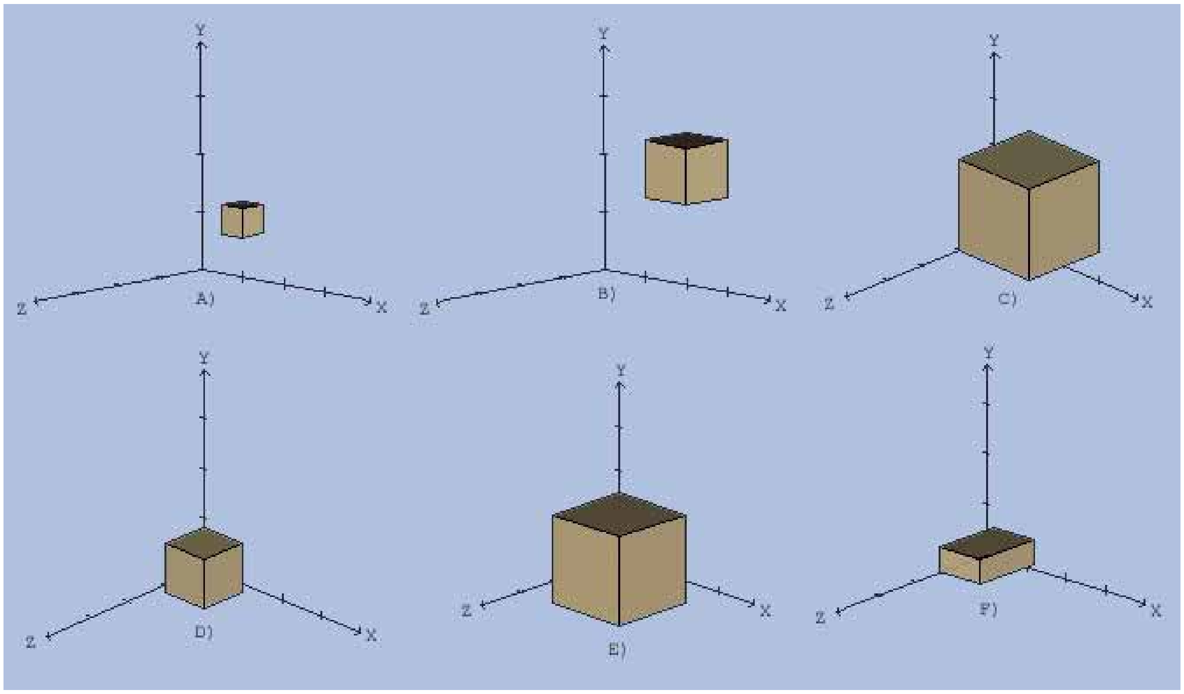

Fig. 4.5.-Ejemplos de escalamiento. A)Figura original, B)Objeto escalado, nótese que la separación entre el objeto y los ejes también fue escalada. C)Objeto escalado alrededor de su centro. D)Figura original en el origen, E)Escalamiento uniforme, F)Escalamiento no uniforme.

Es importante resaltar que el escalamiento se hace alrededor del origen, lo que quiere decir que cuando un objeto no tiene su centro en el origen (Fig. 4.5 A)), al momento de realizar el escalamiento, por ejemplo, agrandar el objeto, también es escalada la distancia del objeto al centro de coordenadas (Fig. 4.5 B). A menudo es necesario escalar un objeto a partir de un punto fijo distinto al centro de coordenadas (comúnmente el centro del objeto) para cambiar su tamaño sin afectar su posición relativa al centro de coordenadas. Este escalamiento es conocido como escalamiento a partir de un punto fijo y es ejemplificado en la figura 4.5 C).

Para escalar alrededor de un punto fijo P (P_x, P_y, P_z) es necesario realizar tres pasos:

1.-Trasladar el objeto de manera que el punto fijo *P* quede en el origen del sistema de coordenadas. Este paso es realizado trasladando los puntos del objeto con el vector de translación ($-P_x$, $-P_y$, $-P_z$) aplicando las ecuaciones 4.16.

