

Capítulo IV

DISEÑO DETALLADO

Ya teniendo el diseño completamente conceptualizado es posible comenzar a realizar los cálculos necesarios. El primer paso es el diseño de los conos, ya que éstos son la parte central de nuestro sistema y es a partir de ellos que surgirá todo lo demás.

4.1 Cálculo de las dimensiones de los conos

El primer paso es saber la geometría del par de conos para que tenga un tamaño adecuado para la bicicleta. No pueden ser muy grandes ya que, debido a su ubicación estorbarían en el pedaleo y lo volverían incómodo. Entonces para este caso se tomo un par de triángulos semejantes con la hipotenusa común, y con los catetos paralelos pero de lado opuesto de la hipotenusa, y se tomaron algunos parámetros.

Se marcaron los límites de los conos con líneas verticales y con esto se tomaron los siguientes parámetros: Distancia de la punta de cada uno de los triángulos hasta cada uno de los límites de los conos (L_1 , L_2 , l_1 y l_2). Se tomó el ángulo α , y los radios de los extremos de los conos (R_1 , r_1 , R_2 y r_2). Y por último la distancia L que va de límite a límite de los conos y que es la altura de los mismos.

Teniendo esto es posible obtener las dimensiones de los conos más adecuadas para la bicicleta. Lo hacemos de la siguiente manera.

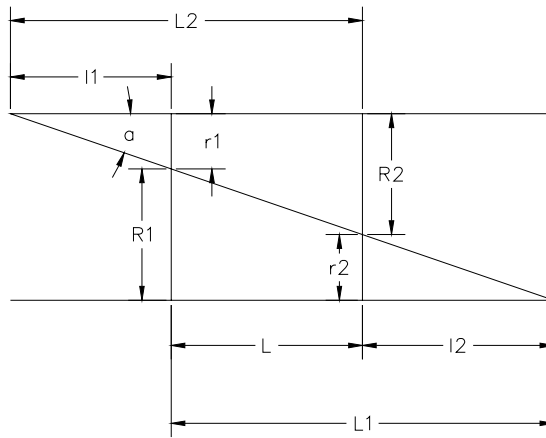


Figura 4.1 Triángulos semejantes utilizados para el cálculo de las dimensiones de los conos

Tenemos el lado 1 (del lado izquierdo) y el lado 2 (del lado derecho), y también se tienen dos pares de triángulos semejantes, uno arriba y otro abajo. Con esto es posible determinar que:

$$\frac{r_1}{l_1} = \frac{R_1}{L_1} = \frac{r_2}{l_2} = \frac{R_2}{L_2} = \tan \alpha$$

(4.1)

Donde α es determinada al azar y entonces,

$$\text{a) } r_1 = l_1 \tan \alpha \quad \text{y} \quad \text{b) } R_1 = L_1 \tan \alpha$$

(4.2)

Las relaciones de velocidad en los límites de los conos:

$$\text{a) } VR_1 = \frac{r_1}{R_1} = \frac{l_1 \tan \alpha}{L_1 \tan \alpha} = \frac{l_1}{L_1}$$

$$\text{b) } VR_2 = \frac{R_2}{r_2} = \frac{L_2 \tan \alpha}{l_2 \tan \alpha} = \frac{L_2}{l_2}$$

(4.3)

Los valores de VR_1 y VR_2 ya son conocidos, pues está dado en los requerimientos que debe el rango de las relaciones de velocidad deben ser iguales a los de la bicicleta base. Entonces estos valores son: $VR_1 = 0.7$ y $VR_2 = 3.9$.

La altura de los conos:

$$L = L_2 - l_1 = L_1 - l_2 \quad (4.4)$$

Ahora, despejando L_2 de esta última ecuación y la sustituyendo en (4.3b), tenemos

$$VR_2 = \frac{L_1 - l_2 + l_1}{l_2} = \frac{L_1 + l_1}{l_2} - 1$$

...y despejando l_2 ...

$$l_2 = \frac{L_1 + l_1}{VR_2 + 1} \quad (4.5)$$

Este valor servirá para determinar r_2 a partir de la ecuación (4.1). Los valores de L_1 y l_1 serán obtenidos a partir de un valor de r_1 determinado al azar, buscando algún valor adecuado, por supuesto, de la siguiente manera:

$$l_1 = \frac{r_1}{\tan \alpha}$$

$$L_1 = \frac{R_1}{\tan \alpha}$$

...en donde

$$R_1 = VR_1(r_1) \quad (4.6)$$

Entonces es posible obtener el valor de r_2 y a partir de este sabremos R_2 .

$$r_2 = l_2 \tan \alpha$$

y

$$R_2 = VR_2(r_2)$$

(4.7)

Finalmente de (4.3b) sabemos...

$$L_2 = VR_2(l_2)$$

Y de (4.4) se calcula el largo L de los conos. Introduciendo los datos en una Hoja de Excel® y jugando con las medidas de r_1 y de α , llegamos a los resultados de la Tabla 4.1.

$R_{1anillo}$ y $R_{2anillo}$ son las dimensiones del anillo. El signo negativo indica que es convexo.

Tabla 4.1. Tabla que muestra los resultados de los cálculos para la obtención de las dimensiones de los conos. Los cálculos se realizaron en Excel® cambiando los valores de r_1 y el ángulo α , hasta encontrar un tamaño adecuado.

VR1=	0.7	R1 _{anillo} =	-40 mm
VR2=	3.9	R2 _{anillo} =	45 mm
α =	20 °	t _{rod} =	8 mm
α =	0.35 rad	s=	10 mm
r1=	17.50 mm	r2=	8.67 mm
R1=	25.00 mm	R2=	33.83 mm
l1=	48.08 mm	l2=	23.83 mm
L1=	68.69 mm	L2=	92.94 mm
d1=	35.00 mm	d2=	17.35 mm
D1=	50.00 mm	D2=	67.65 mm
		L=	44.86 mm

Nota importante: Normalmente el cálculo para la Relación de Velocidad está dada por:

$$VR = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1}$$

Donde n_1 y n_2 son las revoluciones de cada parte y D_1 y D_2 son los diámetros. En este caso por un error no detectado a tiempo se tomó el inverso en los cálculos, sin embargo el resultado es el mismo.

Teniendo la geometría de los conos se pueden obtener las relaciones de velocidad que existirán en cada posición de los conos. Entonces haciendo el cálculo de $VR = R_a / R_b$, donde R_a y R_b son los radios de cada cono en una posición determinada con respecto a la longitud. Entonces se obtiene la gráfica de la Figura 4.2:

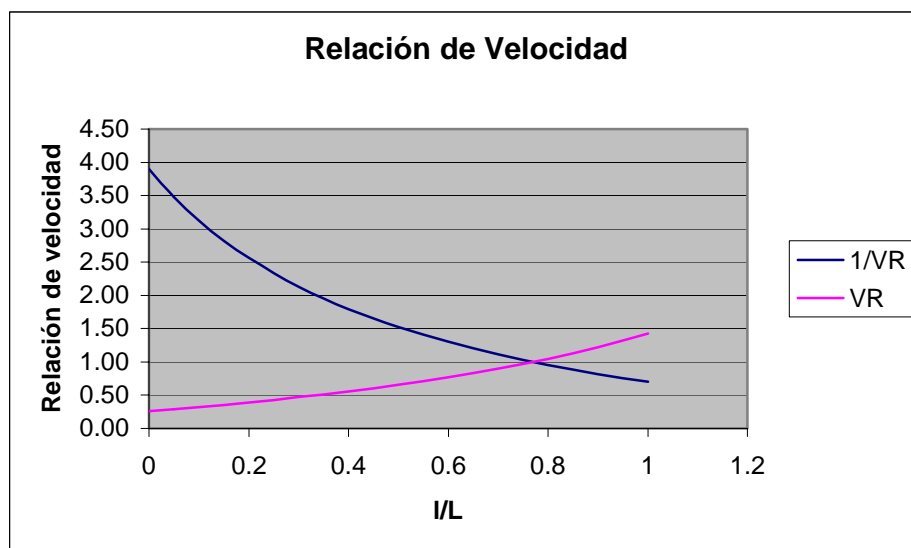


Figura 4.2. Relaciones de velocidad en cada punto de los conos en función de la longitud de los mismos de izquierda a derecha. El valor está dado en función de I/L. Se muestra la Relación de Velocidad real y su inversa.

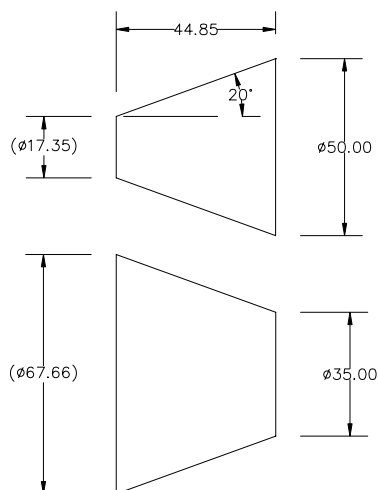


Figura 4.3. Diagrama que muestra las dimensiones de los conos, adecuadas para el cuadro de la bicicleta. En milímetros.

4.2 Cálculo de esfuerzos en los conos

4.2.1 Algunas notas sobre fricción

El principio de funcionamiento básico para el sistema es la fricción, por lo tanto es necesario conocer los principios que la rigen, de manera que sea posible realizar los cálculos necesarios de esfuerzos, selección del material, etc.

La fricción es la fuerza de resistencia que existe entre dos cuerpos que se encuentran con superficies en contacto y con movimiento relativo. Existen dos leyes empíricas, resultado de observaciones a través del tiempo en relación a la fricción. Estas leyes son conocidas como las leyes de Amontons, que reciben su nombre del ingeniero francés Guillaume Amontons, quien fue el primero en establecerla cuantitativamente en 1699 [7].

La primera ley de Amontons dice que la fuerza F entre un par de superficies con carga y en deslizamiento relativo es proporcional a la carga normal W que soportan: la fuerza tangencial necesaria para deslizar un bloque metálico sobre una superficie es proporcional a su peso. Si la masa del bloque se duplica, lo mismo pasa con la fuerza necesaria para iniciar el deslizamiento o bien para conservarlo. La constante de proporcionalidad entre F y W es universalmente conocida como el coeficiente de fricción, μ . El valor de μ depende de las características de las dos superficies en contacto, y por lo tanto no se puede expresar un valor de μ , por ejemplo, para el acero, sino que debe ser especificada también la otra superficie y el valor es para ambas superficies. Entonces a continuación se muestra la primera ley de Amontons.

$$F = \mu W$$

(4.8)

La segunda ley de Amontons dice que la fuerza de fricción F existente entre los dos cuerpos sólidos es independiente del área aparente de contacto entre ellos: como en el caso del bloque, la fuerza necesaria para deslizarlo es la misma si este está apoyado sobre su cara mas grande que si estuviera sobre su cara más pequeña. [7].

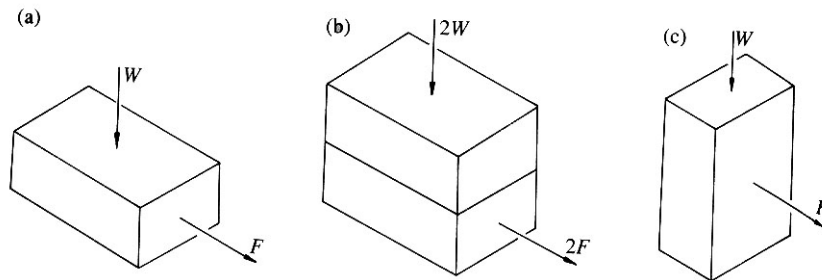


Figura 4.4. Leyes de fricción de Amontons: (a) una fuerza tangencial F es necesaria para deslizar el bloque con peso W ; (b) duplicando el peso del bloque, se duplica la fuerza de fricción; y (c) el valor de F permanece constante incluso cuando se cambia el área aparente de contacto. [7]

4.2.2 Cuerpos en contacto rodante.

En este caso la interacción de los dos cuerpos es de contacto rodante. Se parte de la base de que los cuerpos que interactúan son sólidos y elásticos. Para una geometría y carga dada se pueden medir dos parámetros: la resistencia al rodamiento μ_R y la máxima presión de contacto p_0 en un contacto elástico. Si se incrementa la rigidez de los elementos se reducirá la resistencia al rodamiento, pero aumentarán los esfuerzos en la superficie, y viceversa.

Para poder obtener una función para la resistencia al rodamiento es necesario tomar en cuenta la histéresis elástica para elementos rodantes. Esta consiste en lo siguiente. Como se está llevando a cabo un rodamiento, el material es sometido a un ciclo de esfuerzo y a su correspondiente deformación. Mientras el elemento rueda, empuja el material delante de él produciendo trabajo mecánico. Asimismo el material detrás de él recobra su forma original, por ser elástico, de manera que empuja el cuerpo rodante hacia delante. Esto suponiendo

que el cuerpo sea perfectamente elástico, lo cual se sabe no es cierto pues no existe ningún cuerpo que sea perfectamente elástico, entonces una parte de la energía es disipada debido a “fricción interna” o histéresis elástica. Estas pérdidas suelen ser expresadas como la fracción α de la máxima energía de deformación almacenada en el material durante el ciclo de deformación. Para metales, α suele ser muy pequeña, no así para otros materiales como polímeros y elastómeros [7]. De aquí se ha obtenido la siguiente expresión para el coeficiente de resistencia al rodamiento:

$$\mu_R = \frac{4\alpha}{3\pi} \left\{ \frac{W}{\pi R E^*} \right\}^{1/2}, \quad (4.9)$$

donde W es la fuerza normal entre los cuerpos, R es el radio efectivo y se obtiene de

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (4.10)$$

y E^* es el módulo de contacto, que se expresa como sigue:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}, \quad (4.11)$$

siendo ν_i y E_i la razón de Poisson y el módulo de Young para cada uno de los cuerpos en contacto.

El valor de la máxima presión de contacto se obtiene del análisis de Hertz. Mediante ciertas técnicas es posible medir los esfuerzos internos y desplazamiento de la superficie para varias distribuciones de presión. La que interesa es el contacto lineal que es dos dimensiones y se expresa de la siguiente manera.

$$p(x) = p_0 \sqrt{1 - x^2 / a^2} . \quad (4.12)$$

En esta ecuación a es la distancia medida desde el centro del área de contacto hasta el extremo del área de contacto. A través de un análisis de presiones y deformaciones se puede llegar a las siguientes ecuaciones.

$$\text{a) } a^2 = \frac{4WR}{L_r \pi E^*} \text{ y b) } p_0 = \sqrt{\frac{E^* W}{RL_r \pi}} .$$

Donde L_r es la longitud del contacto.

(4.13)

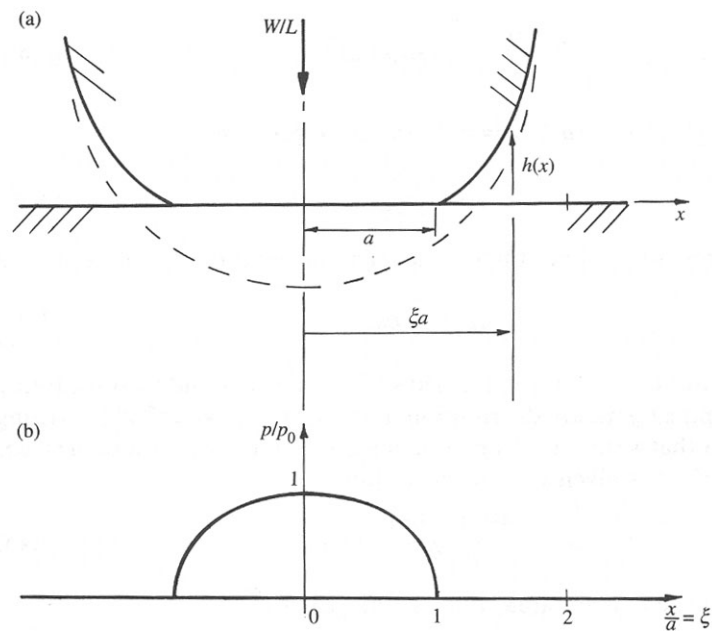


Figura 4.5. Distribución de presiones producidas por contactos de Hertz. [7]

Y también es posible encontrar los esfuerzos principales.

$$\sigma_x = -p_0 \left\{ \left(1 + \frac{2z^2}{a^2} \right) \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1/2} - 2 \frac{z}{a} \right\}$$

(4.14)

$$\sigma_z = -p_0 \left\{ 1 + \frac{z^2}{a^2} \right\}^{-1/2}$$

(4.15)

El valor del esfuerzo cortante principal esta dado por

$$\tau_1 = p_0 \left\{ \frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2} \left(1 + \frac{z^2}{a^2} \right)^{-1/2} \right\}$$

(4.16)

Esta expresión tiene un valor máximo de $0.30p_0$ por debajo de la superficie en el punto en que $z = 0.78 a$.

En este caso es muy importante que los elementos no sean deformados plásticamente, porque entonces perderá sus propiedades, entonces ha sido establecido un valor crítico para la fuerza normal W_Y que puede aplicarse. Para esto se basaron en el criterio de Tresca para el máximo esfuerzo cortante y en el criterio de von Mises de la energía de deformación. Suponiendo que la resistencia de cedencia de cierto material es un esfuerzo Y , los esfuerzos principales son $\sigma_1=Y$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. El esfuerzo cortante máximo es la mitad de la diferencia más grande entre los esfuerzos principales, entonces es igual a $Y/2$. En el criterio de Tresca se sugiere que el material cederá a esfuerzo cortante puro a una magnitud de $k=Y/2$.

El criterio de von Mises depende de la expresión

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2.$$

(4.17)

A cortante puro los esfuerzos principales son $(k, -k, 0)$ entonces el criterio de von Mises predice que k y Y estan relacionados por $6k^2=2Y^2$, entonces

$$k = \frac{Y}{\sqrt{3}}$$

(4.18)

En el caso de contacto bidimensional de cilindros la componente σ_y es el esfuerzo intermedio principal. Aplicando el criterio de Tresca se puede llegar a la conclusión de que el valor crítico de la presión máxima p_0^Y esta dada por

$$p_0^Y = 3.3k = 1.67Y .$$

(4.19)

4.2.3 Rodamiento con tracción.

En el caso de contacto de dos elementos elásticos en contacto rodante, se obtuvo que existen zonas de deslizamiento y zonas de adhesión, y los esfuerzos cortantes que producen tracción se pueden obtener por medio de la superposición de dos ecuaciones que representan dos distribuciones de esfuerzo. En es caso estático se encontraba primero una zona central que iba de $-b < x < b$, con zonas de deslizamiento laterales ubicadas simétricamente, y otra zona que abarcaba de $-a < x < a$. Esto se muestra en la Figura 4.5.

Sin embargo, se dieron cuenta que en caso de la presencia de tracción no existe una zona de deslizamiento en el borde delantero, de esto se obtuvieron las siguientes ecuaciones para superposición.

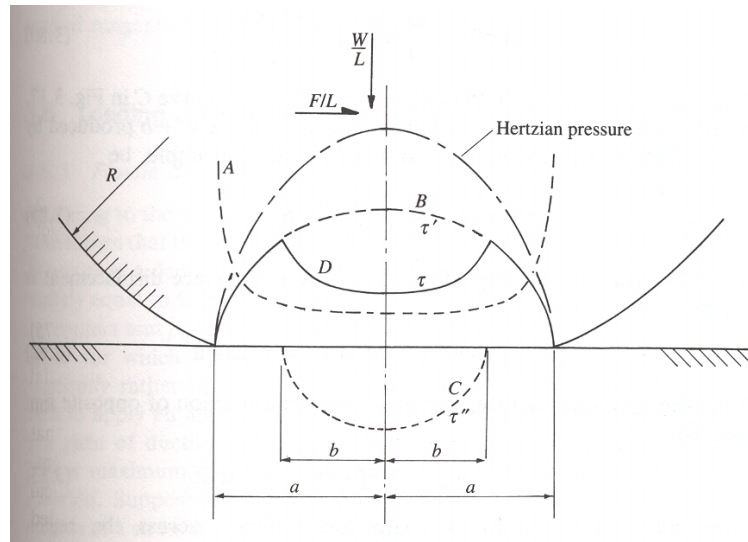


Figura 4.6. Caso estático donde no existe tracción de un elemento a otro pero existe contacto rodante entre dos cuerpos.[7]

$$a) \quad \tau'(x) = \mu p_0 \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\}^{1/2} \quad y \quad b) \quad \tau''(x) = -\mu p_0 \frac{b}{a} \left\{ 1 - \frac{(x+d)^2}{b^2} \right\}^{1/2} \quad (4.20)$$

Los gradientes de desplazamiento son los siguientes.

$$a) \quad \frac{\partial w_x'}{\partial x} = 2 \frac{(1-\nu^2)}{Ea} \mu p_0 x \quad y \quad b) \quad \frac{\partial w_x'}{\partial x} = -2 \frac{b(1-\nu^2)}{aEb} \mu p_0 (x+d) \quad (4.21)$$

Dentro de la zona de no deslizamiento, $\partial w_x / \partial x = \partial w_x' / \partial x + \partial w_x'' / \partial x$ es constante.

La extensión de la zona de no deslizamiento, medida por la razón de b/a , esta determinada por la magnitud de la fuerza tangencial F , requerida para superar el torque del cilindro conducido, comparado con su valor máximo posible μW .