2.- Escalar los puntos trasladados utilizando los factores de escalamiento S_x, S_y, S_z.

3.- Trasladar los puntos de manera que el punto fijo *P* regrese a su posición original mediante el vector de traslación (P_x, P_y, P_z).

Los tres pasos anteriores pueden realizarse con las ecuaciones:

$$x' = (x - P_x)S_x + P_x \qquad y' = (y - P_y)S_y + P_y \qquad z' = (z - P_z)S_z + P_z \qquad (4.18)$$

con las que se requieren dos sumas y un producto por cada componente de cada punto a ser escalado. Sin embargo, si se ordenan los términos, estas ecuaciones pueden escribirse como:

$$x' = xS_x + (1 - S_x)P_x \qquad y' = yS_y + (1 - S_y)P_y \qquad z' = zS_z + (1 - S_z)P_z \qquad (4.19)$$

que necesitan sólo una suma y un producto por cada componente de cada punto, debido a que los términos $(1-S_x)P_x$, $(1-S_y)P_y$ y $(1-S_z)P_z$ son constantes y necesitan calcularse sólo una sola vez.

4.2.1.3 Rotación

La rotación es una transformación que se realiza en una trayectoria circular. Esta transformación se especifica con un ángulo de rotación que determina la cantidad de rotación de cada vértice del objeto con respecto al origen de coordenadas.

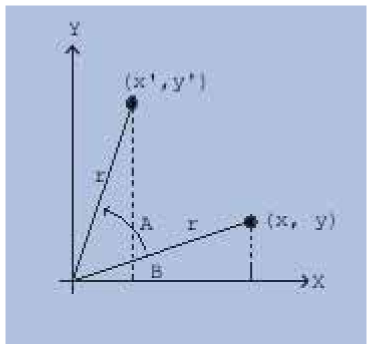

Fig. 4.6.-Rotación de un punto (x,y) a la posición (x',y') mediante un ángulo de rotación *A* relativo al origen de coordenadas. *B* es el ángulo del punto original con el eje *x*.

Para estudiar la rotación de un punto, primero se verá el caso de 2D. En la figura 4.6 se ilustra el desplazamiento de un punto (x,y) a (x',y') con un ángulo de rotación *A*. El ángulo *B* es el ángulo del punto original con el eje *x*. Utilizando las propiedades de los triángulos rectángulos y algunas identidades trigonométricas, el punto (x',y') puede escribirse matemáticamente como:

$$x' = r*cos(B+A) = r*cosB*cosA - r*senB*senA \qquad (4.20)$$
$$y' = r*sen(B+A) = r*senB*cosA - r*cosB*senA$$

ahora, como $x = r*cosB$ y $y = r*senB$, se pueden sustituir estos valores en las ecuaciones anteriores obteniendo:

$$x' = x*cosA - y*senA \qquad (4.21)$$
$$y' = y*cosA + x*senA$$

donde el resultado depende sólo del ángulo de rotación. Si éste es positivo la rotación se realiza en el sentido contrario de las manecillas del reloj; si es negativo, en el sentido de las manecillas del reloj.

La rotación en 3D es más compleja. Se especifica mediante un eje de rotación de arbitraria orientación y un ángulo de rotación alrededor de este eje. Los ejes de rotación más fácil de utilizar para rotar objetos son los ejes de coordenadas, ya que un componente es constante (el del eje de rotación usado) y la rotación se puede realizar de manera similar a la empleada en 2D con los otros dos componentes.