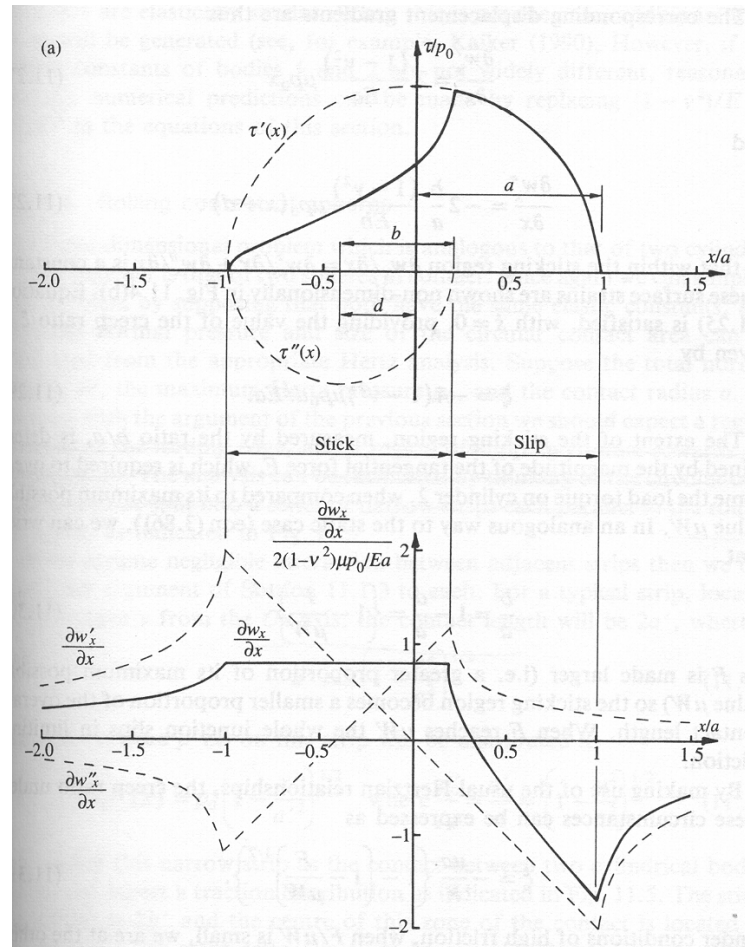


Figura 4.7. Caso de dos cuerpos en contacto rodante con tracción. [7]

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{d}{a} = \left\{ 1 - \frac{F}{\mu W} \right\}^{1/2}.$$

(4.22)

Cuando F aumenta la región de no deslizamiento se convierte en una menor parte proporcional de toda al área longitudinal de contacto. Cuando F alcanza el valor de μW toda la unión se desliza.

4.2.4 Cálculo de esfuerzos por contacto en los conos

Estas ecuaciones son para el contacto de dos cilindros, sin embargo, en este caso el contacto será dado entre un cono y un cilindro, pero se pueden utilizar estas ecuaciones como una buena aproximación ya que las ecuaciones están dadas por unidad de longitud por lo tanto se calcula el esfuerzo para cada punto del cono.

Sería muy conveniente ahorrar peso, pues se sabe que el sistema debe ser lo más ligero posible, y hubiera sido recomendable utilizar alguna aleación de aluminio que tiene una densidad bastante baja, sin embargo los esfuerzos pueden llegar a ser sumamente altos como se verá más adelante, por lo que es necesario utilizar un material más resistente, por lo que será utilizado acero para herramientas AISI S2 austenizado a 845 °C y templado hasta alcanzar 55 HRC [9]. El coeficiente de fricción de acero contra acero es de $\mu = 0.78$ [8]. En la tabla 4.2 se muestran las propiedades del material.

Era necesario escoger el material ya que sus propiedades serán utilizadas para los cálculos. Una vez teniendo esto se puede continuar con los cálculos. Se tienen dos contactos, uno entre el cono A y el anillo de transmisión y el segundo entre el anillo y el cono B. Por lo tanto es necesario hacer el análisis para los dos casos.

Tabla 4.2. Propiedades del Acero para Herramientas AISI S2. [9]

Propiedad	Valor
Física	
Densidad, g/cc	7.83
Mecánica	
Dureza, Knoop	624
Dureza, Rockwell C	55
Dureza, Vickers	602
Resistencia última a la tracción, MPa	2150
Resistencia de cedencia, MPa	2000
Elongación, %	7

En primer lugar es necesario obtener es la magnitud de la fuerza que será transmitida de un cono a otro, pues ésta será el límite que tendremos de μW . Esto se obtiene a partir del torque aplicado al pedal con la siguiente ecuación.

$$F(l) = \frac{T}{r(l)} \tag{4.23}$$

En donde F es la fuerza de fricción mínima necesaria, T es el torque al que estará sometido el cono, y $r(l)$ es el radio del cono con respecto a su longitud.

Con la finalidad de reducir los esfuerzos en los conos, como ya se había mencionado antes, se colocará una reducción de torque antes del cono de entrada. Entonces si tomamos en cuenta que de acuerdo con lo dicho en el segundo capítulo la fuerza que se ejerce en el pedal es de 512.5 N, y la distancia del brazo del pedal es de 18 cm., entonces el torque resultante del pedal es de 92.25 Nm. Ahora, la reducción que pondremos será de 1:7. El valor de la reducción fue obtenido por medio de iteraciones de manera que existiera un equilibrio entre el tamaño del sistema y los esfuerzos en los conos. El valor del torque aplicado al cono A es de 13.18 Nm.

Ahora se puede calcular la fuerza que se necesita transmitir en cada punto del cono en función de la longitud con la ecuación (4.23). Esta fuerza es la mínima fuerza de fricción requerida. La gráfica de las fuerzas es mostrada en la Figura 4.8.

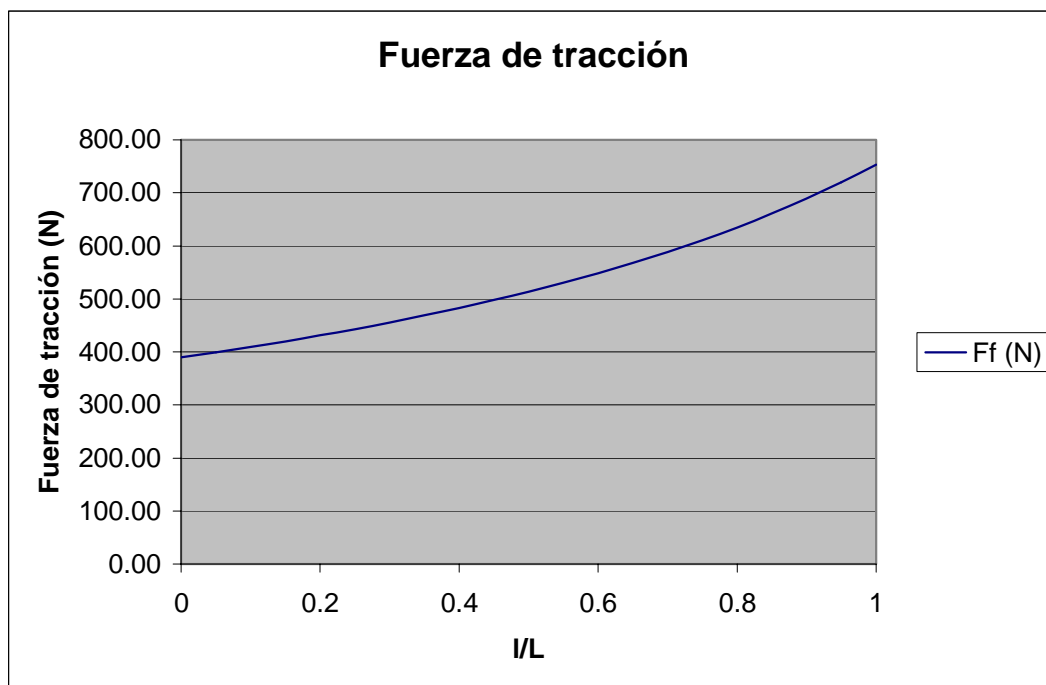


Figura. 4.8 Gráfica de fuerza de fricción mínima necesaria para poder transmitir la potencia de un cono a otro.

Ahora bien, esta fuerza será resultado de la fuerza normal W que se aplique entre el cono y el rodillo. Aunque en cada punto no es necesario tener la misma fuerza normal, es difícil variarla para cada posición del anillo con respecto al cono, entonces esta se mantendrá constante y debe ser basada en el valor máximo representado en la gráfica anterior que es de 753 N. Para esto habrá que basarse en la primera ley de Amontons (ecuación 4.8) y queda de la siguiente forma.

$$W = \frac{F}{\mu} = \frac{753}{0.78} = 965N$$

Esta es la fuerza normal mínima necesaria para poder producir la fuerza de fricción necesaria, como ya se había mencionado antes, sin embargo es el punto en que la fuerza es 753 N, o sea en el punto $l/L=1$, el contacto estará en estado de deslizamiento inminente, por lo que es deseable aumentar la fuerza W de manera que nunca se presente esta situación.

Entonces lo que se hará será aumentar la fuerza un 10%, no más, para no aumentar demasiado los esfuerzos en los conos. Como resultado de esto se obtiene una fuerza $W = 1062$ N. Esta es la fuerza necesaria para que funcione el sistema, después se verá como será producida.

El siguiente paso será calcular los esfuerzos, primero de contactos de Hertz, y después de tracción entre los dos elementos a la vez. Primero se hará entre el primer cono y el anillo, y después entre el anillo y el segundo cono.

Entonces utilizando la ecuación (4.13b) se obtienen las presiones máximas de Hertz utilizando el valor de W mencionado arriba, y L_r será dado por el ancho del anillo que en principio se asumirá de 8 mm. El valor de E^* se obtuvo de la ecuación (4.11) basándose en el valor de E de la Tabla 4.2 tomando al cono y al anillo del mismo material. Y R se obtuvo de la ecuación (4.10) haciendo una graficación del valor para cada punto en función de la longitud del cono, de la siguiente manera.

Si R_a es el radio menor del cono A, L es la longitud total del cono y l es la longitud parcial para cada punto del cono a partir del extremo del radio mayor del cono (Figura 4.9), entonces se puede decir que

$$r(l) = R_a + (L - l) \tan \alpha \quad (4.24)$$

Y entonces

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a + (L - l) \tan \alpha} + \frac{1}{R_r} \quad (4.25)$$

donde R_r es el radio del anillo.

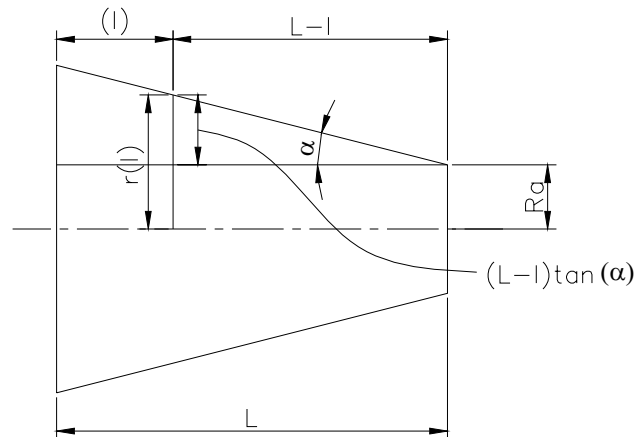


Figura 4.9. Obtención de $r(l)$ para el cono A

Una vez teniendo todos los valores de (p_0) se pueden comparar los máximos con el valor crítico de p_0^Y . En la Figura 4.11 se muestra la gráfica de p_0 contra l/L .

Para el cono B, el valor del radio está dado por la siguiente ecuación:

$$r(l) = R_b + l \tan \alpha$$

Y ahora se puede obtener R para el cono B:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_b + l \tan \alpha} + \frac{1}{R_r}$$

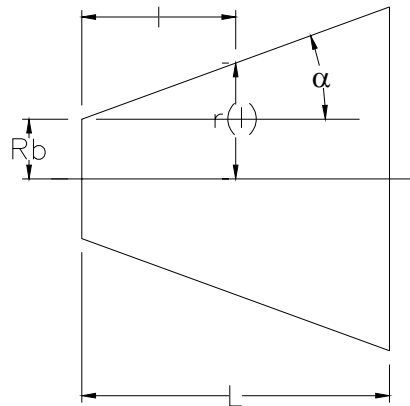


Figura 4.10. Obtención de $r(l)$ para el cono B

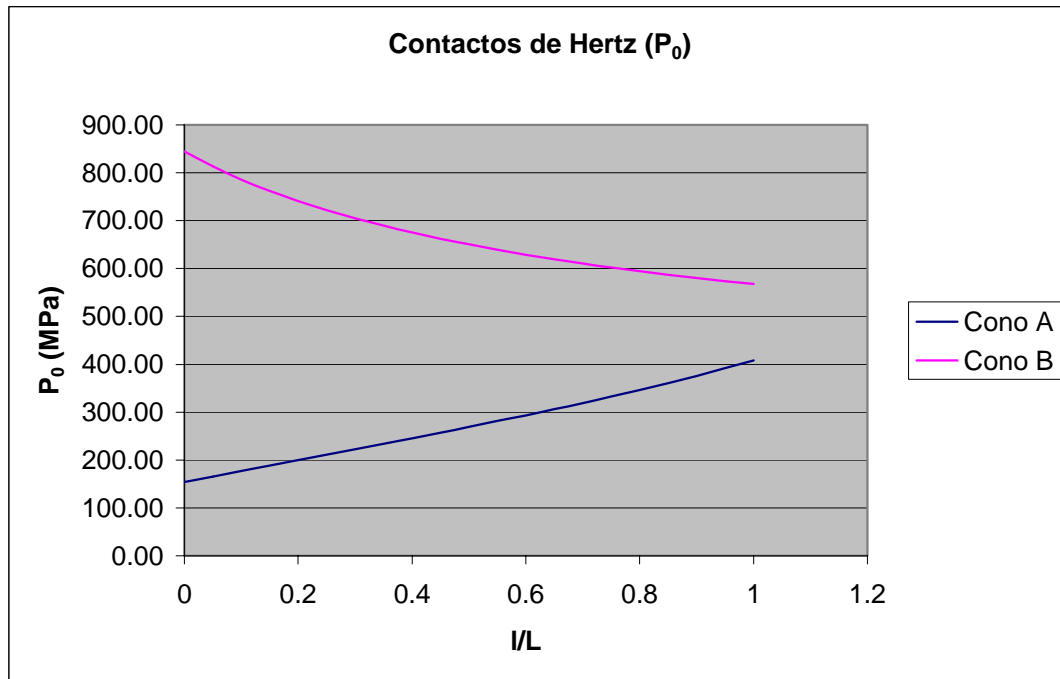


Figura 4.11. Gráfica que muestra los valores de p_0 contra la longitud proporcional de los conos.

El valor máximo es de 389.22 MPa para el cono A y 805.1 MPa para el cono B, entonces se compara con el valor crítico de p_0 , que lo obtenemos de la ecuación 4.19. Para esto es necesario determinar el factor de seguridad. Como es deseable ahorrar peso se utilizará un factor de 2 para que sea pequeño. Entonces si la resistencia de cedencia del material es igual a 2000 MPa como se vió en la Tabla 4.2, se obtiene el esfuerzo de diseño:

$$\sigma_d = \frac{\sigma_y}{N} = \frac{2100\text{MPa}}{2} = 1050\text{MPa}$$

Entonces se obtiene el valor crítico de p_0 :

$$p_{0crit} = 1.67\sigma_d = 1.67(1050\text{MPa}) = 1753.5\text{MPa}$$

Es menor, por lo tanto no existirá deformación plástica causada por el esfuerzo normal.

A continuación se obtendrán los valores de esfuerzo cortante de tracción τ producido por la tracción entre los conos con las ecuaciones (4.20) utilizando el de valor de $\mu = 0.78$ como se mencionó anteriormente y los valores de a , b y d de la ecuación (4.13a) y (4.22) Como resultado se obtiene la gráfica de la Figura 4.12 para varias posiciones del anillo.

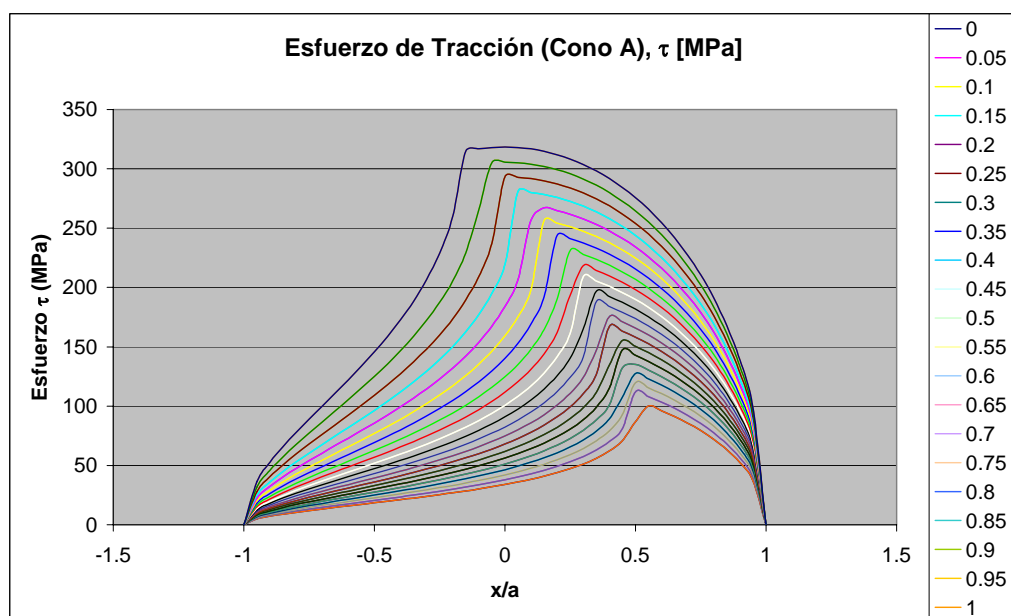


Figura 4.12a. Gráfica de esfuerzo de tracción $\tau(x)$ contra la distancia x/a para las posiciones $l/L = 0, 0.5$ y 1 .

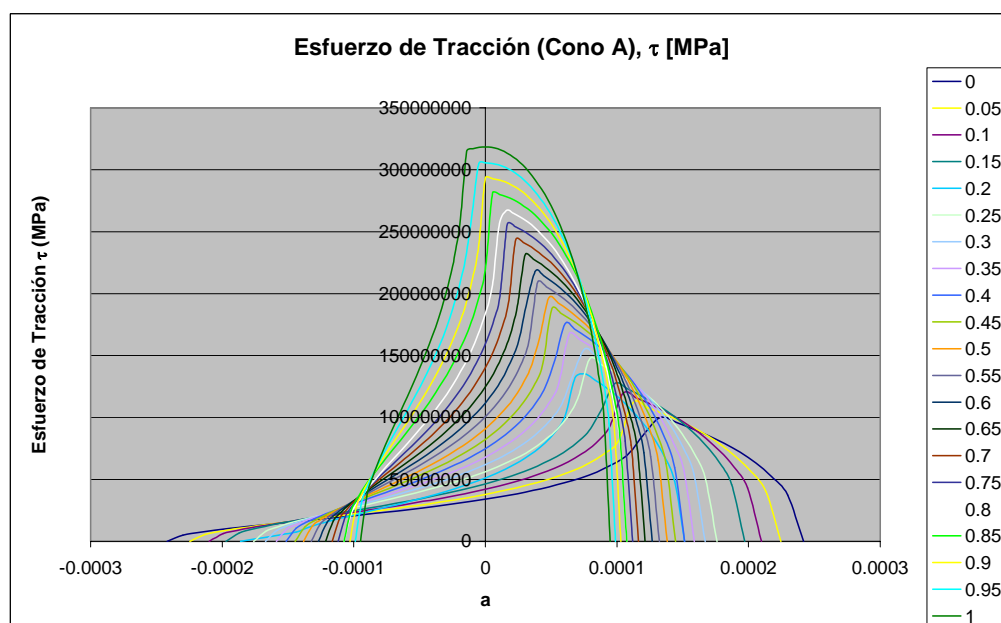


Figura 4.12b. Gráfica de esfuerzo de tracción $\tau(x)$ contra la distancia x/a para las posiciones $l/L = 0, 0.5$ y 1 .

El siguiente paso es realizar el mismo análisis para el otro cono y el anillo para comprobar que en ese caso el material también es capaz de soportar los esfuerzos. Esto lo vemos en la Figura 4.13.

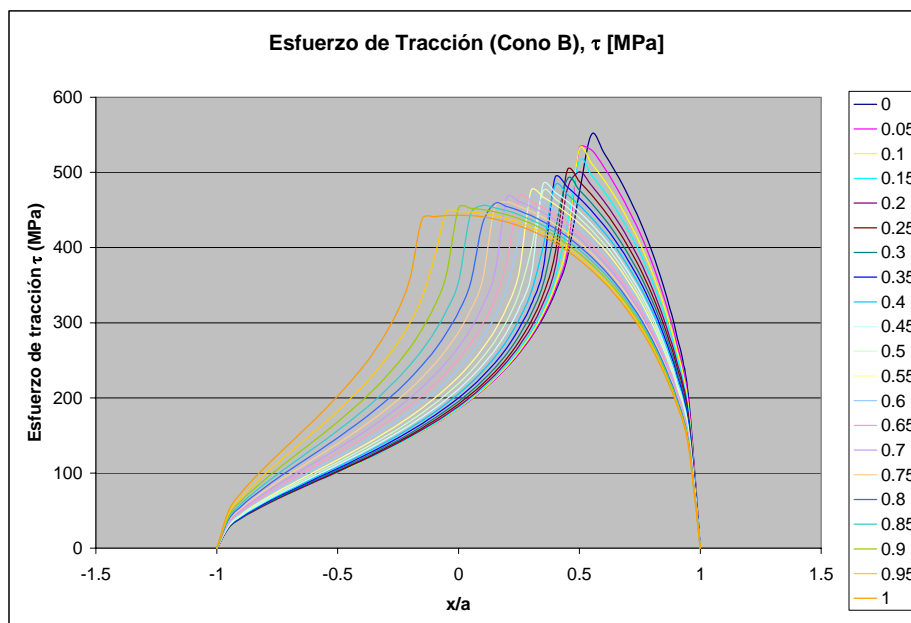


Figura 4.13a. Gráfica de esfuerzo de tracción $\tau(x)$ contra la distancia x/a para las posiciones $l/L = 0, 0.5$ y 1 .

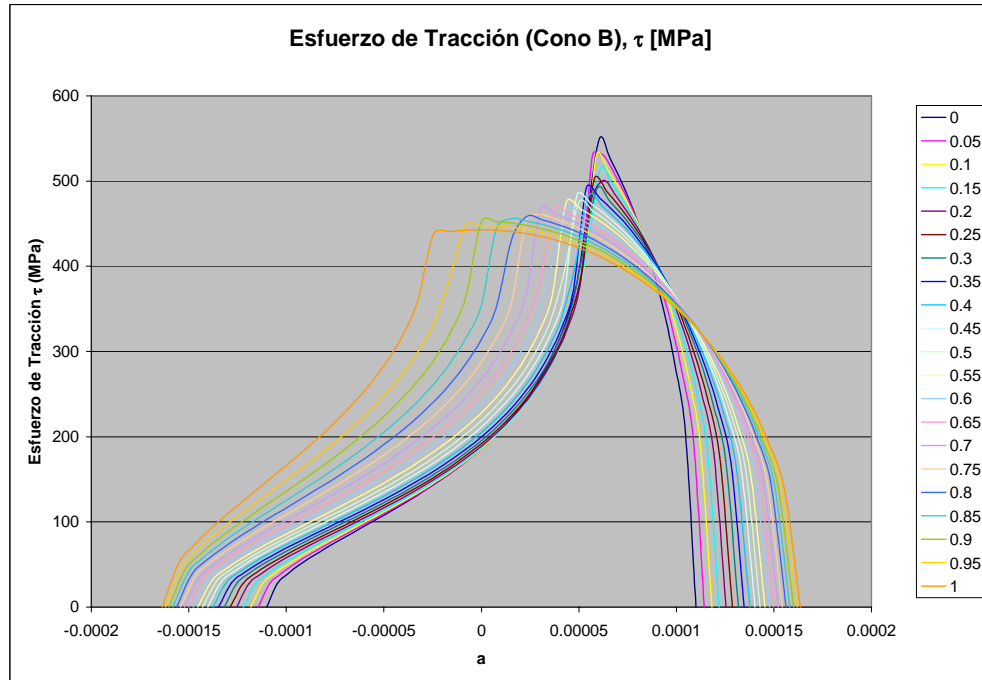


Figura 4.13b. Gráfica de esfuerzo de tracción $\tau(x)$ contra la distancia x/a para las posiciones $l/L = 0, 0.5$ y 1 .

Anteriormente se ha comprobado que no habrá cedencia a causa del la fuerza normal, sin embargo el esfuerzo total que existirá sobre los rodillos será la producto de la combinación del esfuerzo normal y del esfuerzo de tracción.

Es necesario comprobar que tampoco existirá ninguna deformación debido a esta combinación de fuerzas. Para esto se ha obtenido una gráfica en base a experimentos, la cual se utiliza como base para comparar. Es la siguiente:

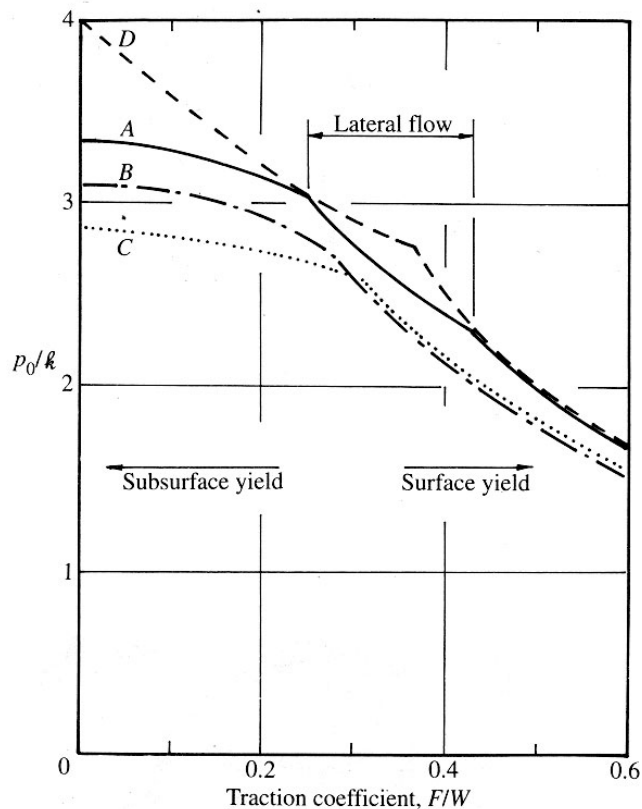


Figura 4.14. Efecto de la tracción en la superficie F/W en la máxima presión de Hertz p_0 para cedencia o "shakedown" de material. La curva A corresponde a contacto lineal (nuestro caso), primera cedencia, Tresca; la curva B a contacto lineal, primera cedencia, von Mises; curva C a contacto puntual, primera cedencia, von Mises; y la curva D a contacto lineal, después de "shakedown" o endurecimiento por deformación plástica, Tresca. [7].

En esta gráfica se utiliza la razón del esfuerzo de Hertz por contacto p_0 y el esfuerzo de cedencia por cortante del material, k , contra el coeficiente de tracción, que es la fuerza tangencial F (la fuerza de fricción) y la fuerza normal W .

Las líneas en la gráfica muestran el máximo valor que el material es capaz de soportar antes de fallar con respecto a distintas teorías de falla. La curva B representa la primera cedencia de acuerdo a von Mises para contacto lineal. Una vez sobrepasadas estas líneas se obtendría fallas ya sea por debajo de la superficie (lado izquierdo) o directamente en la superficie (lado derecho), como lo muestran las flechas en la figura. Obviamente, si lo que se desea es

que nunca exista deslizamiento el coeficiente de tracción, F/W nunca será mayor al coeficiente de fricción μ . La utilización de esta gráfica es la verdadera comprobación que se tiene para que no existan fallas en el material debido al contacto. Así se obtienen gráficas para cada uno de los conos y las comparamos con la anterior (Figura 4.15).

Desgraciadamente la gráfica original con la cual se compara solamente nos permite ver hasta el valor del coeficiente de tracción de 0.6, mientras que en los conos se tienen valores ligeramente superiores a 0.7, sin embargo vemos que la gráfica en el lado derecho es cóncava, entonces sabemos que si extendemos una línea recta tangente a la gráfica de referencia entonces la gráfica de los valores obtenidos en el sistema siempre estará por encima de esta línea. Entonces si la curva de los valores del sistema esta por debajo de esta línea recta se garantiza que no rebasará la curva de la gráfica.

Entonces es posible ver que de hecho la curva del sistema nunca rebasa la curva de la gráfica, por lo tanto los conos deben resistir.

4.2.5 Cálculo de las flechas de los conos

Hasta ahora se ha calculado la resistencia de los conos al esfuerzo superficial al que estarán sometidos y hemos visto que en teoría deben resistir el trabajo. Ahora es necesario calcular las flechas de donde estarán sujetos. Aunque de hecho los conos y sus flechas estarán hechos de una sola pieza se calculará la flecha como si esta estuviera sola sin el cono para simplificar los cálculos.

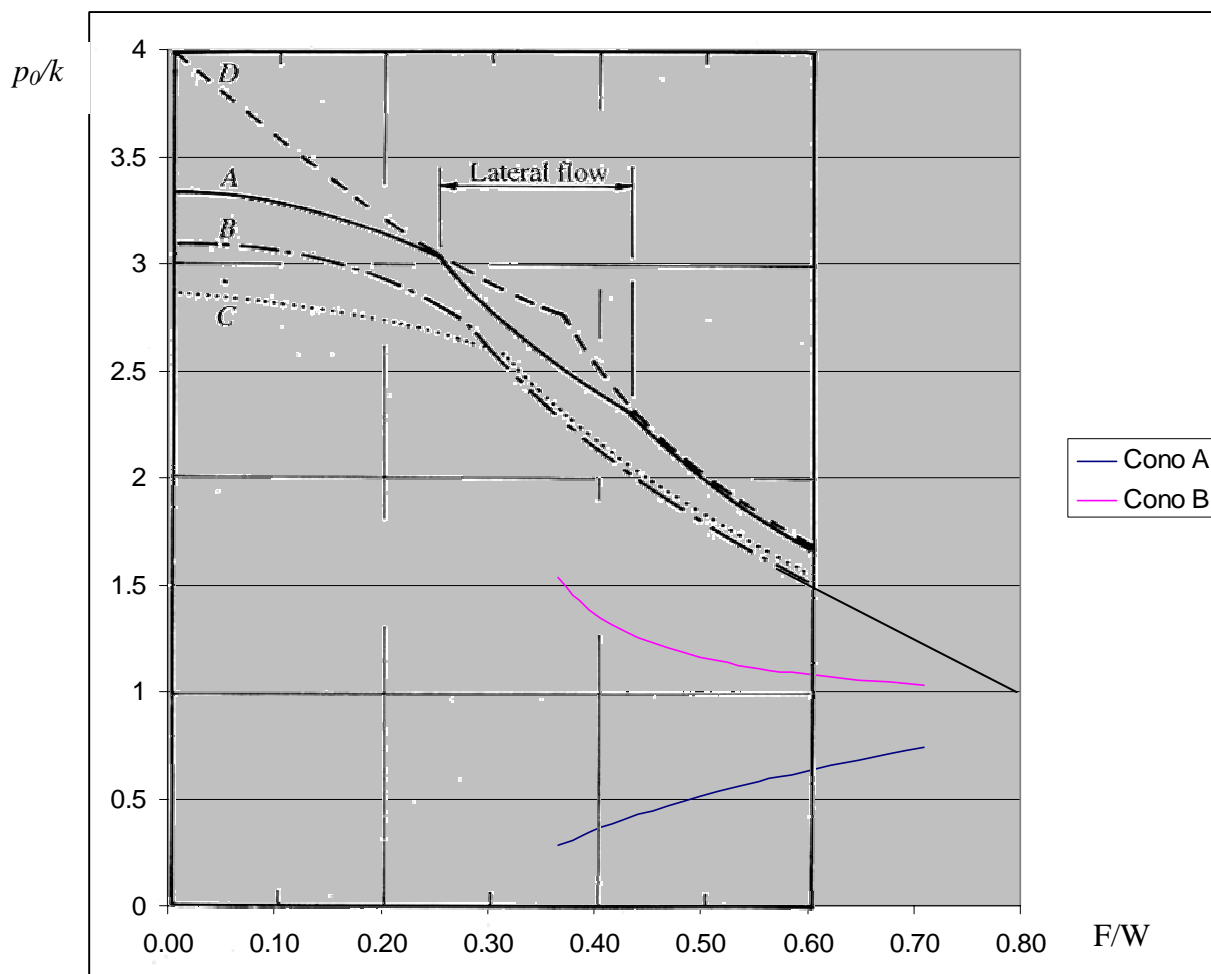


Figura 4.15. Gráficas de comprobación

El primer paso es determinar la potencia a transmitir, la cual se conoce desde el capítulo 2.

Esta es de 1.65 hp o 1230 W.

El torque a transmitir es $T_e = 13.18$ Nm y se puede asumir en toda la flecha. Ahora es necesario saber que fuerzas estarán actuando en ellas y por lo tanto es necesario realizar un análisis de fuerzas de sistema completo. Esto será realizado por medio de diagramas de cuerpo libre (Figura 4.16).

Si se eliminan el reductor de la entrada y el de la salida entonces se tiene que el sistema estará conformado por cuatro elementos ya mencionados en el Capítulo 3. Se enlistan de arriba para abajo:

1. El puente: que es con el cual se aplicará la fuerza normal entre los conos y el anillo
2. El cono B.
3. El anillo.
4. El cono A.

Se realizan los diagramas de cuerpo libre y las ecuaciones de equilibrio:

Para el puente:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= Y_1 + Y_2 - P = 0 \\ \sum M_z &= Y_2 L - \frac{1}{2} PL + M_1 + M_2\end{aligned}\tag{4.26}$$

Para el cono B:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= W - Y_1 - Y_2 = 0 \\ \sum F_z &= Z_1 + Z_2 - F_f - F_{cad} = 0 \\ \sum M_x &= T_{t2} - T_s = 0 \\ \sum M_y &= F_f l - Z_2 L + F_{cad} L = 0 \\ \sum M_z &= Wl - Y_2 L = 0\end{aligned}\tag{4.27}$$

Para el cono A:

$$\begin{aligned}\sum F_y &= Y_3 + Y_4 - W = 0 \\ \sum F_z &= F_f - Z_3 - Z_4 = 0 \\ \sum M_x &= T_{t1} - T_e = 0 \\ \sum M_y &= Z_4 L - F_f l = 0 \\ \sum M_z &= Y_4 L - Wl = 0\end{aligned}\tag{4.28}$$

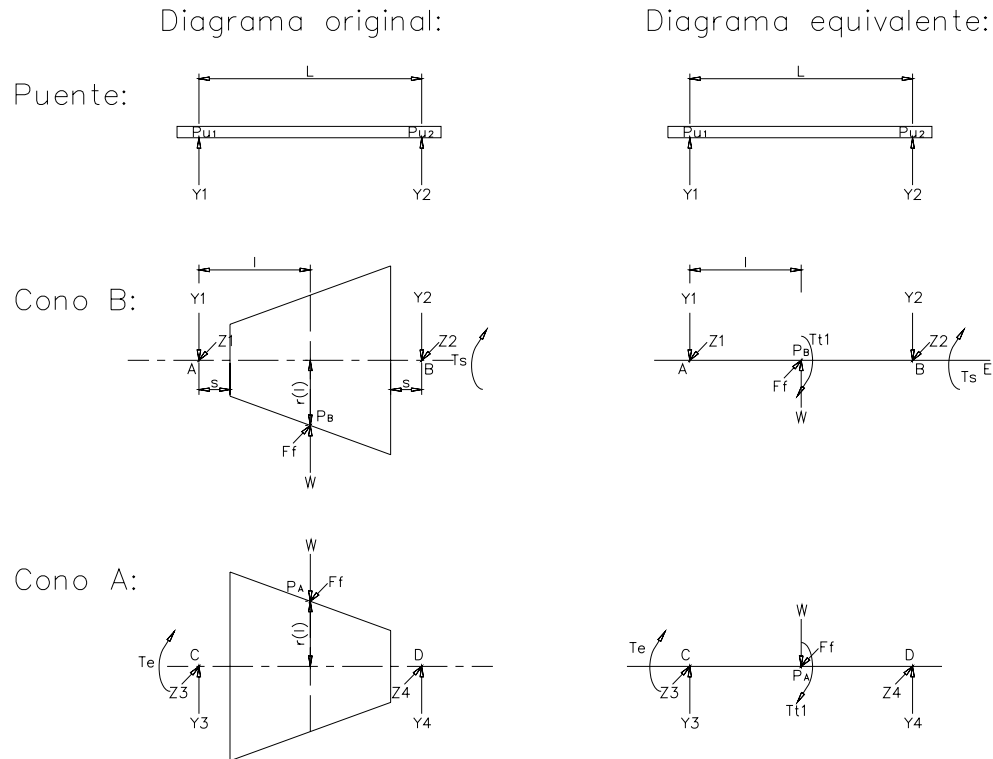


Figura 4.16. Diagramas de Cuerpo Libre

Se conocen: $T_e = 13.18 \text{ Nm}$, $P = 1062 \text{ N}$, $L = 44.86 \text{ mm}$ y l que es cambiante.

Son incógnitas: Y_1 , Y_2 , M_1 , M_2 , W , Z_1 , Z_2 , F_f , F_{cad} , T_{t2} , T_s , Y_3 , Y_4 , Z_3 , Z_4 , T_{t1} .

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 P &= W & Z_2 &= \frac{F_f l + F_{cad} L}{L} \\
 Y_1 &= P - Y_2 & Z_3 &= F_f \left(1 - \frac{l}{L}\right) \\
 Y_2 &= \frac{Wl}{L} & Z_4 &= \frac{F_f l}{L} \\
 Y_3 &= W \left(1 - \frac{l}{L}\right) & T_{t1} &= T_e \\
 Y_4 &= \frac{Wl}{L} & T_{t2} &= T_s \\
 Z_1 &= F_f + F_{cad} - Z_2 & &
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

De aquí siguen siendo incógnitas: F_f , F_{cad} , T_{t2} . Se obtienen así.

$$F_f = T_e \cdot r_a(l) \quad (4.30)$$

$$T_{t2} = F_f \cdot r_b(l)$$

Donde $r_a(l)$ y $r_b(l)$ son los radios de los conos A y B respectivamente, en función de l .

F_{cad} se obtendrá a partir del cálculo de la fuerza ejercida por la cadena. Está dada por:

$$F_{cad} = T_s \cdot r_e \quad (4.31)$$

Donde r_e es el radio de la catarina.

4.2.5.1 Cálculo de la fuerza ejercida por la cadena

Ya que la reducción que se necesita en este punto es bastante grande, será necesario tomar la catarina de menor tamaño posible, de manera que la catarina de la parte trasera no sea excesivamente grande.

Entonces se toma una catarina de 9 dientes en la parte delantera y por lo tanto se puede saber el número de dientes de la catarina de la parte trasera:

$$N_2 = N_1(VR) = 9(7) = 63 \quad (4.32)$$

Sesenta y tres dientes es de hecho un número muy elevado pero es sin embargo necesario para lograr la reducción. El paso p de la cadena que se utiliza normalmente en las bicicletas es de $\frac{1}{2}$ pulgada, o ya que se está trabajando en unidades del Sistema Internacional serían 12.5 mm. Entonces se calcula el diámetro de la catarina pequeña para poder calcular F_{cad} :

$$D_1 = \frac{p}{\text{sen}(180^\circ / N_1)} = \frac{12.5\text{mm}}{\text{sen}(180^\circ / 9)} = 36.55\text{mm} \quad (4.33)$$

Más adelante detallaremos más el cálculo de la cadena.

Una vez teniendo resuelto el sistema de ecuaciones podemos calcular las reacciones para cada posición del anillo y así conocer los valores máximos para poder dibujar después los diagramas de momentos.

Para el cono A tenemos la gráfica de reacciones mostrada en la Figura 4.17. Para el cono B está en la gráfica de la Figura 4.18.

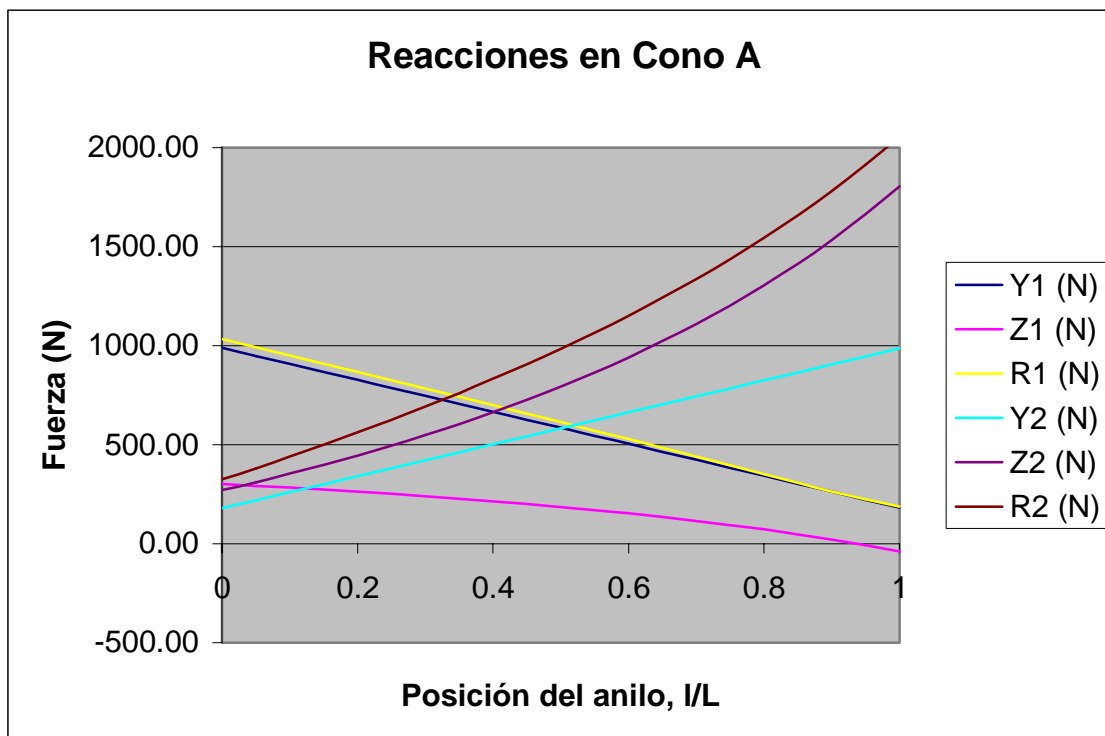


Figura 4.17. Reacciones en el Cono A. Las componentes en el eje y, en el eje z y sus resultantes.