La rotación alrededor del eje *z* se realiza con las ecuaciones:

$$x' = x*cosA - y*senA \qquad (4.22)$$
$$y' = y*cosA + x*senA$$
$$z' = z$$

Las ecuaciones para las rotaciones alrededor de los otros dos ejes pueden obtenerse realizando permutaciones cíclicas de los parámetros *x*, *y*, *z* en las ecuaciones 4.22, es decir, reemplazar la *x* por *y*, la *y* por *z* y la *z* por *x*. Con este método se obtiene:

Rotación alrededor del eje *x*:

$$y' = y*cosA - z*senA \qquad (4.23)$$
$$z' = y*senA + z*cosA$$
$$x' = x$$

y del eje *y*:

$$z' = z*cosA - x*senA \quad (4.24)$$
$$x' = z*senA + x*cosA$$
$$y' = y$$

Para conocer la dirección hacia donde debe rotar un objeto dado un eje de rotación se utiliza el sistema de la mano derecha, el cual consiste en colocar el pulgar en la dirección positiva del eje de rotación. La dirección en la que los demás dedos se curvan es la dirección de rotación para un valor positivo del ángulo *A*. La figura 4.7 muestra las rotaciones para los tres ejes de coordenadas utilizando la regla de la mano derecha.

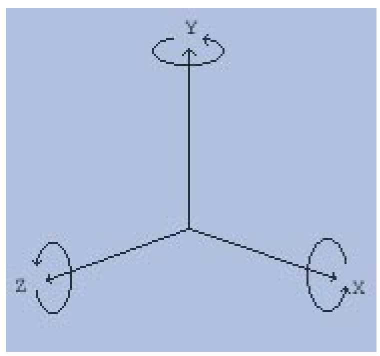

Fig. 4.7.-Rotación alrededor de los tres ejes de coordenadas utilizando el sistema de la mano derecha.

4.2.1.3.1 Rotación alrededor de un eje arbitrario

La rotación alrededor de un eje de arbitraria orientación es más compleja y se consigue mediante una serie de traslaciones y rotaciones de manera que el eje de rotación coincida con un eje de coordenadas, para luego rotar de acuerdo al ángulo deseado y de nuevo trasladar y rotar el escenario para regresar al eje de rotación a su posición y orientación originales.

Sea *P1P2* el eje de rotación definido como el vector que va del punto *P1* al punto *P2*, *A* el ángulo de rotación alrededor de este eje y *z* el eje de coordenadas elegido para orientar al vector *P1P2*, entonces deben seguirse los siguientes pasos:

1.-Trasladar de manera que el punto *P1* quede en el origen de coordenadas.

2.-Rotar alrededor del eje *y* de manera que el punto *P2* quede dentro del plano *YZ*.

3.-Rotar alrededor del eje *x* de manera que el punto *P2* queden en el eje *z*.

4.-Rotar alrededor del eje *z* con el ángulo *A*.

5.-Realizar la rotación del punto 3 con el mismo ángulo pero diferente signo.

6.-Realizar la rotación del punto 2 con el mismo ángulo pero diferente signo.

7.-Trasladar de manera que el punto P1 quede en su posición original.

4.2.2 Representación matricial de las transformaciones

Las ecuaciones vistas en la sección anterior que definen las transformaciones básicas pueden representarse en una matriz, la cuál es llamada matriz de transformación. La matriz de transformación es utilizada principalmente cuando se tiene una representación matricial de los puntos a moverse, de manera que una multiplicación de matrices realice este proceso:

$$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & \dots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & \dots & y'_n \\ z'_1 & z'_2 & z'_3 & \dots & z'_n \end{bmatrix} \qquad (4.25)$$

La ventaja de utilizar matrices para realizar transformaciones es que varias matrices que representan transformaciones diferentes, pueden multiplicarse antes de multiplicar las coordenadas de los objetos a mover, de manera que una transformación compleja, como el escalamiento alrededor de un punto fijo o la rotación alrededor de un eje arbitrario puede realizarse con una sola matriz.