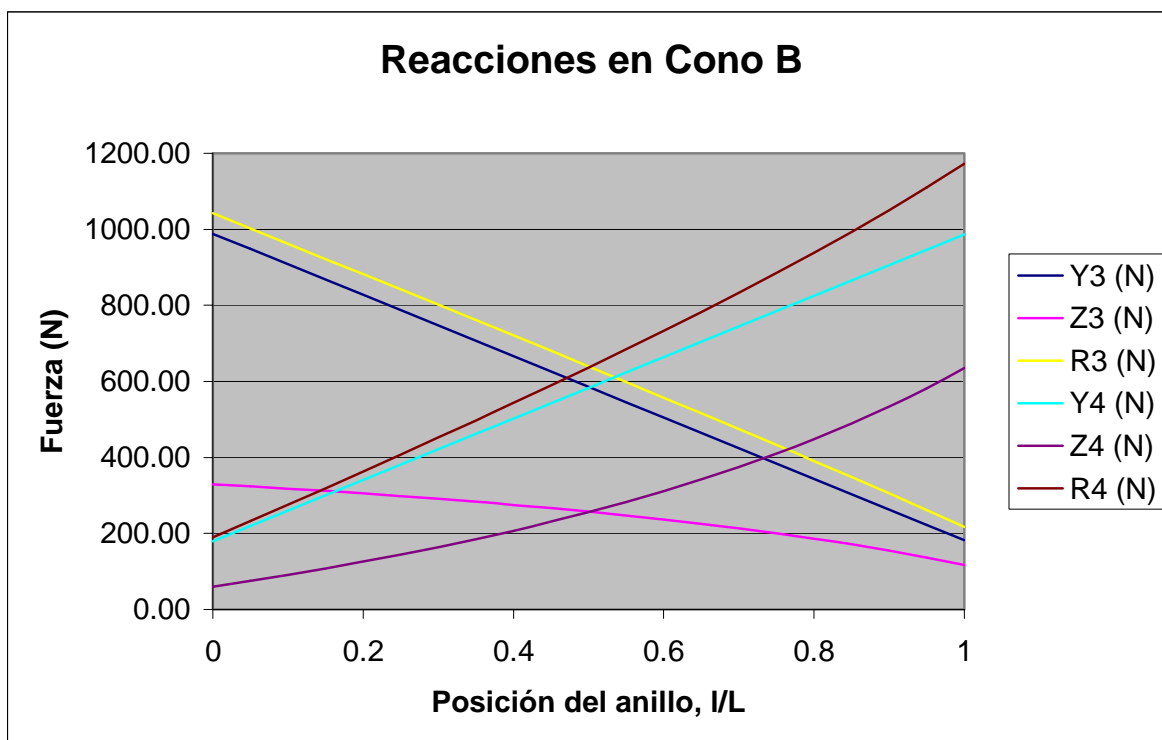


Figura 4.18. Reacciones en el Cono B. Las componentes en el eje y, en el eje z y sus resultantes.

También la gráfica del torque de salida en el cono B en la Figura 4.19.

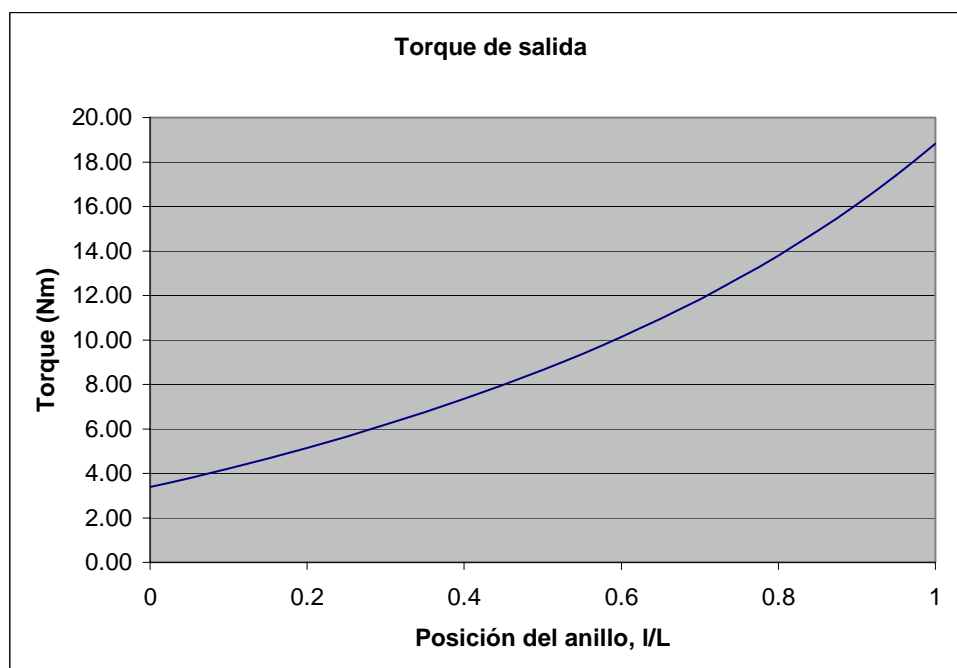


Figura 4.19. Torque de salida del cono B

Ahora a partir de estas reacciones es posible obtener los diagramas de momentos para cada una de las flechas de los conos.

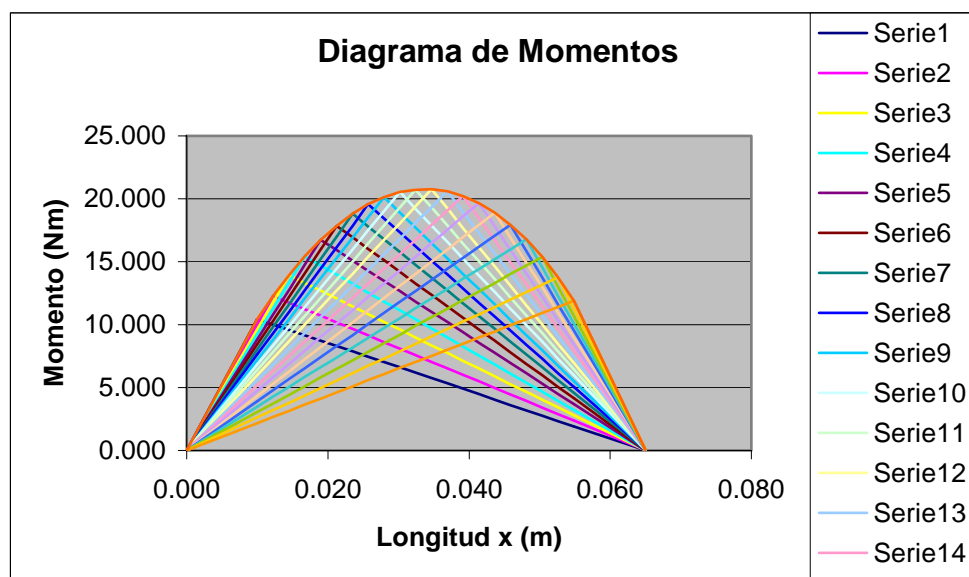


Figura 4.20. Diagrama de momentos para el Cono A.

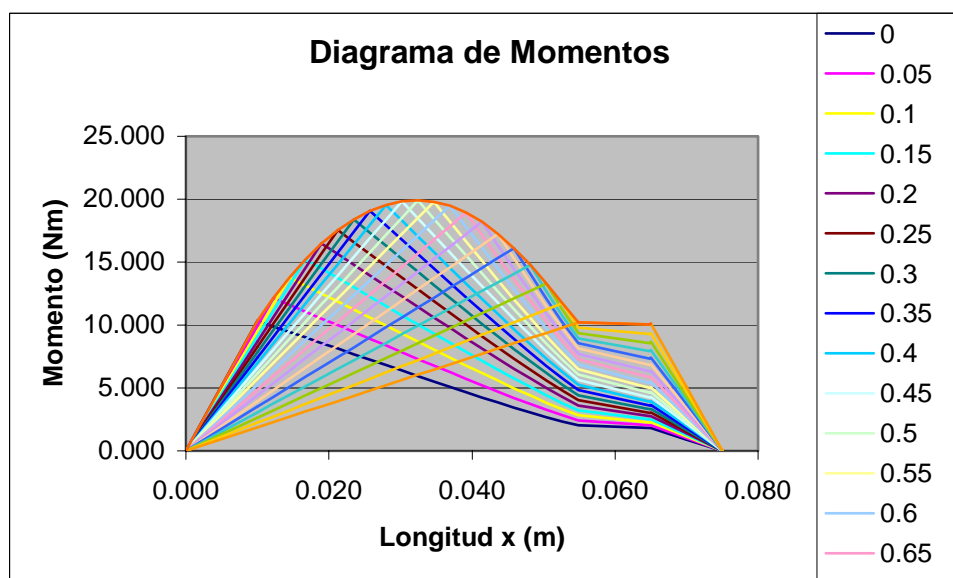


Figura 4.21. Diagrama de momentos para el Cono B.

Era de esperarse, que el momento máximo se presente cuando el anillo está en la posición central.

El material a utilizar es obviamente el mismo que se había mencionado anteriormente (AISI S2). Es necesario determinar una tensión de diseño. Vamos a utilizar un factor de seguridad de 3 para la flecha. Se seguirá este procedimiento:

Primero es necesario conocer la resistencia máxima a la tracción del material, que se llamará s_u , que en este caso lo encontramos en la Tabla 4.2, y es de 2150 MPa.

Ahora se calcula el límite de fatiga por durabilidad, s_n , que normalmente se hace a partir de la Figura 4.22. Sin embargo en esta gráfica el valor máximo de resistencia a la tracción es de 1500 MPa, y el material lo sobrepasa, por lo tanto, por regla se utiliza el valor para 1500 MPa. Entonces $s_n = 610$ MPa pues el acabado que requeriremos será un rectificado, más adelante se darán las razones.

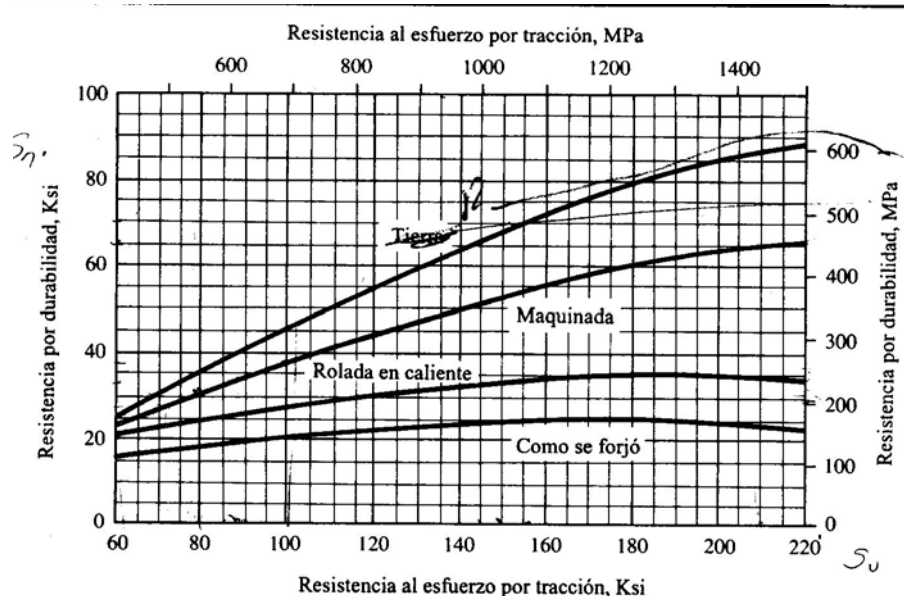


Figura 4.22, Resistencia por durabilidad contra resistencia al esfuerzo de tracción para acero para varias condiciones superficiales. [14].

Ahora se debe aplicar un factor de tamaño. Se sugiere el siguiente factor para diámetros menores a 50 mm.

$$C_s = (D/7.6)^{-0.068} \quad (4.34)$$

Se estima un valor de $C_s = 1.0$.

También se aplica un factor de confiabilidad C_R . Estos valores se obtienen por medio de pruebas y si se supone que la distribución de estas fallas sigue una distribución normal, se pueden seguir los siguientes ajustes para alto grado de confiabilidad [12].

Tabla 4.3a. Factores de confiabilidad

Confiabilidad que se desea	Factor de confiabilidad, C_R
0.50	1.00
0.90	0.90
0.99	0.81
0.999	0.75

Se escogerá una confiabilidad del 99%, por lo tanto el factor de confiabilidad $C_R=0.81$.

Ahora se puede calcular la resistencia real de durabilidad s'_n con la siguiente fórmula:

$$s'_n = s_n C_s C_R = 610(1.0)(0.81) = 494 \text{MPa} \quad (4.35)$$

Entonces la tensión de diseño es

$$\sigma_d = \frac{s'_n}{N} = \frac{494 \text{MPa}}{3} = 164.67 \text{MPa} \quad (4.36)$$

El siguiente paso será calcular los diámetros mínimos necesarios para cada punto de la flecha. Esto se hace con la siguiente ecuación:

$$D = \left[\frac{32N}{\pi} \sqrt{\left(\frac{K_t M}{s'_n} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{T}{s_y} \right)^2} \right]^{1/3} \quad (4.37)$$

Los datos generales para esta fórmula son: $N = 3$, $s'_n = 494 \text{MPa}$ y $s_y = 2000 \text{MPa}$.

Entonces:

En el cono A.

Para el punto E. Entrada de potencia.

Solo existe torsión por lo tanto no se aplica factor de concentración de esfuerzos K_t .

$$T = 13.18 \text{ Nm.}$$

$$D_{\min} = 5.5 \text{ mm.}$$

Para el punto C. Cojinete.

No existe momento flector, por lo tanto esa parte de la ecuación se elimina. El torque es el mismo: $T = 13.18 \text{ Nm}$. Entonces

$$D_{\min} = 5.5 \text{ mm.}$$

Para el punto D. Cojinete.

No existe ni momento de flexión ni torque. Entonces se calculará el diámetro en base a la fuerza cortante, igual a la reacción en el cojinete en ese punto. Esta fuerza máxima es $V = 1173 \text{ N}$ (Figura 4.11).

La tensión por esfuerzo de corte vertical sólido es

$$\tau = \frac{4V}{3A} \quad (4.38)$$

Si sustituimos τ_d en τ , y despejamos la fórmula podemos encontrar el área, pero antes encontramos τ_d

$$\tau_d = 0.577\sigma_d = 0.577(164.67 \text{ MPa}) = 95 \text{ MPa} \quad (4.39)$$

De aquí podemos calcular el área necesaria

$$A = \frac{4V}{3\tau_d} = \frac{4(1173 \text{ N})}{3(95 \text{ MPa})} = 16.5 \text{ mm}^2$$

Se calcula el diámetro a partir de $A = \pi D_C^2 / 4$ despejando D_C

$$D_C = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(16.5)}{\pi}} = 4.6 \text{ mm} \quad (4.40)$$

$$D_{\min} = 4.6 \text{ mm.}$$

Para el punto P_A. Punto de aplicación de la fuerza ejercida por el anillo.

Momento resultante máximo cuando el anillo se encuentra al centro:

$$M=20.76 \text{ Nm}$$

$$T= 13.18 \text{ Nm.}$$

Se aplicará un factor de concentración de esfuerzos como seguridad puesto que en esa región es donde se encuentra en realidad el cono y existen cambios de sección que pueden producir concentración de esfuerzos. Entonces

$$K_t = 2.5$$

$$D_{\min} = 15.3 \text{ mm.}$$

Ahora analizaremos el Cono B.

En el punto A: Cojinete

$$V=1040 \text{ N (Figura 4.12).}$$

Se calcula el área necesaria

$$A = \frac{4V}{3\tau_d} = \frac{4(1040N)}{3(95MPa)} = 14.6mm^2$$

Se calcula el diámetro a partir de $A = \pi D_c^2/4$ despejando D_c

$$D_c = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4(14.6)}{\pi}} = 4.3mm$$

$$D_{\min} = 4.3 \text{ mm.}$$

Para el punto B: Cojinete

El momento registrado es de 10.14 Nm

El torque que se utiliza es T_s cuyo valor máximo lo podemos ver en la Figura 4.13.

$$T_s = 18.83 \text{ Nm.}$$

$$D_{\min} = 12 \text{ mm.}$$

Para el punto S: Catarina

No existe momento de flexión.

El torque está dado por T_s , o sea que se toma el máximo

$$T_s = 18.83 \text{ Nm.}$$

Entonces se calcula el diámetro mínimo

$$D_{\min} = 6.2 \text{ mm.}$$

En el punto P_B : Punto de aplicación de la fuerza.

$$M_{\max} = 19.91 \text{ Nm}$$

$$T_s = 18.83 \text{ Nm.}$$

También se aplicará el factor de concentración de esfuerzos $K_t = 2.5$.

$$D_{\min} = 15.1 \text{ mm.}$$

4.3 Engranés

El diseño implica una reducción de 7:1 en el torque aplicado al pedal, para esto se hace necesario el cálculo del sistema de engranes planetarios.

Los engranes utilizados tendrán la configuración presentada en la Figura 4.23.

El sistema está calculado para que la velocidad del pedal sea de 127 rpm, por lo tanto a la salida de esta parte del sistema se tendrá una velocidad siete veces mayor, o sea, 891 rpm.

Como es necesaria un relación de velocidad de 7, tenemos que buscar un conjunto de relaciones que multiplicados al final nos den la que deseamos.

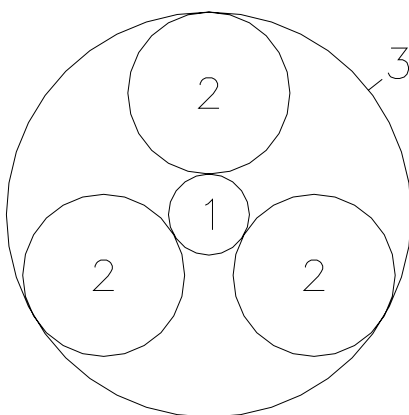


Figura 4.23. Configuración de los engranes planetarios. El engrane 1 estará conectado con el cono A, los engranes 2, que son tres para distribuir la carga, estarán fijos en su eje con rotación libre, y el engrane 3, que es interno será movido por el pedal.

$$VR_1 = 3 \quad \text{y} \quad VR_2 = 2.33$$

Estas dos relaciones de velocidad surgieron de la siguiente manera. Si se observa la relación de velocidad entre el engrane 1 y el 3 es la relación final de 7 necesaria, entonces las dos relaciones intermedias pueden surgir de la siguiente manera.

Suponiendo que el diámetro del engrane 1 $d_1 = 1$. Entonces como la relación entre el engrane 1 y el 3 es de 7, el diámetro del engrane 3 debe ser $d_3 = 7$. Entonces para encontrar el diámetro del engrane dos se puede deducir que

$$d_3 = d_1 + 2d_2 \tag{4.41}$$

Despejando d_2

$$d_2 = \frac{d_3 - d_1}{2} = \frac{7d_1 - d_1}{2} = 3d_1 = 3 \tag{4.42}$$

También vemos que

$$VR_1 = \frac{d_2}{d_1} = 3, \quad VR_2 = \frac{d_3}{d_2} = \frac{7}{3} = 2.333 \quad \text{y} \quad VR = VR_1(VR_2) = 3(2.333) = 7$$

Para encontrar el número de dientes en cada engrane es necesario determinar el número de dientes del engrane 1. Se dice que son $N_1 = 20$. Ahora podemos obtener el número de dientes para los engranes 2 y 3 utilizando las relaciones de velocidad.

$$N_2 = N_1(VR_1) = 20(3) = 60 \quad (4.43)$$

$$N_3 = N_1(VR) = 20(7) = 140 \quad \text{o} \quad N_3 = N_2(VR_2) = 60(2.333) = 140$$

Los diámetros de paso reales de cada engrane esta dado por

$$D_i = N_i m \quad (4.44)$$

Donde m es el módulo métrico del engrane. Para este caso, ya que se requiere que no sea muy grande y que sea capaz de soportar los esfuerzos se ha escogido $m = 1.25$, pues con este módulo se ha encontrado un buen equilibrio entre estos dos factores. Entonces los diámetros son

$$D_1 = 20(1.25) = 25\text{mm}$$

$$D_2 = 60(1.25) = 75\text{mm}$$

$$D_3 = 140(1.25) = 175\text{mm}$$

Se debe determinar el addendum a , el dedendum b , el espaciamento c , la profundidad de trabajo h_k y la profundidad total h_t .

$$a = 1m = 1.25\text{mm}$$

$$b = 1.25m = 1.25(1.25) = 1.375\text{mm}$$

$$c = 0.25m = 0.25(1.25) = 0.3125\text{mm}$$

$$h_t = a + b = 2.625\text{mm}$$

$$h_k = 2a = 2.5\text{mm}$$

(4.45)

$$\begin{aligned} D_{e1} = D_1 + a = 27.5\text{mm} & \quad D_{e2} = D_2 + a = 77.5\text{mm} & \quad D_{e3} = D_3 + b = 177.75\text{mm} \\ D_{i1} = D_1 - b = 22.5\text{mm} & \quad D_{i2} = D_2 - b = 72.25\text{mm} & \quad D_{i3} = D_3 - a = 172.5\text{mm} \end{aligned} \quad (4.46)$$

La velocidad tangencial se calcula a partir de la velocidad de rotación del pedal que es $n_p = 127.32$ rpm que convertido a rad/s nos da $\omega_p = 13.33$ rad/s. La velocidad tangencial esta dada por

$$v_t = \omega_3 r_3 = (13.33 \text{ rad/s})(.175 \text{ m}) = 1.17 \text{ m/s} \quad (4.47)$$

Se calculara la fuerza tangencial W_t a partir de un análisis de equilibrio del conjunto de engranes a partir del diagrama de cuerpo libre presentado en la Figura 4.24.