4.2.2.1 Traslación

Aunque la traslación es la más sencilla de las transformaciones simples (ecuación 4.16), no puede ser representada matricialmente con una matriz de tres por tres. Sin embargo, es posible hacerlo utilizando coordenadas homogéneas aumentando un componente con valor 1 a todos los puntos del objeto (ver sección 4.1.6). La matriz de traslación es de cuatro por cuatro y una vez que los datos son multiplicados el valor del cuarto componente no es tomado en cuenta. Así, la matriz de traslación es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ z + T_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.26}$$

que puede comprobarse son las mismas ecuaciones que 4.16.

4.2.2.2 Escalamiento

Aunque el escalamiento puede ser representado con una matriz de tres por tres, se utiliza el mecanismo de coordenadas homogéneas para ser compatible con la matriz de traslación. De esta manera, basándose en las ecuación 4.17, la matriz de escalamiento relativo al origen es:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xS_x \\ yS_y \\ zS_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

4.2.2.3 Rotación

De manera similar al escalamiento y traslación, la rotación alrededor de los ejes de coordenadas se define como:

$$\begin{array}{ccc} \text{Eje z} & \text{Eje y} & \text{Eje x} \\ \begin{bmatrix} \cos A & -senA & 0 & 0 \\ senA & \cos A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos A & 0 & senA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -senA & 0 & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -senA & 0 \\ 0 & senA & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.28}$$

4.2.3 Combinación de transformaciones

Como ya se mencionó, la principal ventaja de utilizar matrices para realizar transformaciones es que por complejas que éstas sean pueden realizarse con una simple multiplicación matricial. Para combinar transformaciones, las matrices deben estar, de izquierda a derecha, ordenadas en el orden inverso a como se quieren aplicar las transformaciones. Por ejemplo, para realizar la rotación con un ángulo *A* alrededor de un eje fijo paralelo al eje *x* (P_x, P_y, P_z) donde P_x es libre y P_y, P_z son fijos, las matrices correspondientes son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -senA & 0 \\ 0 & senA & \cos A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -P_x \\ 0 & 1 & 0 & -P_y \\ 0 & 0 & 1 & -P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos A & -senA & P_y(1-\cos A)+P_z senA \\ 0 & senA & \cos A & P_z(1-\cos A)-P_y senA \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una vez obtenida esta matriz, basta con multiplicarla con la matriz de datos para obtener la transformación deseada.

4.3 Proyecciones

Una vez que los objetos son rotados, trasladados y escalados el siguiente paso es transformar las coordenadas en 3D obtenidas a 2D. Este tipo de transformación es conocido como proyección debido a que consiste en determinar cómo se proyectan los objetos en un plano de acuerdo a una regla predeterminada. Este plano es llamado plano de proyección y las líneas que van de los puntos de los objetos en el espacio al plano de proyección se conocen como líneas de proyección.

Aunque existen varios tipos de proyecciones, en este trabajo se describirán sólo los dos tipos implementados en el navegador: proyección ortogonal y proyección perspectiva. La idea en la que se basan estas proyecciones es "colocar" un plano entre el observador y la escena, trazando líneas que van desde cada vértice de los objetos hacia el observador y calculando las intersecciones de las líneas con el plano de proyección.

4.3.1 Proyección ortogonal

La proyección ortogonal es la más sencilla y rápida de implementar pero tiene la desventaja de que las imágenes generadas no son muy realistas, debido a que la profundidad (lejanía) en la que se encuentran los objetos no influye en el tamaño de la proyección de los mismos. En la figura 4.8 se muestran dos superficies planas de igual tamaño pero una más alejada de la otra del plano de proyección; sin embargo, sus proyecciones en este plano son de igual tamaño.