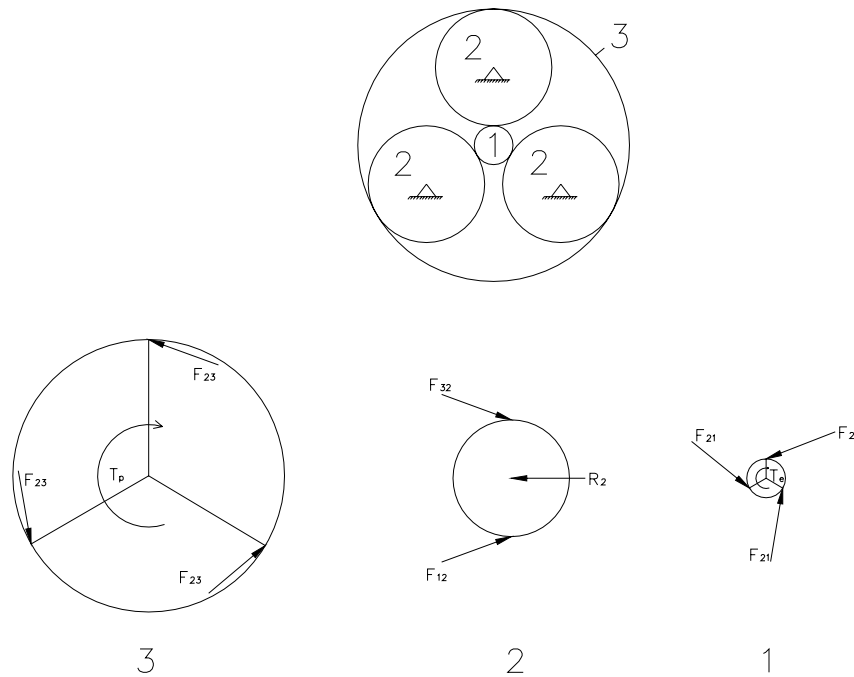


Figura 4.24. Diagrama de cuerpo libre para el conjunto de engranes

Para el engrane 3:

$$\begin{aligned} \sum M_0 &= 3F_{23}r_3 \cos \phi - T_p = 0 \\ F_{23} &= \frac{T_p}{3r_3 \cos \phi} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Para el engrane 2:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 2F_{32} \cos \phi - R_2 = 0 \\ \sum F_y &= F_{23} \text{sen} \phi - F_{23} \text{sen} \phi = 0 \\ \sum F_y &= 0\end{aligned}\quad (4.49)$$

Para el engrane 1:

$$\begin{aligned}\sum M_0 &= 3F_{21}r_1 \cos \phi - T_e = 0 \\ F_{21} &= \frac{T_e}{3r_1 \cos \phi}\end{aligned}\quad (4.50)$$

Donde ϕ es el ángulo de presión que es de 20° . Además sabemos que $F_{32} = F_{23} = F_{21} = F_e$.

Entonces para saber W_t solo falta encontrar F_e y multiplicarlo por el coseno de α .

$$\begin{aligned}F_e &= \frac{T_p}{3r_3 \cos \phi} = \frac{92.25 \text{Nm}}{3 \left(\frac{0.175 \text{m}}{2} \right) \cos 20^\circ} = 374 \text{N} \\ W_t &= F \cos \phi = (374 \text{N}) \cos 20^\circ = 351.4 \text{N}\end{aligned}\quad (4.51)$$

Por regla el ancho de la cara F se calcula a partir de $F = 12m$ por lo tanto

$$F = 12(1.25) = 15 \text{ mm.}$$

Existe dos tipos de esfuerzos actuando en los dientes del engrane, esfuerzo por flexión y por contacto. Se comenzará por calcular el esfuerzo por flexión.

El esfuerzo por flexión se calcula por

$$\sigma_i = \frac{K_a W_t}{K_v} \frac{K_s K_B}{Fm} \frac{K_m}{J_i}\quad (4.52)$$

Donde

K_a = Factor de aplicación para la resistencia a la flexión

K_s = Factor de tamaño para la resistencia a la flexión

K_m = Factor de distribución de carga para la resistencia a la flexión

K_B = Factor de espesor de la corona

K_v = Factor de dinámica para la resistencia a la flexión.

J_i = Factor de geometría.

K_a , Factor de aplicación

Se obtiene a partir de la Tabla 4.4.

Tabla 4.3b. Factores de aplicación sugeridos [12].

Fuente de poder	Máquina que es impulsada			
	<i>Uniforme</i>	<i>Choque ligero</i>	<i>Choque moderado</i>	<i>Choque pesado</i>
<i>Uniforme</i>	1.00	1.25	1.50	1.75
<i>Choque ligero</i>	1.20	1.40	1.75	2.25
<i>Choque moderado</i>	1.30	1.70	2.00	2.75

Se eligió lo siguiente, según los criterios de la referencia [12]

Fuente de poder:

Choque ligero: turbina de agua, impulsor de velocidad variable

Máquina que es impulsada:

Choque moderado: bombas centrífugas de alta velocidad, bombas recíprocas y compresores, transportadores para trabajo pesado, impulsores para herramientas mecánicas, mezcladores de concreto, maquinaria textil, molidoras para carne, sierras.

Por lo tanto $K_a = 1.75$

K_s , Factor de tamaño

Según la AGMA se puede utilizar un factor de tamaño de 1.00 para casi todos los engranes e incluso se recomienda este valor para módulos métricos menores a 5, el cual es nuestro caso, por lo tanto $K_s = 1.00$

K_m , Factor de distribución de carga

Para determinar este factor se utiliza la gráfica de la Figura 4.26.

Se determinará más adelante su valor.

K_B , Factor de espesor de la corona

Este factor se basa en la relación entre la altura del diente y el espesor de la corona,

$m_B = \frac{t_R}{h_t}$. Cuando $m_B > 1.2$ la corona es lo suficiente resistente y rígida para soportar los

dientes y $K_B = 1.0$. Por lo tanto el espesor de la corona debe ser

$$t_R = 1.2h_t = 1.2(2.625) = 3.15\text{mm} \quad (4.53)$$

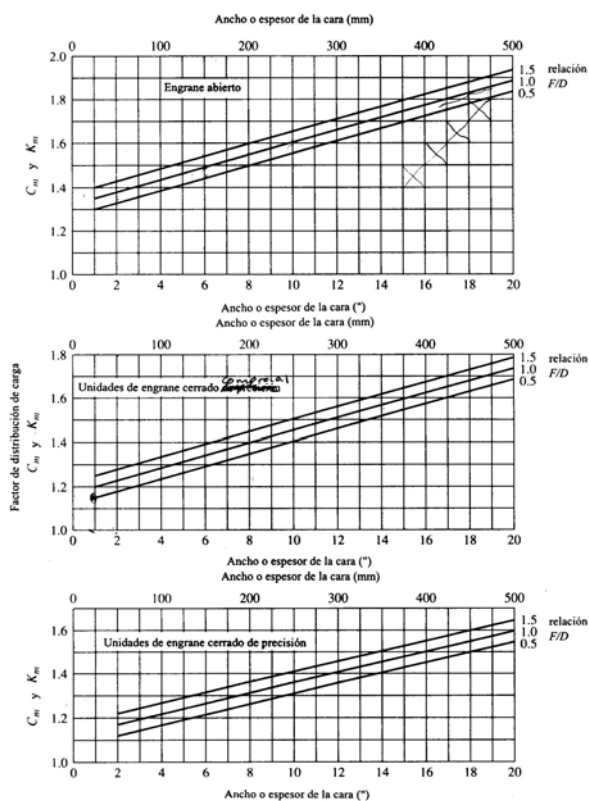


Figura 11-27 Factor de distribución de carga, K_m y C_m

Figura 4.26. Factor de distribución de carga.

K_v , Factor de dinámica.

Este factor sirve para considerar el hecho de que existen momentos de impacto en los dientes. Este factor se basa en los números de calidad AGMA mostrados en la Figura 4.27. Se utilizará un número de calidad $Q_v = 5$ puesto que no se tendrá mucha precisión o puede ser que se presenten desalineamientos. Entonces para una velocidad de paso $v_t = 1.17$ m/s, obtenemos que $K_v = 0.81$.

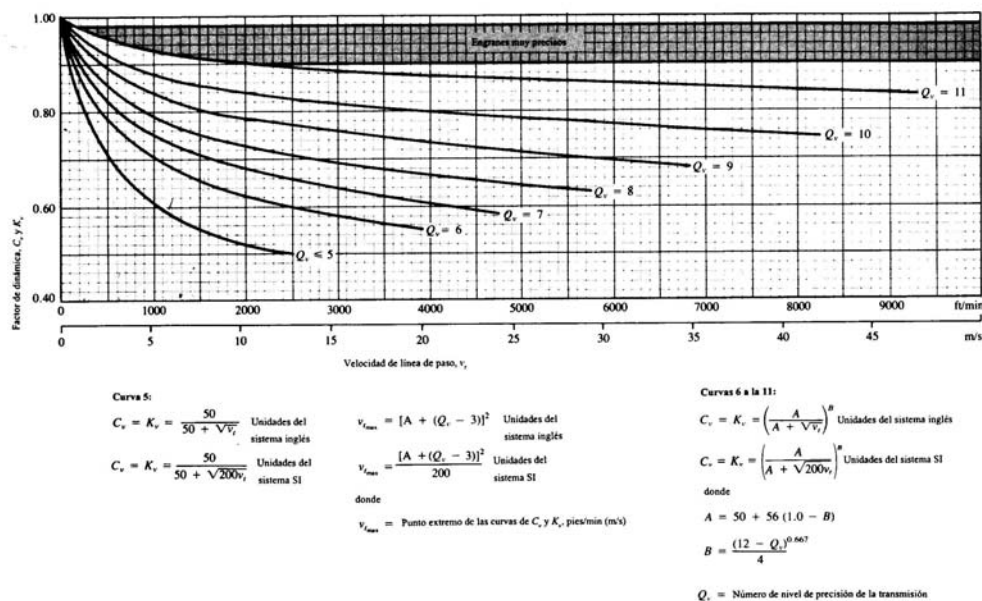


Figura 4.27. Factor de carga dinámica.

Es necesario escoger las características necesarias del material para los engranes para poder determinar si es capaz de soportar los esfuerzos. Este se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4.4. Material para los engranes [12]

Material

Se escogió Acero Carburizado y endurecido en la superficie

	Esfuerzo de tensión permisible	Esfuerzo por contacto permisible
	Grado 2 (MPa)	
58-64 HRC	450	1560

Ahora es posible calcular los esfuerzos que actúan en los engranes utilizando la ecuación mencionada anteriormente. Sin embargo, para acercarnos más a nuestro objetivo es necesario reducir el tamaño, así que tomaremos ciertas medidas en las dimensiones de los engranes, aunque de hecho con esto podríamos estar restándole vida a los mismos. Lo que se hará será reducir el ancho de la cara y comparar los esfuerzos con el ancho de cara nominal contra los de la cara reducida. El ancho de la cara nominal, como ya se había mencionado es de 15 mm., mientras que el ancho cara con la que se hará la comparación tendrá tan solo 9 mm. de ancho. Se presentan los resultados para cada uno de los engranes en la siguiente tabla.

Tabla 4.5. Esfuerzos por flexión

<i>Factores de corrección</i>			Nominal	Corregido
$K_R=$	1	$\sigma_1=$	221.91 MPa	369.84 MPa
$K_L=$	1	$\sigma_2=$	144.09 MPa	240.16 MPa
$K_s=$	1	$\sigma_3=$	130.53 MPa	217.56 MPa
$K_B=$	1			
$K_v=$	0.81	$\sigma_{max}=$	450 MPa	82.19% de σ_{max}
$K_a=$	1.75			53.37% de σ_{max}
$K_m=$	1.37			48.35% de σ_{max}
$J_1=$	0.25			
$J_2=$	0.385			

Los factores K_L y K_R mostrados en la tabla son utilizados para determinar σ_{max} para vida útil, de la siguiente forma. Valores para K_L

Tabla 4.6a. Factor de vida útil [12].

Número de ciclos de carga, N	K_L
10^7	1.00
10^8	0.92
10^9	0.97
10^{10}	0.80

Valores para K_R

Tabla 4.6b. Factor de confiabilidad [12].

Confiabilidad que se requiere	K_R
0.90	0.85
0.99	1.00
0.999	1.25
0.9999	1.50

Se calculó para una vida útil de 10^7 ciclos de carga y una confiabilidad de 0.99. Estos valores se utilizan en base a la tensión por flexión calculada de la siguiente forma.

$$\sigma'_t = \sigma_t (K_R / K_L)$$

Sin embargo en este caso se ha escogido un material bastante más resistente para poder hacer la reducción del ancho de la cara obteniendo los resultados mostrados en la Tabla 4.5 utilizando el material cuyas características se muestran en la tabla 4.4.

Los factores de geometría J se han obtenido de la Figura 4.28.

Ahora es necesario calcular la resistencia de los engranes por los esfuerzos debidos al contacto. La ecuación de esfuerzo debido al contacto es

$$\sigma_c = C_p \sqrt{\frac{C_a C_s C_m W_t}{C_v F D_p I}} \quad (4.54)$$

Donde

C_p es el módulo elástico. Este valor se obtiene de la tabla 4.7.

Se ha escogido un valor de $C_p = 191$ MPa pues ambas partes estarán hechas de acero.

C_a es el factor de aplicación y es igual a K_a .

C_s es el factor de tamaño es igual a K_s

C_m es el factor de distribución de carga y es igual a K_m

C_v es el factor dinámico y es igual a K_v

D_P es el diámetro de piñón.

I es el factor de geometría. Este se obtiene de la grafica mostrada en la Figura 4.29.

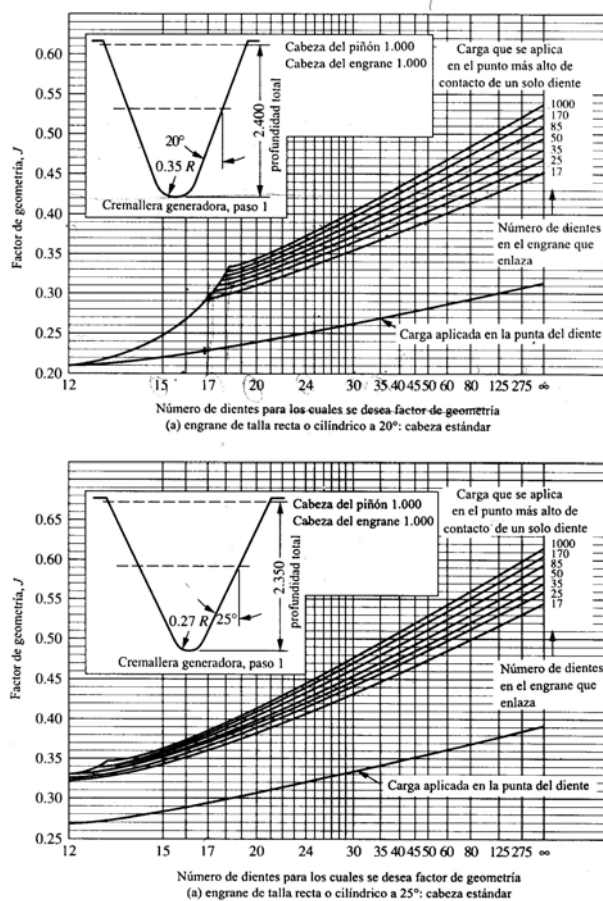


Figura 4.28. Factor de geometría J . [12]

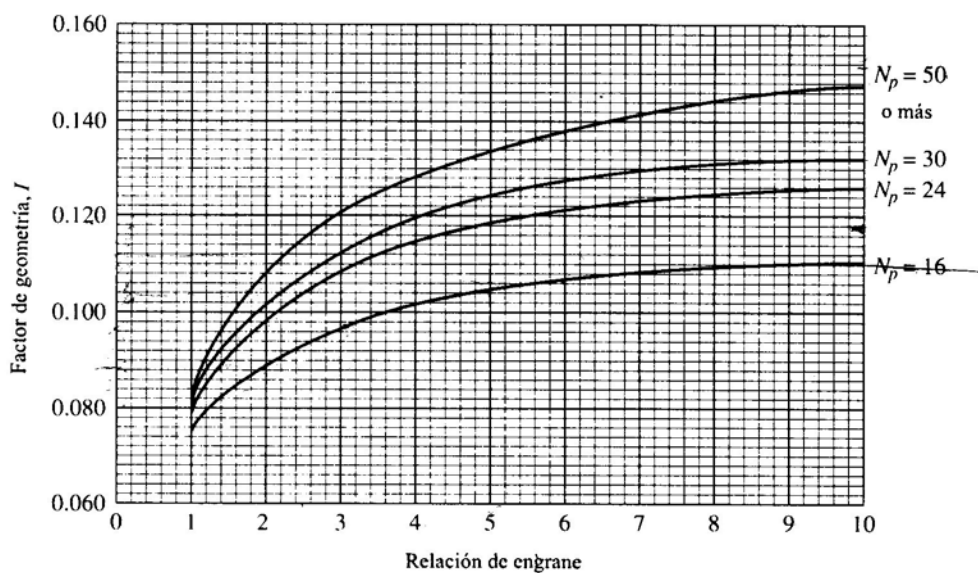
Tabla 4.7. Coeficiente elástico, C_p . [12].

		<i>Material para fabricar engranes y Módulo de elasticidad, E_G (MPa)</i>					
<i>Material para el piñón</i>	E_G	<i>Acero 2×10^5</i>	<i>Hierro maleable 1.7×10^5</i>	<i>Hierro nodular 1.7×10^5</i>	<i>Hierro fundido 1.5×10^5</i>	<i>Bronce/aluminio 1.2×10^5</i>	<i>Bronce/estaño 1.1×10^5</i>
<i>Acero</i>	2×10^5	191	181	179	174	162	158
<i>Hierro maleable</i>	1.7×10^5	181	174	172	168	158	154
<i>Hierro nodular</i>	1.7×10^5	179	172	170	166	156	152
<i>Hierro fundido</i>	1.5×10^5	174	168	166	163	154	149
<i>Bronce/aluminio</i>	1.2×10^5	162	158	156	154	145	141
<i>Bronce/estaño</i>	1.1×10^5	158	154	152	149	141	137

La elección del material ahora se hace en función del factor de vida útil K_L . Los valores se muestran en la tabla. 4.8.

Tabla 4.8. Factor de vida útil [12].

Número de ciclos de carga, N	K_L
10^7	1.00
10^8	0.88
10^9	0.78
10^{10}	0.69



(a) ángulo de presión a 20° (diente de profundidad total = $1/P_d$)

Figura 4.29. Factor de geometría I [12].

Los valores se muestran en la siguiente tabla en la cual se hizo la misma comparación entre los dos anchos de cara F .

Tabla 4.9. Esfuerzos debidos a contacto.

<i>Factores de corrección</i>			Nominal	Corregido
$K_L=$	1	$\sigma_{23c}=$	1072.34 MPa	1319.96 MPa
$C_s=$	1	$\sigma_{12c}=$	619.11 MPa	786.28 MPa
$C_p=$	191			
$I=$	0.088	$\sigma_{max}=$	1560 MPa	84.61% de σ_{max}
$C_v=$	0.81			50.40% de σ_{max}
$C_a=$	1.75			
$C_m=$	1.37			

Ahora se ha escogido un material que cumpla con las características:

Tabla 4.10. Material escogido para la fabricación de los engranes. La condición SWQT indica el tratamiento que debe ser aplicado es: templado en agua y revenido. El número (350) indica la temperatura de templado en °F. Carburizado durante 8 horas.

Cumple con las características:

	<i>Condición</i>	<i>Resistencia a la tracción (MPa)</i>	<i>Resistencia al punto cedente (MPa)</i>	<i>Ductibilidad</i>	<i>Dureza Brinel (HB)</i>	<i>Dureza Superficial (HRC)</i>
AISI 1020	SWQT 350	889	496	11	255	62

La conexión entre el pedal y el engrane 3 se llevará a cabo a través de un elemento que será llamado plato de entrada. Este y el pedal irán atornillados por cuatro tornillos estándar para componente de bicicleta Shimano. Estos tornillos le pertenecen a la bicicleta original. En la Figura 4.30 se muestra un juego de tornillos marca Ultegra con número de parte CR-52-64. [15].



Figura 4.30. Tornillo para pedal

La unión del plato de entrada con el engrane 3 se llevará a cabo por medio de tornillos estándar. Se hace el cálculo para estos tornillos.

Primero hay que determinar la fuerza que van a recibir y el número de tornillos que se van a utilizar. Se calcula la fuerza en cada tornillo a partir del torque que se aplica al pedal.

$$F = \frac{T_p}{r_p} \quad (4.55)$$

Conocemos el valor de T_p que es 92.25 Nm. El valor de r_p se estima a partir del diámetro de paso del engrane 3 que es $D_3 = 175$ mm. entonces $r_3 = 87.5$ mm. A este valor le agregaremos 3.15 mm por lo menos que es el ancho de la corona. Finalmente se utilizó un valor de 92 mm. El área mínima obtenida para 4 tornillos fue de 3.3 mm^2 . Entonces se tomaron 4 tornillos de 4 mm.

4.4 Flecha de entrada (pedales)

Como se ha visto en el capítulo 3, la flecha de entrada de hecho pasa dentro del Cono A y giran en el mismo eje. Para saber entonces las dimensiones finales de la flecha del Cono A necesitamos saber primero las dimensiones de la flecha de entrada.

Ahora se procederá a hacer el cálculo para esta flecha.

La velocidad de giro ya se ha mencionado pero la repetiremos una vez más, es $n_p = 127.3$ rpm.

La potencia igualmente la repetiremos: 1.65 hp o 1230 W.

Se determinan las fuerzas que están actuando sobre la flecha como se muestran en el diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 4.31, se calculan las reacciones en los rodamientos y se obtienen diagramas de cortante y de momentos.

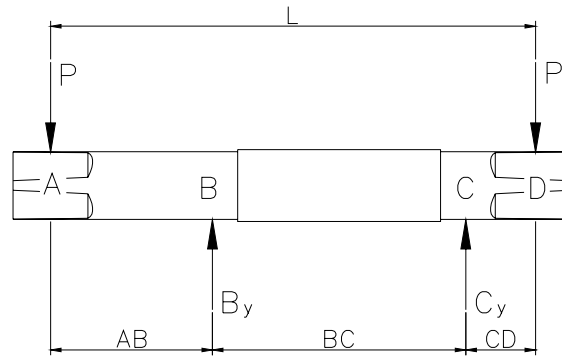


Figura 4.31. Diagrama de cuerpo libre para la flecha de entrada

En este caso P es la fuerza que aplica el ciclista al pedal al momento de pedalear. Ya se había mencionado en capítulos anteriores, entonces $P = 512$ N. Aunque de hecho esta fuerza solo estaría aplicada de un lado de la flecha, o sea, del lado del pedal que en ese momento se esté utilizando, la hemos puesto de los dos lados para prever el hecho de que el ciclista esté totalmente parado en los pedales. Es como si la persona pesara un poco más de 100 kg.