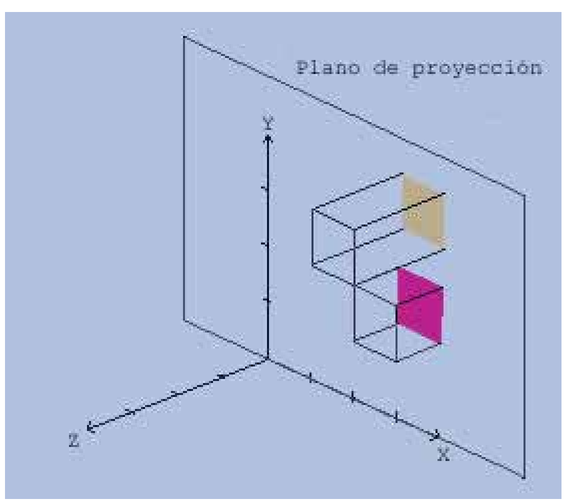

Fig. 4.8.- Proyección ortogonal de dos superficies planas mediante líneas de proyección perpendiculares al plano de proyección. Nótese que aunque una está más alejada de la otra son proyectadas del mismo tamaño.

La proyección ortogonal describe un escenario en el que el observador se encuentra infinitamente alejado de los cuerpos, por lo que las líneas de proyección son paralelas entre sí y perpendiculares al plano de proyección. La razón principal por la que este tipo de proyección no genera imágenes muy realistas es que en la vida real son raras las situaciones en las que un observador pueda considerarse lo demasiado alejado para lograr este efecto. La proyección ortogonal tiene las siguientes deficiencias:

+La profundidad a la que se encuentran los objetos no influye en el tamaño de su proyección, por lo que aunque los objetos son trasladados hacia delante o atrás (relativo al plano de proyección), la imagen proyectada en el plano no cambia.

+Cuando los objetos son trasladados lateral o verticalmente, la imagen original proyectada sólo es trasladada. En la vida real, cuando uno está frente a un objeto y camina por ejemplo hacia la izquierda, paulatinamente se puede ver la cara lateral izquierda del objeto y viceversa. En la proyección ortogonal esto no ocurre.

Aunque este tipo de proyección no generan efectos muy realistas en un navegador, la proyección ortogonal es utilizada principalmente en sistemas CAD, empleados para diseñar y crear objetos tridimensionales, donde lo importante no es ver objetos realista, sino una representación exacta de los mismos.

Si se elige el plano de proyección paralelo al plano *XY*, para generar la proyección basta con descartar el valor *z* de todos los puntos de los objetos. De esta manera no es necesario realizar cálculos extras con los puntos transformados lo que provoca que sea un método muy rápido.

4.3.2 Proyección perspectiva

La proyección perspectiva genera efectos más realistas que la proyección ortogonal, sin embargo es necesario realizar más cálculos. Con este tipo de proyección las líneas de proyección convergen en un punto llamado centro de proyección, que representa al ojo del observador (Fig. 4.9). En particular, las deficiencias mostradas en la proyección ortogonal son eliminadas con esta proyección:

+Los objetos más alejados son proyectados en menor tamaño que los más cercanos al observador. Esto permite simular el acercamiento y alejamiento del observador a los objetos.

+Las superficies visibles de un objeto depende de la posición del observador. Si el observador se encuentra frente a un objeto y avanza lateralmente a su izquierda, paulatinamente verá la cara lateral del cuerpo.

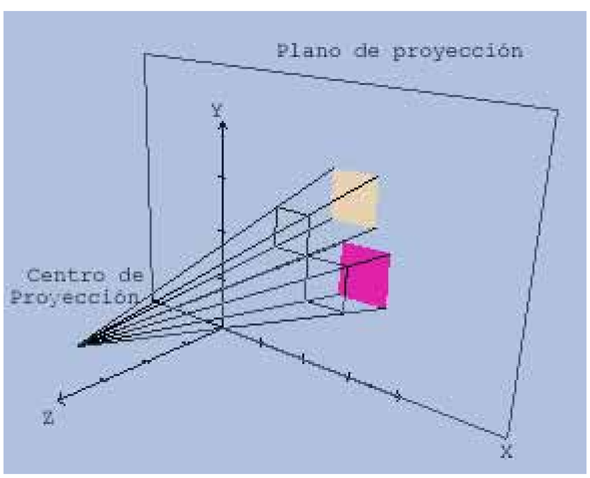

Fig. 4.9-Proyección perspectiva de dos superficies planas, de igual tamaño pero a diferente profundidad. Las líneas de proyección convergen en un punto llamado centro de proyección. Nótese que con este tipo de proyección los objetos que se encuentran más alejados se ven de menor tamaño.