Las distancias, resultado de la geometría final del ensamble, son las siguientes:

$$L = 123.7 \text{ mm}$$

$$AB = 36 \text{ mm}$$

$$BC = 59.2 \text{ mm}$$

Se calculan las reacciones con las ecuaciones de equilibrio.

$$\begin{aligned} \sum F_y &= B_y + C_y - 2P = 0 \\ \sum M_A &= B_y \overline{AB} + C_y \overline{AC} - PL = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones encontramos los siguientes resultados:

$$B_y = 577.2 \text{ N} \quad \text{y} \quad C_y = 447.8 \text{ N}$$

Ahora podemos encontrar el diagrama de momentos.

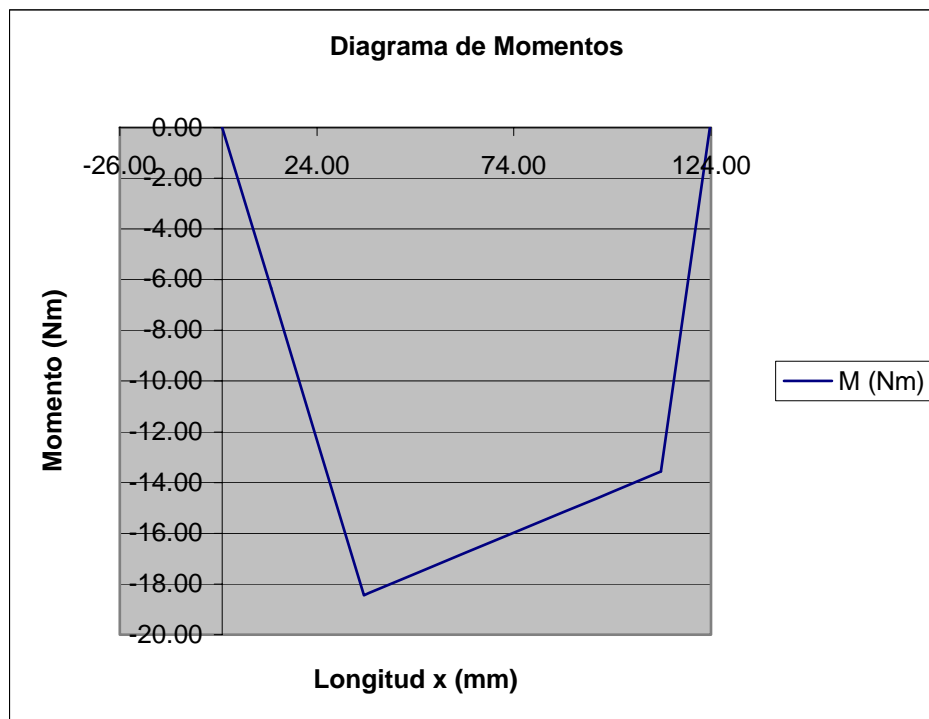


Figura 4.32. Diagrama de Momentos para la flecha de entrada

El momento máximo que se registró es de 18.44 Nm en el punto B.

El torque que actúa en toda la flecha es $T_p = 92.25 \text{ Nm}$. Hay que observar que el torque actúa en la flecha solo en el momento en que el pedal del punto D esta trabajando. Cuando el otro pedal trabaja no existe ningún torque sobre la flecha pues es el pedal el que transmite el torque a los engranes, como se verá más adelante en los dibujos. También se presenta otro caso en el cual se aplica una fuerza únicamente en el pedal que no transmite el torque a los pedales. Entonces el torque pasa a través de la flecha y cambian sus reacciones como se muestra en la figura 4.32a. El diagrama de momentos para este caso se muestra en la figura 4.32b.

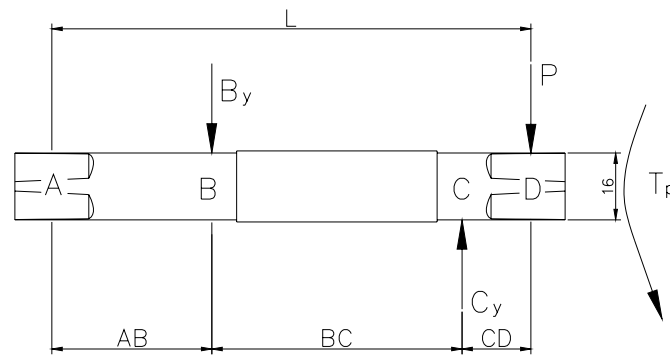


Figura 4.32a. Segundo Caso

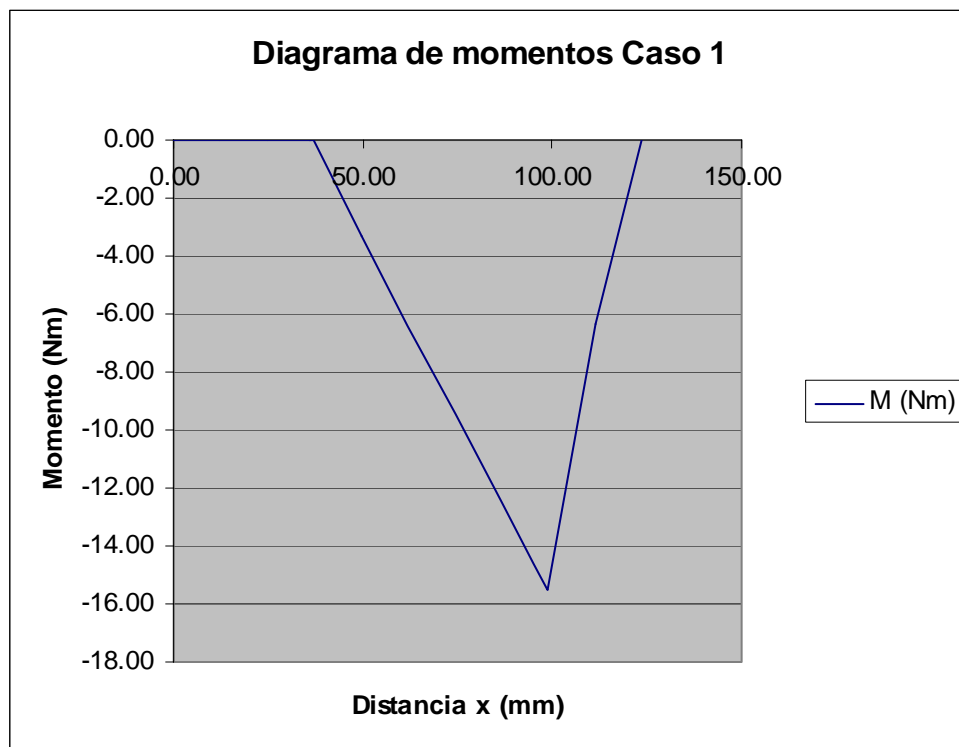


Figura 4.32b. Diagrama de momentos para el segundo caso.

Es necesario escoger un material para la flecha. Se ha escogido Acero AISI 4140 con tratamiento térmico: Templado en aceite a 204°C (400°F) y revenido. Sus propiedades se muestran en la Tabla 4.11.

Tabla 4.11. Propiedades del material utilizado en la flecha de entrada.

Material						
Número AISI	Condición	Resistencia a la tracción (MPa)	Resistencia al punto cedente (MPa)	Ductilidad, % en 2 in	Dureza Brinell	Dureza HRC
4140	OQT 400	2000	1730	11	578	56

Una vez teniendo el material es necesario determinar el límite de fatiga por durabilidad, s_n .

Esta se encuentra en la gráfica de la Figura 4.15.

Se calcula la resistencia por durabilidad modificada s'_n . Se calcula con una confiabilidad de 0.99 por lo tanto $C_R = 0.81$ y $C_s = 0.9$ ya que el diámetro que se espera es de alrededor de 15 mm. Entonces

$$s'_n = s_n C_s C_R = 610(0.9)(0.81) = 445 \text{ MPa} \quad (4.57)$$

Se calculan los diámetros mínimos para cada punto de la flecha con la ecuación para el diámetro. Utilizaremos factor de seguridad $N = 2$ por debajo del estándar para ahorrar peso.

$$D = \left[\frac{32N}{\pi} \sqrt{\left(\frac{K_t M}{s'_n} \right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{T}{s_y} \right)^2} \right]^{1/3}$$

Punto A.

Momento de flexión es cero

El torque es $T_p = 92.5 \text{ Nm}$

$D_{\min} = 11.2 \text{ mm}$.

Punto B.

$M = 18.4 \text{ Nm}$

$T_p = 92.5 \text{ Nm}$

$K_t = 3$. Se aplicará un factor de 3 pues lleva un hombro de radio muy afilado y del otro lado se considera que llevará una ranura para retén.

$$D_{\min} = 15.95 \text{ mm.}$$

Punto C.

$$M = 14.6 \text{ Nm}$$

$$T_p = 92.5 \text{ Nm}$$

$K_t = 3$, por las mismas razones que en el punto B.

$$D_{\min} = 14.9 \text{ mm.}$$

Punto D.

No existe momento de flexión.

$$T_p = 92.5 \text{ Nm}$$

$$D_{\min} = 11.2 \text{ mm.}$$

Ahora se asignan diámetros estándar para cada parte de la flecha.

Punto A: 16 mm.

Punto B: 16 mm.

Punto C: 16 mm.

Punto D: 16 mm.

De hecho todos los diámetros quedaron con el mismo diámetro debido a la forma de la flecha, sin embargo en la parte central, o sea, entre los puntos B y C, se da un diámetro de 17 mm.

Ya que conocemos las reacciones B_y y C_y , donde van los rodamientos podemos determinar cuales usaremos. Ya que necesitamos ahorrar espacio y aquí tenemos pura carga radial utilizaremos casquillos de agujas de SKF [12], los cuales tienen pequeña sección

transversal y con una capacidad de carga elevada. La fórmula para calcular la carga dinámica en un rodamiento de agujas es

$$P = F_r \quad [12] \quad (4.58)$$

Por lo tanto se toman los valores de las reacciones directamente.

Tomando en cuenta el diámetro de la flecha de 16 mm., tomamos el siguiente:

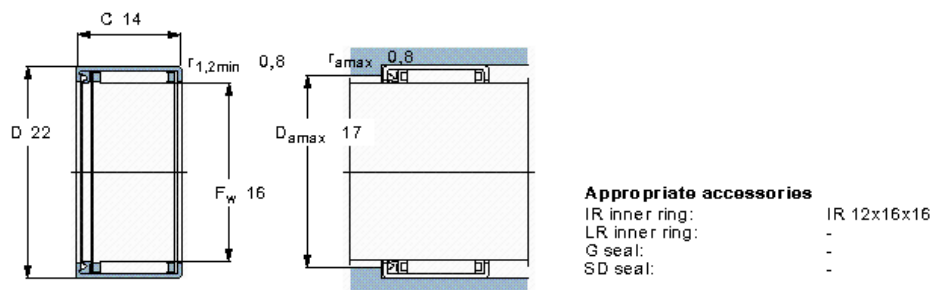


Figura 4.33. Rodamiento de agujas HK1614 RS. [13]

Sus características son las siguientes:

Tabla 4.12. Características del rodamiento de agujas.

Dimensiones Principales			Rangos de Carga		Límite de Fatiga	de referencia	Velocidad Límite	Masa	Designación
			dinámica	estática					
Fw (mm)	D (mm)	C (mm)	C (kN)	C0 (kN)	Pu (kN)	RS (r/min)	LS (r/min)	Masa (kg)	HK 1614 RS
16	22	14	7,37	9,8	1,12	14000	9000	0,013	

El acabado de la superficie en la parte donde correrá el rodamiento debe ser no mayor a $R_a = 0.8 \mu\text{m}$. La dureza se recomienda que sea entre 58 y 60 HRC. Si es posible aumentar la dureza de la flecha hasta ese valor sería recomendable, pero si no es posible de todas maneras 56 HRC es una muy buena dureza y es cercana al valor recomendado.

Por último, el método de conexión de la flecha con los pedales será el mismo utilizado en la bicicleta original ya que de hecho se utilizarán los mismos pedales (Shimano No. de parte

XI 175 FC-M330 y XH 175 FC-M330). Se puede fabricar uno con las mismas características si es necesario pero en principio se asume que se usa el original.

Este consiste en un perfil cuadrado en el final de las flechas, el cual va en aumento de la orilla hacia el centro de manera que es más grande en la parte del centro. Cuando entra el pedal en la flecha lo hace con interferencia. Finalmente se asegura con un tornillo.

Por lo tanto se realiza un barreno roscado en cada punta con una profundidad del barreno de 29 mm., y de roscado de 16.8 mm. Con cuerda M8x1.0.

Las dimensiones de la sección cuadrada se especifican en el plano de la flecha.

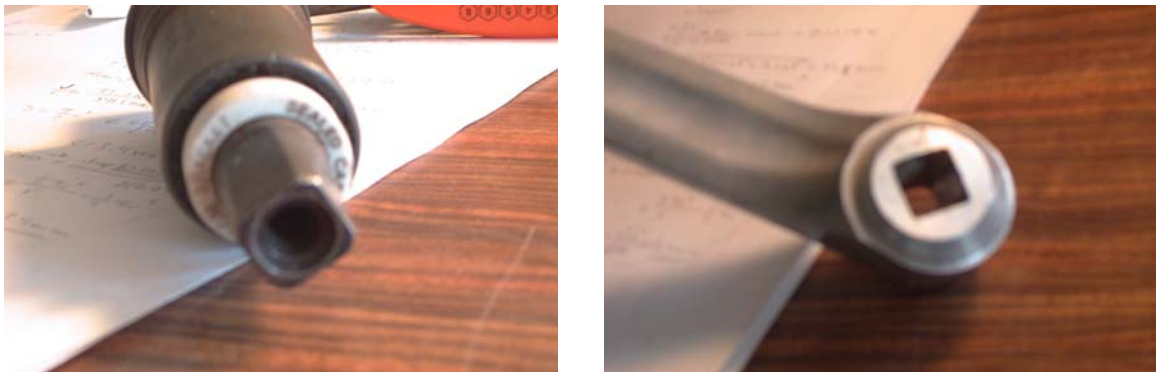


Figura 4.34. Método de ensamble entre flecha y pedal.

4.4.1 Finalización del cálculo de las flechas de los conos.

Una vez teniendo a la mano las dimensiones de la flecha y sus rodamientos, y ya que esta pasará dentro del cono A, ahora es posible determinar las dimensiones finales de la flecha de este.

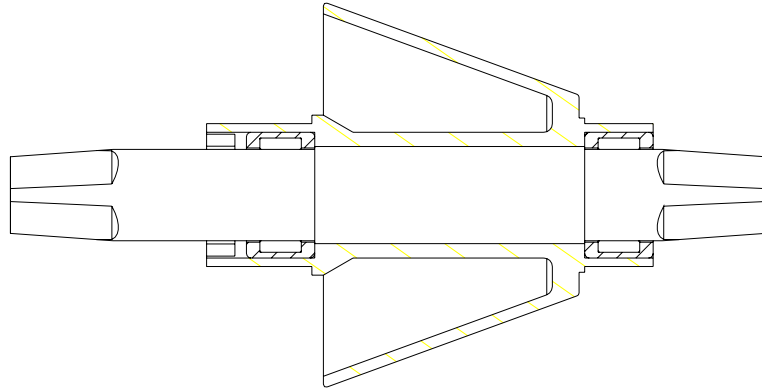


Figura 4.35. Ensamble entre flecha de entrada y cono de entrada.

Se puede ver en la Figura 4.35 como serán ensamblados la flecha de entrada y el cono A. Se puede ver que del lado izquierdo hay un tramo de la flecha que se encuentra en cantiliver, es aquí donde se encontrarán los engranes.

Como podemos ver la flecha del cono es hueca, y nosotros anteriormente hemos calculado el diámetro necesario para una flecha sólida. Nosotros podemos determinar una flecha equivalente hueca por medio del Coeficiente de Sección Polar, Z_p .

$$Z_p = \frac{J}{c} \quad (4.59)$$

Donde J es el momento polar de inercia de la sección, y c es la distancia máxima del eje neutro a la superficie. El momento polar de inercia para secciones redondas se calcula por

$$J = \frac{1}{2} \pi r^4 \quad (4.60)$$

Se puede decir que

$$\frac{J}{c} = \frac{\left(\sqrt{M_y^2 + M_z^2 + T^2} \right)_{\max}}{\tau_{adm}} \quad (4.61)$$

Entonces si el lado derecho de la ecuación es constante, lo es también el lado izquierdo.

Entonces dos secciones que tengan el mismo coeficiente de sección polar son equivalentes.

Se recopilan los valores de diámetro para cada punto del Cono A:

Tabla 4.13. Diámetros en cono A.

Punto	D (mm)
E	5.50
C	5.50
D	4.60
P _A	15.28

Entonces podemos calcular el coeficiente de sección polar de la siguiente manera

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{1}{2} \pi r^4}{c}$$

Si $c = r$ entonces

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{1}{2} \pi r^4}{r} = \frac{\pi r^3}{2}$$

Los resultados son de J/c para cada punto se dan en la Tabla 4.13:

Ahora para calcular los valores de J/c de la sección hueca tenemos lo siguiente

$$\frac{J}{c} = \frac{\frac{1}{2} \pi (r_e^4 - r_i^4)}{r_e}$$

Despejando r_i

$$r_i = \sqrt[4]{r_e - \frac{2 \frac{J}{c} r_e}{\pi}} \quad (4.62)$$

El rodamiento HK1614 RS tiene diámetro exterior de 22 mm. Por lo tanto ese es el diámetro interior que debe tener la flecha del cono. Sin embargo se sabe que en el mismo punto, pero del lado exterior de la flecha del cono llevará otro rodamiento del mismo tipo, pero por supuesto con diámetro más grande. Viendo el catálogo de rodamientos se observa que el rodamiento de 22 mm. de diámetro interior tiene 25 mm. Es por eso que a continuación se va a calcular el diámetro interior D_{Ai} de una flecha que tiene un diámetro

exterior D_{Ae} de 25 mm. en los puntos E, C y D. En el punto P_A se tendrá un diámetro de 22 mm para ahorrar peso. El valor obtenido de esto será el diámetro interior máximo que se podrá tener, pero después habrá que tomar medidas estándar de acuerdo a los elementos que ya existen.

De esta manera se obtienen los radios y diámetros interiores máximos para cada punto.

También se indica el espesor de pared mínimo, que es la resta de los dos radios:

Tabla 4.14. Diámetros equivalentes en el cono A

Punto	J/c	D_{Ae} (mm)	r_{Ae} (mm)	r_{Ai} (mm)	D_{Ai} (mm)	e (mm)
E	32.61	25	12.5	12.47	24.93	0.03
C	32.61	25	12.5	12.47	24.93	0.03
D	19.11	25	12.5	12.48	24.96	0.02
P_A	700.86	22	11	9.93	19.87	1.07

A continuación se muestran los diámetros definidos finalmente:

Tabla 4.15. Diámetros definidos en el cono A.

Punto	D_{Ae} (mm)	D_{Ai} (mm)	e (mm)
E	25	22	1.5
C	25	22	1.5
D	25	22	1.5
P_A	22	17	2.5

Con el fin de ahorrar peso la flecha del cono B también será hueca, para lo cual se sigue el mismo procedimiento.

Sus diámetros mínimos calculados estando sólido.

Tabla 4.16. Diámetros en el cono B.

Punto	D (mm)
A	6.191
B	12.101
S	6.191
P_B	15.08

Diámetros estando hueco

Tabla 4.17. Diámetros equivalentes en el cono B.

Punto	J/c	D_{Be} (mm)	r_{Be} (mm)	r_{Bi} (mm)	D_{Bi} (mm)	e (mm)
A	46.6	14	7	6.84	13.7	0.16
B	347.9	14	7	5.40	10.8	1.60
S	46.6	14	7	6.84	13.7	0.16
P_B	673.4	16	8	5.08	10.2	2.92

Diámetros definidos finalmente:

Tabla 4.18. Diámetros definidos en el cono B.

Punto	D_{Be} (mm)	D_{Bi} (mm)	e (mm)
E	14	10	2
C	14	10	2
D	14	10	2
P_B	16	10	3

Es importante hacer la observación de que de hecho entre más grande es el diámetro exterior, la pared se vuelve más delgada. Observando esto se puede determinar que la pared de los conos puede ser relativamente delgada. Se ha determinado un espesor de dos milímetros y después se hizo análisis de elemento finito. En este se muestran los valores máximos de esfuerzo y deformación presentados en el cono A (Figura 4.36) y en el cono B (Figura 4.37)

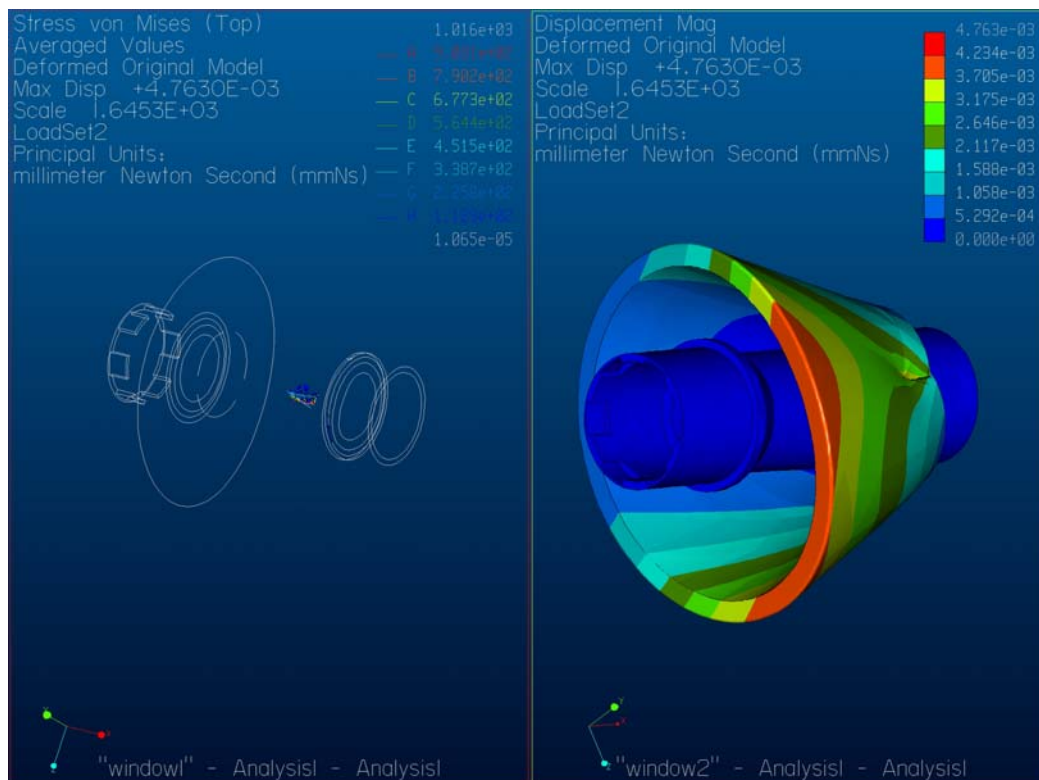


Figura 4.36. Vista de análisis de elemento finito utilizando Pro/Mechanica®. Cono A.