Para generar la proyección perspectiva es necesario realizar un cálculo extra una vez que los puntos fueron transformados. Obsérvese la figura 4.10 para comprender la siguiente explicación del cálculo de la proyección perspectiva. Utilizando el plano *XY* como plano de proyección, los puntos *ABD* y *ACE* forman dos triángulos semejantes. Dos triángulos son semejantes sí y sólo sí sus ángulos son iguales. En la figura puede observarse que tienen el mismo ángulo *A*, además *ADB* forma un ángulo recto y *AEC* también, por lo tanto el tercer ángulo debe ser igual en los dos triángulo. Debido a que los triángulos semejantes tienen la propiedad de que sus lados respectivos son proporcionales, entonces:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BD}{AD}\text{, es decir, } \frac{y_1}{d+z_1} = \frac{y_1}{d}\text{, y despejando } y_1' = \frac{y_1 d}{d+z_1} = \frac{y_1}{1+\frac{z_1}{d}} \tag{4.29}$$

de manera similar:

$$x_1' = \frac{x_1}{1+\frac{z_1}{d}} \tag{4.30}$$

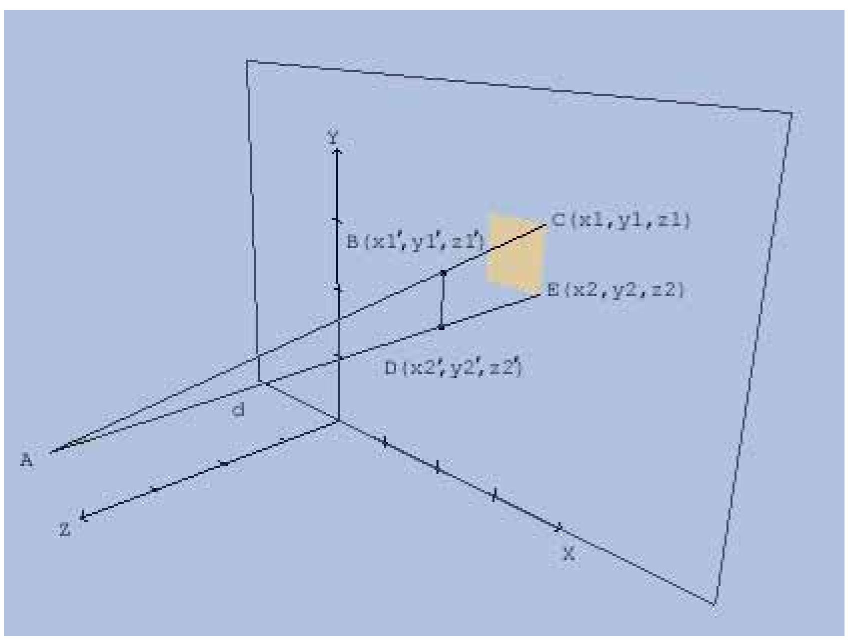

Fig. 4.10.- Elementos para obtener la proyección perspectiva. El centro de proyección *A* se encuentra a una distancia d del plano de proyección.

Matricialmente la proyección perspectiva puede representarse utilizando la matriz de proyección:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \\ 1 + \frac{z}{d} \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

donde debido a que el cuarto componente W es diferente de 1, cada punto en coordenadas no homogéneas es $\left(\frac{x'}{W}, \frac{y'}{W} \right)$.