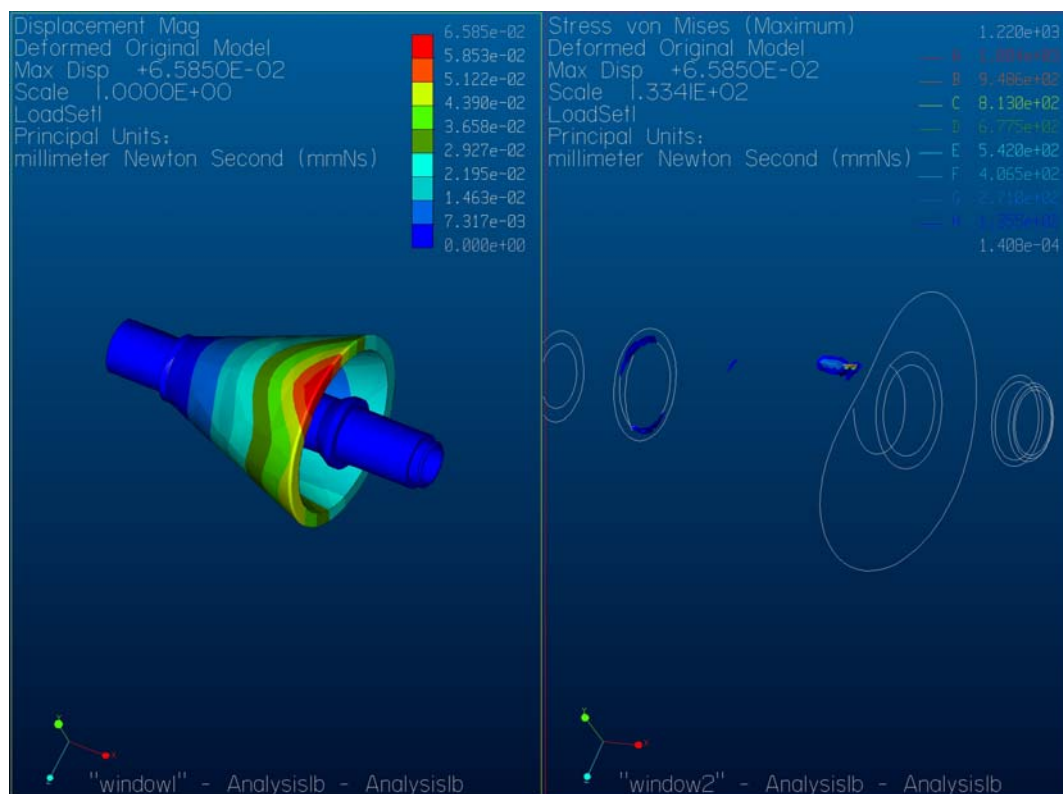


Figura 4.37. Vista de análisis de elemento finito utilizando Pro/Mechanica®. Cono B

En la realización del análisis fue en Pro/Mechanica® debido a que es más fácil hacer la transferencia de los sólidos desde Pro/E, donde se realizaron.

Para el cono A se dieron las siguientes condiciones:

Restricciones: Sujeto en los puntos C y D de la figura 4.16.

Fuerzas:

Fuerza 1: Se aplicó una fuerza en una línea (sin ancho) con una componente radial de 1168.2N y una componente tangencial de 389.6 N.

Se registró un esfuerzo máximo de 845 MPa. Sin embargo esto sucedió exactamente sobre la línea que no tiene espesor por lo tanto era de esperarse que se presentaran esfuerzos grandes. Los esfuerzos causados por el contacto ya fueron analizados anteriormente y la intención de este análisis fue más bien para ver el desempeño en el material más allá de la zona de contacto donde se presentaron esfuerzos de 500 a 600 MPa. Viendo estos resultados se deduce que el material es capaz de soportar.

La deformación máxima fue de 0.2 mm. lo cual es un nivel razonable y no se considera que pueda causar problemas.

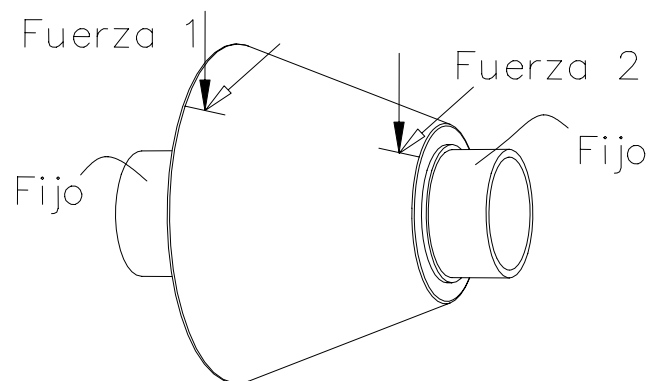
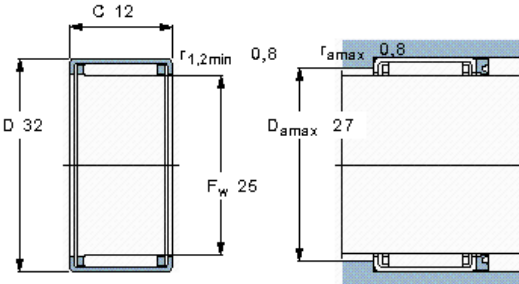


Figura 4.38. Condiciones del análisis en los conos.

El rodamiento que se utilizará para el cono A es el siguiente

Tabla 4.19 Características del rodamiento para cono A [13].

Dimensiones Principales			Rangos de Carga		Límite de Fatiga	de referencia	Velocidad Límite	Masa	Designación
			dinámica	estática					
F _w (mm)	D (mm)	C (mm)	C (kN)	C ₀ (kN)	P _u (kN)	RS (r/min)	LS (r/min)	Masa (kg)	Designación
25	32	12	10,5	15,3	1,76	9500	11000	0,02	HK 2512



Appropriate accessories

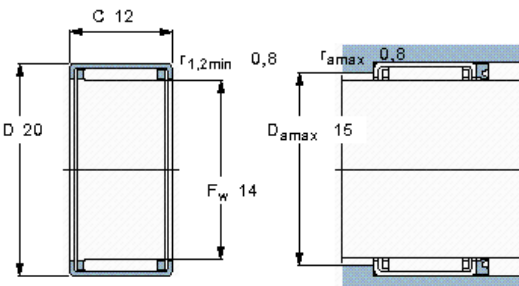
IR inner ring:	-
LR inner ring:	LR 20x25x12.5
G seal:	G 25x32x4
SD seal:	-

Figura 4.39. Rodamiento de agujas HK 2512 [13].

El rodamiento que se utilizará para el cono B es el siguiente

Tabla 4.20. Características del rodamiento para el cono B [13].

Dimensiones Principales			Rangos de Carga		Límite de Fatiga	de referencia	Velocidad Límite	Masa	Designación
			dinámica	estática					
F _w (mm)	D (mm)	C (mm)	C (kN)	C ₀ (kN)	P _u (kN)	RS (r/min)	LS (r/min)	Masa (kg)	Designación
14	20	12	6,82	8,65	0,98	15000	17000	0,011	HK 1412



Appropriate accessories

IR inner ring:	IR 10x14x13
LR inner ring:	-
G seal:	G 14x20x3
SD seal:	SD 14x20x3

Figura 4.40. Rodamiento de agujas HK 1412 [13].

La forma de unión entre el engrane 1 y el cono A se realizará por medio de ranuras rectas. Se ha seguido el procedimiento estándar de SAE para su cálculo y se han obtenido los siguientes resultados.

Tabla 4.21. Cálculo de las ranuras para unión entre engrane 1 y cono A.

Acoplamiento de Engrane 1 con Cono 1

Por medio de ranuras

$T = 13.18 \text{ Nm}$ $L = 5 \text{ mm}$
 $D = 24$ $T/m = 2635.7 \text{ N}$

Fórmulas para ranuras SAE rectas

N	W	Ajuste permanente		$\tau \text{ (Pa)}$
		h	d	
4	5.8	1.8	20.4	32.98
6	6.0	1.2	21.6	32.11
10	3.7	1.08	21.84	21.30
16	2.4	1.08	21.84	13.31

Se han escogido 6 ranuras con una longitud de 5 mm. debido a la falta de espacio. Los esfuerzos no rebasan los permisibles de los materiales. El diámetro mayor D de las ranuras es de 24 mm. y el torque es de entrada al cono y es de 13.18 Nm.

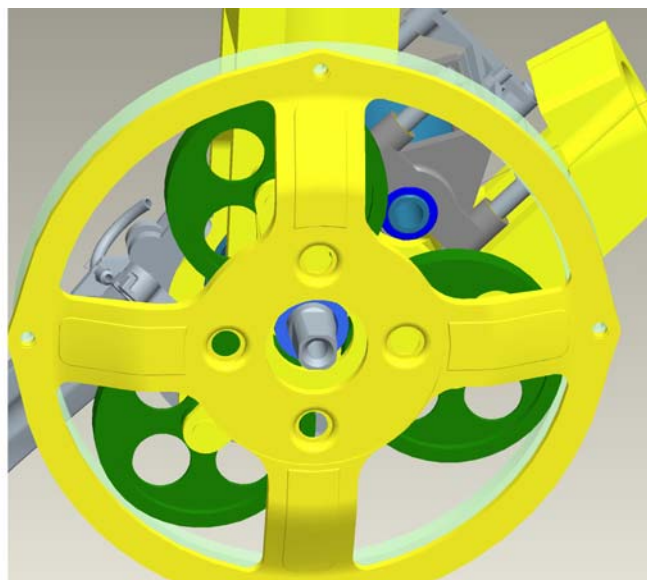


Figura 4.41. Vista de la colocación de los engranes.

4.5 Puente

La fuerza normal se aplicará por medio de un puente en el cual se aplicará la fuerza en el centro de este, el cual al mismo tiempo transmitirá la fuerza al cono B. A continuación se muestra un diagrama de esto.

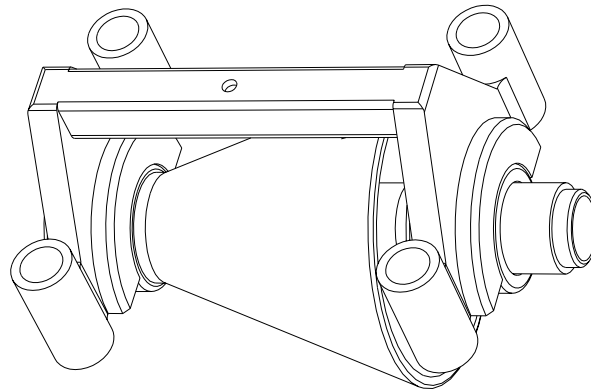


Figura 4.42. Diagrama de la disposición del puente junto al cono B

Cuando el anillo se mueve de un lado para otro, las reacciones Y_1 y Y_2 cambian de valor, pero por supuesto que su suma siempre es igual a P . Cuando el anillo se encuentra en la posición central Y_1 y Y_2 son iguales, pero cuando no, pues no lo son y esto provoca momentos en los extremos del puente. Estos momentos deben ser absorbidos por este para evitar desalineamientos en el cono lo cual podría provocar que se bloqueara el sistema.

De hecho fue necesario hacer el análisis de equilibrio de fuerzas con todo el sistema en conjunto, pues, de lo contrario no hubiéramos podido detectar el cambio en los valores de Y_1 y Y_2 actuando sobre el puente, pues hubiera parecido que ambos valían lo mismo.

Sin embargo, en el momento que se desea calcular los momentos que evitan la desalineación nos damos cuenta de que de hecho es estáticamente indeterminado.

Afortunadamente ya conocemos los valores de Y_1 y Y_2 así como el de P .

Vamos a aplicar la carga sobre el puente de manera distribuida por medio de un elemento de acero más rígido para facilitar el cálculo y para disminuir los momentos.

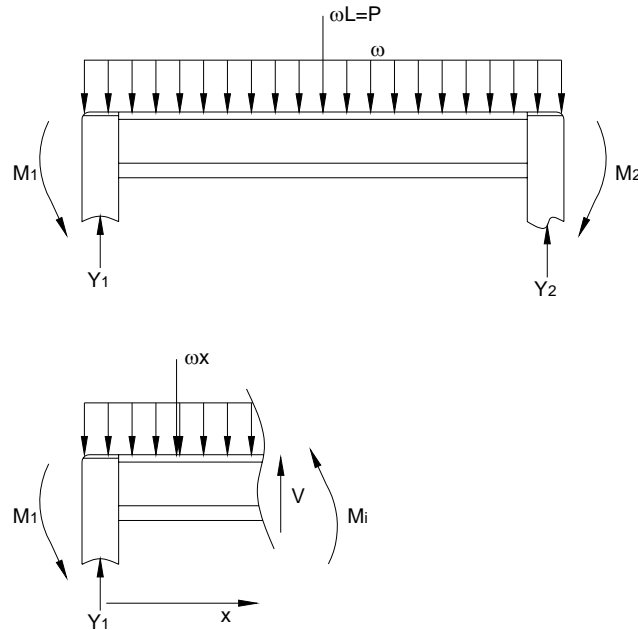


Figura 4.43. Diagrama de cuerpo libre

Ya que es estáticamente indeterminado, se utilizará la ecuación de la curva elástica para poder determinar los momentos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{M}{EI} \quad (4.63)$$

En base al diagrama de cuerpo libre de la figura 4.43 podemos determinar el momento.

$$\sum M = M_i + M_1 - Y_1 x + \omega x \left(\frac{x}{2} \right) = 0$$

$$M_i = Y_1 x - M_1 - \frac{1}{2} \omega x^2 \quad (4.64)$$

Sustituyendo en la curva elástica

$$EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = Y_1 x - M_1 - \frac{1}{2} \omega x^2 \quad (4.65)$$

Asumiendo que es una viga empotrada en ambos lados, se conocen las condiciones de frontera:

$$[x = 0, \theta = 0], [x = L, \theta = 0]$$

$$[x = 0, y = 0], [x = L, y = 0]$$

La primera derivada de y con respecto a x es la razón de cambio de y con respecto a x , por lo tanto es el ángulo θ .

Ahora integrando la ecuación de la curva elástica.

$$EI \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} Y_1 x^2 - M_1 x - \frac{1}{6} \omega x^3 + C_1 \quad (4.66)$$

$$EI y = \frac{1}{6} Y_1 x^3 - \frac{1}{2} M_1 x^2 - \frac{1}{24} \omega x^4 + C_1 x + C_2$$

Tomando en cuenta las dos condiciones de frontera de la izquierda y sustituyendo en la ecuación anterior determinamos que $C_1 = C_2 = 0$. Entonces

$$EI \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} Y_1 x^2 - M_1 x - \frac{1}{6} \omega x^3 \quad (4.67)$$

$$EI y = \frac{1}{6} Y_1 x^3 - \frac{1}{2} M_1 x^2 - \frac{1}{24} \omega x^4$$

Ahora haciendo uso de la última condición de frontera determinamos M_1 .

$$0 = \frac{1}{6} Y_1 L^3 - \frac{1}{2} M_1 L^2 - \frac{1}{24} \omega L^4 \quad (4.68)$$

$$M_1 = \frac{1}{3} Y_1 L - \frac{1}{12} \omega L^2$$

Sabiendo que $\omega L = P$, calculamos M_1 dependiendo de la posición del anillo. Los resultados se muestran en la gráfica siguiente.

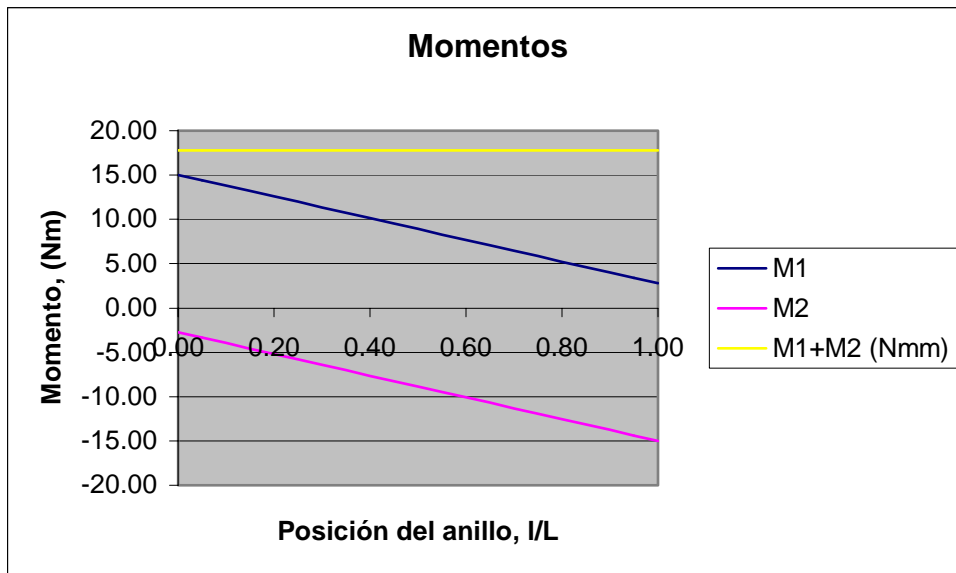


Figura 4.44. Momentos

Para M_2 se sigue el mismo procedimiento. Queda así.

$$M_2 = \frac{1}{3}Y_2L - \frac{1}{12}\omega L^2 \quad (4.69)$$

Ahora podemos encontrar el momento máximo actuando en la viga haciendo suma de momentos. Podemos ver que la suma de los dos momentos es constante con un valor de 17.8 Nm. para cada punto de la viga del puente. Esto tiene lógica ya que se espera que esté en equilibrio.

Calculamos el módulo de la sección. Utilizaremos aluminio 7075-T6.

Aluminio 6065-T6

Propiedad	Valor
Resistencia a la tensión, Última, MPa	310
Resistencia de cedencia, MPa	275
Elongación, %	12
Módulo de Elasticidad, GPa	69

Propiedades del material [9].

El módulo de la sección está dado por

$$S = \frac{I}{c} = \frac{M}{\sigma} \quad (4.70)$$

Utilizaremos factor de seguridad $N = 2$ pues es carga estática. Por lo tanto el factor de diseño es

$$\sigma_d = \frac{\sigma_y}{N} = \frac{275\text{MPa}}{2} = 137.5\text{MPa} \quad (4.71)$$

Entonces

$$S = \frac{M}{\sigma} = \frac{17.8\text{Nm}}{137.5\text{MPa}} = 129.25\text{mm}^3 \quad (4.72)$$

De aquí calculamos las dimensiones

$$S = \frac{I}{c} = \frac{\frac{1}{12}bh^3}{\frac{h}{2}} = \frac{1}{6}bh^2 \quad (4.73)$$

Despejando b

$$b = \frac{6S}{h^2} \quad (4.74)$$

Si decimos que $h = 10$ mm., obtenemos que $b = 7.75$ mm.

Las columnas guía son las que absorberán los momentos M_1 y M_2 . Éstas estarán fabricadas del mismo material que el puente: Aluminio 7075-T6.

Para poder determinar el diámetro nos basamos en la fórmula básica de esfuerzo por flexión.

$$\sigma = \frac{Mc}{I} \quad (4.75)$$

Si σ es σ_d y c es el radio podemos decir que

$$\sigma_d = \frac{Mr}{I} = \frac{Mr}{\frac{1}{4}\pi r^4} = \frac{4M}{\pi r^3} \quad (4.76)$$

Y despejando r.

$$r = \sqrt[3]{\frac{4M}{\pi\sigma_d}} \quad (4.77)$$

El valor máximo de M_1 y M_2 es de 15 Nm. Pero se reparte entre las dos columnas de cada lado, y entonces cada una carga la mitad. Por lo tanto.

$$r = \sqrt[3]{\frac{4(7.5\text{Nm})}{\pi(251.5\text{MPa})}} = 3.36\text{mm}$$

Para la aplicación de la fuerza P se hará uso de rondanas “Belleville”. Estas rondanas tiene forma cónica y actúan como resorte al ser presionadas hasta ser planas ejerciendo una fuerza. Hay dos formas de colocarlas. En serie (lado izquierdo de la figura) o en paralelo (lado derecho). Cuando están colocadas en serie la fuerza que ejercen es igual a la fuerza ejercida por una de ellas mientras que el desplazamiento es igual a la suma de desplazamientos de todas las rondanas. Y cuando están en paralelo la fuerza que ejercen es la suma de la fuerza de todas las rondanas mientras que el desplazamiento es igual al de una sola.

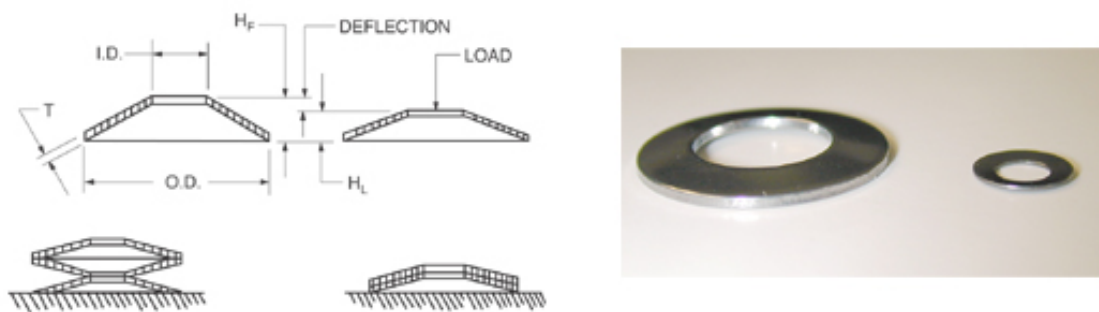


Figura 4.45. Se muestran los resortes “Belleville”.

Se requiere $P = 1062$ N. Por catálogo se escoge una rondana con la siguientes características.

Altura comprimido	Fuerza comprimido	Fuerza@plana	Material	OD	ID	Espesor
mm	N	N		mm	mm	mm
0.635	267	489.5	302 STAINLESS STEEL	9.525	4.826	0.508

Si $P = 1062 \text{ N}$

$$\frac{P}{4} = \frac{1062}{4} = 265.5 \text{ N} \quad (4.78)$$

Se utilizarán 4 rondanas.

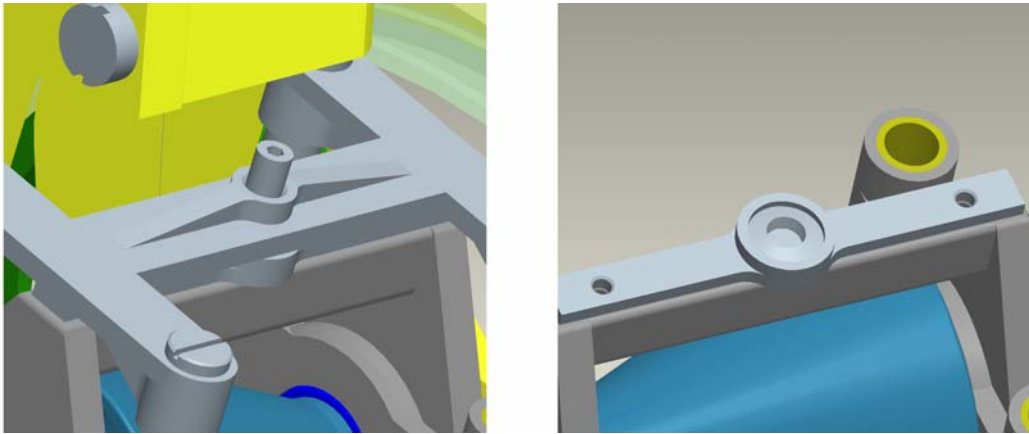


Figura 4.46., Método de aplicación de la fuerza

4.6 El Anillo

El anillo es un elemento fundamental para el funcionamiento de este sistema, pues es por donde se transmite toda la potencia. Como vimos en el análisis de esfuerzos por contacto en los conos, toda la fuerza se transmite en una sola línea. No es necesario realizar este análisis de nuevo en el anillo ya que los esfuerzos que se encontraron en el análisis de los conos, es simétrico para ambos elementos.

Un punto muy importante y realmente básico para este sistema es el desplazamiento del anillo de un lado a otro a lo largo de los conos. Sería fácil pensar que se podría

simplemente deslizar sobre los conos, pero esto implicaría la aplicación de una gran fuerza para vencer la fricción que existe entre los elementos y al mismo tiempo se incrementaría el desgaste. Por lo cual, se ha buscado una manera de mover el anillo sin necesidad de “arrastrarlo” sobre los conos, sino mas bien hacerlo desplazarse haciendo uso de la misma rotación que ya tienen. Se podría hacer referencia al clásico ejemplo que se da entre la persona que desea mover un bloque grande, y la gran fuerza que necesita y el contraste con la otra persona que decide ponerle una base de ruedas.

La forma de lograr esto es hacerlo rotar alrededor de un eje normal a los planos tangenciales comunes de las superficies del anillo y de los conos.

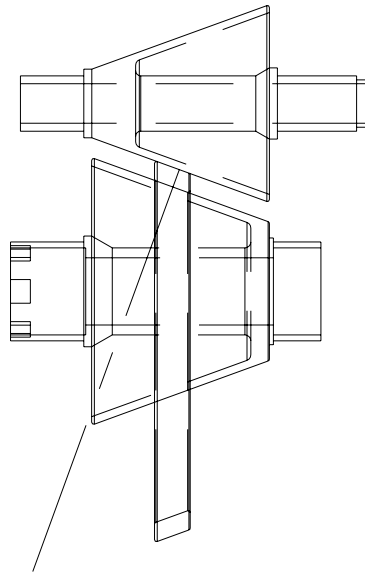


Figura 4.47. Eje de giro del anillo.

De esta manera el anillo avanzará naturalmente a lo largo de los conos.

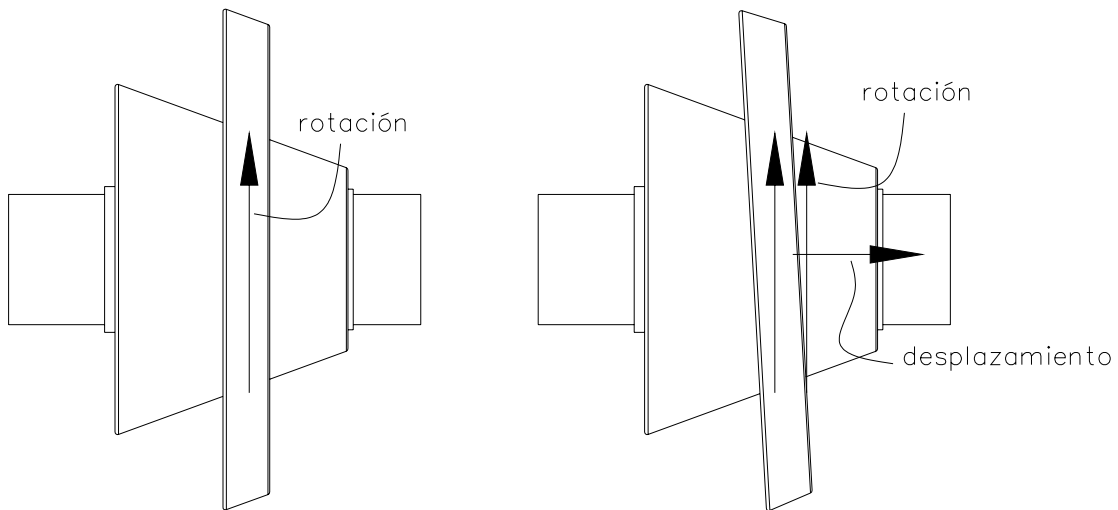


Figura 4.48. Desplazamiento del anillo.

Como se puede observar en la Figura 4.48 cuando el anillo rota en un eje paralelo al del cono se conserva su posición con respecto a la longitud de este. Cada punto del anillo va cambiando su posición con respecto al tiempo. Cuando el eje del anillo y el del cono son paralelos, la posición que cada punto va a ocupar en el instante siguiente es una posición que ya estaba ocupada por otro punto del cono. Al momento de rotarlo en el eje transversal, el anillo, en teoría, sigue rotando con respecto al eje del cono pues de esa forma lo mueve la fuerza de fricción entre los dos, pero su eje y el del cono ya no son paralelos. Cuando esto sucede, y si se toma un punto que se encuentra en el lado derecho del anillo en la Figura 4.48, nos percatamos que de hecho la siguiente posición que ocupará este punto se encuentra delante del mismo.

Para saber la velocidad a la que va a cambiar de posición así como el ángulo necesario para que lo haga a una velocidad razonable se puede basar en la siguiente figura.

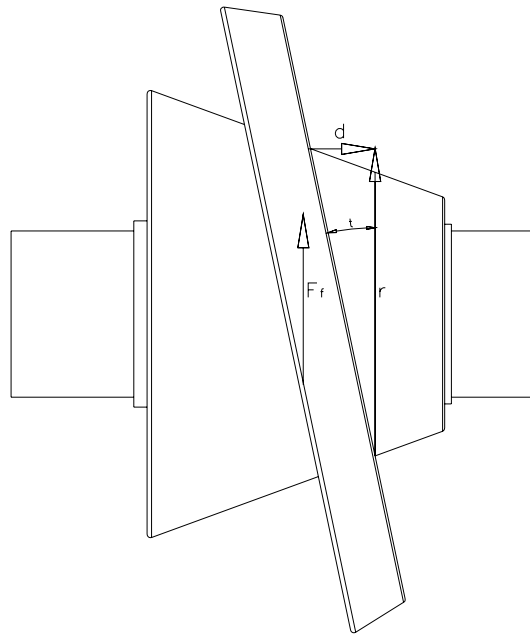


Figura 4.49. Desplazamiento

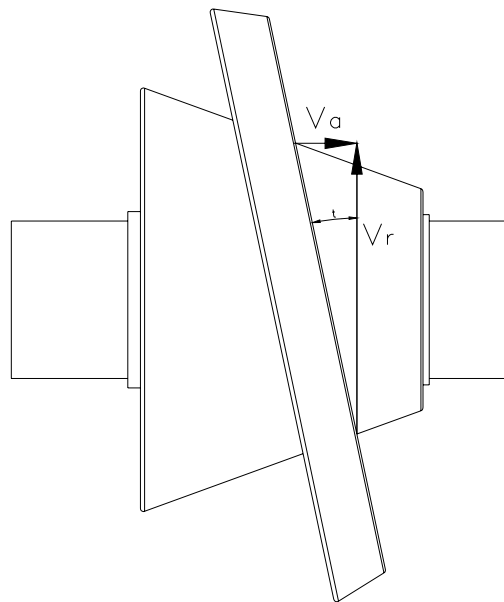


Figura 4.50. Velocidad de avance.

Cuando el anillo se inclina un ángulo t este sigue rotando en un eje paralelo al del cono debido a la dirección de la fuerza F_f que lo mueve. Entonces podemos tomar un punto P

cualquiera del anillo y ver su desplazamiento. Supongamos que se encuentra del borde derecho del anillo. Supongamos que la magnitud del vector r es igual al desplazamiento del punto en un instante de tiempo determinado. La distancia que existe entre el punto P' delante de P , y P está dada por el vector d . Entonces para cuando P llegue a la posición radial de P' el anillo se habrá desplazado una distancia d . Entonces podemos calcular d a partir de r .

$$d = r \tan t \quad (4.79)$$

Si a esto le sacamos la primera derivada con respecto al tiempo obtenemos la ecuación para la velocidad de desplazamiento.

$$V_d = Vr \tan t \quad (4.80)$$

Ya que en teoría no debe existir deslizamiento entre el anillo y el cono, entonces la velocidad tangencial de ambos en el punto de contacto es igual. Entonces podemos conocer V_r a partir de la velocidad de rotación ω_{cono} del cono.

$$V_r = \omega_{\text{cono}} r_A \quad (4.81)$$

El cálculo del tiempo t en segundos que tarda el anillo de ir del punto $l = 0$ al punto $l = l$ está dado por la siguiente ecuación

$$t = \frac{1}{C^2} (D + Cl - D \ln|D + Cl|) + \frac{D}{C^2} (1 + \ln(D)) \quad (4.82)$$

Donde

$$\begin{aligned} D &= A + B \\ A &= \omega_A r_1 \tan t \\ B &= \omega_A L \tan \alpha \tan t \\ C &= \omega_A \tan \alpha \tan t \end{aligned} \quad (4.83)$$

Donde r_1 es el radio menor del cono A, L es la longitud de los conos, α es el ángulo de los conos y θ es la inclinación del anillo.

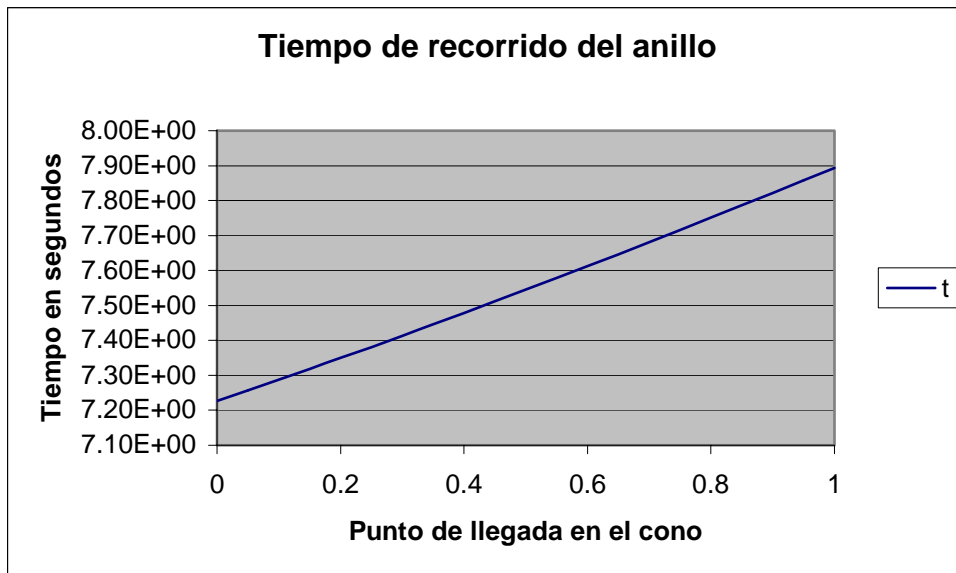


Figura 4.51. Tiempo en segundo que tarda el anillo en recorrer la distancia entre el punto cero a cualquier otro punto del cono.

En la Figura 4.51 se muestra una gráfica de tiempos con un $t = 0.5^\circ$ y a $n_p = 57$ rpm en el pedal que es una velocidad normal

Para poder efectuar esta inclinación el anillo llevará una base-guía la cual constará de los siguientes elementos. Estará montada en una guía, valga la redundancia, que tendrá su eje paralelo al plano tangente de contacto entre los conos y el anillo. Esta guía será la encargada de absorber los momentos necesarios para girar el anillo al momento de desplazarlo. Tendrá también 6 rodillos. Cuatro en las caras y dos cónicos en los costados. Los dos de los costados recibirán las fuerzas causadas por los momentos generados por dos fuerzas principales que actúan en el anillo, F_f que es la fuerza originada por el cono A, y F_f' que es la fuerza recibida del cono B. La fuerza que reciben los rodillos cónicos de los costados será llamada F_r . En la figura 4.52 se puede ver como actúan estas fuerzas en el anillo, así como una imagen de la base-guía.

En base al diagrama de la Figura 4.50 se realiza un análisis de fuerzas para poder conocer sus valores.

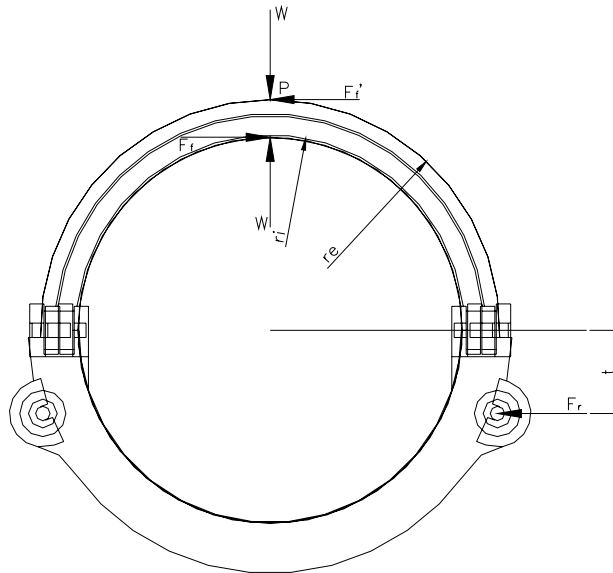


Figura 4.52. Fuerzas que actúan en el anillo

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_f - F_f' - F_r = 0 \\ \sum M_p &= F_f(r_e - r_i) - F_r(r_e + t) = 0 \\ F_r &= \frac{F_f(r_e - r_i)}{r_e + t} \\ F_f' &= F_r - F_f\end{aligned}\tag{4.84}$$

De aquí conocemos F_f y también conocemos los radios exterior e interior del anillos que son $r_e = 45$ mm y $r_i = 40$ mm. Con esto podemos calcular estas fuerzas aunque ya que F_f es variable por lo tanto esta fuerza también lo es. Por lo tanto en este momento nos es más útil calcular que parte proporcional de F_f son estas fuerzas.

$$\begin{aligned}F_r &= \frac{F_f(r_e - r_i)}{r_e + t} = \frac{F_f(45 - 40)}{45 + 17.3} = 0.08F_f \\ F_f' &= F_r - F_f = 0.08F_f - F_f = 0.92F_f\end{aligned}\tag{4.85}$$

Como podemos ver F_f' corresponde al 92% de F_f , con lo que se tiene una disminución del 8% en el torque de salida que se esperaba. Esto lo podemos recuperar más adelante en la cadena y catarina.

La acción de girar el cono para desplazarlo es la función de los otros 4 rodillos de las caras del anillo. Haciendo referencia a las ecuaciones necesarias para calcular la velocidad de desplazamiento longitudinal en el cono se puede decir que la fuerza ejercida en dirección del eje del cono al momento de desplazar el anillo está dada por

$$F_x = F_f \tan \theta \quad (4.86)$$

El resultado de esta fuerza puede utilizarse para calcular el momento necesario para rotar el cono. El momento ejercido por el giro cuando existe rodamiento entre dos cuerpos esta dado por la siguiente fórmula [14].

$$M_z = -\frac{1}{3} F_x a \quad (4.87)$$

Sin embargo los valores son extremadamente pequeños, pues el máximo valor encontrado fue de 2.7×10^{-4} Nm. Ya que la fuerza es tan pequeña no es necesario hacer cálculos de esfuerzos en estos elementos.

El giro del anillo se realizará por medio de chicotes estándar de bicicleta los cuales estarán sujetos a los lados de la base guía del anillo y serán tensados contra el soporte de la base-guía que está montado en la guía principal. Volverán a su posición original gracias a un par de resortes que actúan siempre a tensión de forma simétrica. Esto se muestra en la figura.

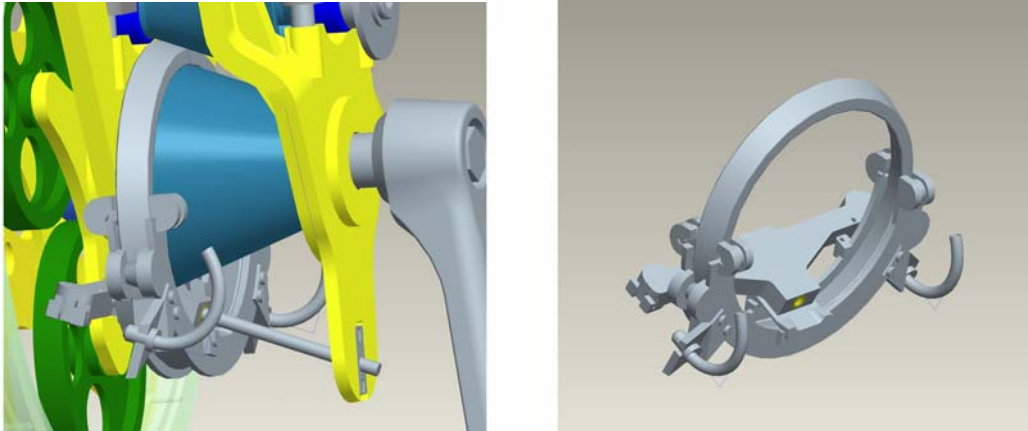


Figura 4.53 Vistas del anillo

4.7. Los soportes

Los soportes de los conos y de los engranes fueron diseñados en base a la geometría una vez que se tenía la configuración de estos elementos. Tenemos dos soportes, uno de cada lado en los cuales se montan los dos conos. El cono A en la parte inferior directamente sobre los soportes y el cono B, por medio de los postes que hemos calculado anteriormente, los cuales van a atornillados a los soportes. En el soporte del lado derecho del ciclista se han montado también los ejes para los engranes planetarios.

En la figura 4.54 se muestran dos vistas del ensamble de los dos soportes. Como se puede apreciar en esta figura el soporte de la derecha va atornillado al otro en la parte superior al de la izquierda

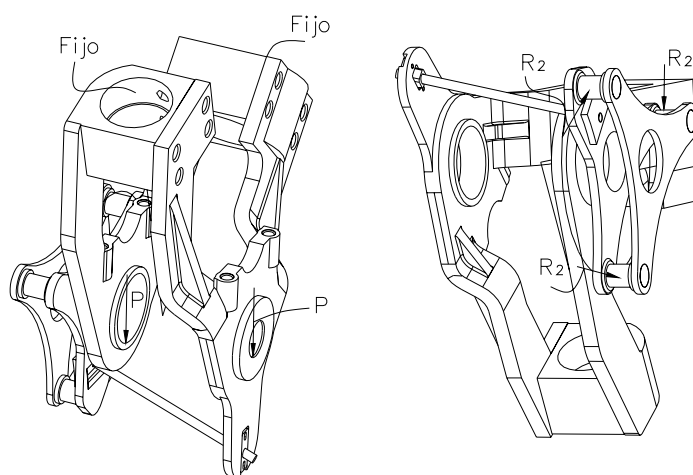


Figura 4.54. Vistas de ambos soportes ensamblados con fuerzas aplicadas en el análisis.

Debido a que tienen una geometría complicada sería demasiado difícil y tardado tratar de calcularlos a mano por lo que se optó por hacer análisis de elemento finito. Se aplicó la fuerza P en cada uno de los soportes en el punto donde se monta el cono A. En el Soporte-Base 1 se aplicó la fuerza resultante R_2 del engrane 2 en cada uno de las flechas donde estos se montan con sus respectivas direcciones. Esto se muestra en la figura 4.54.

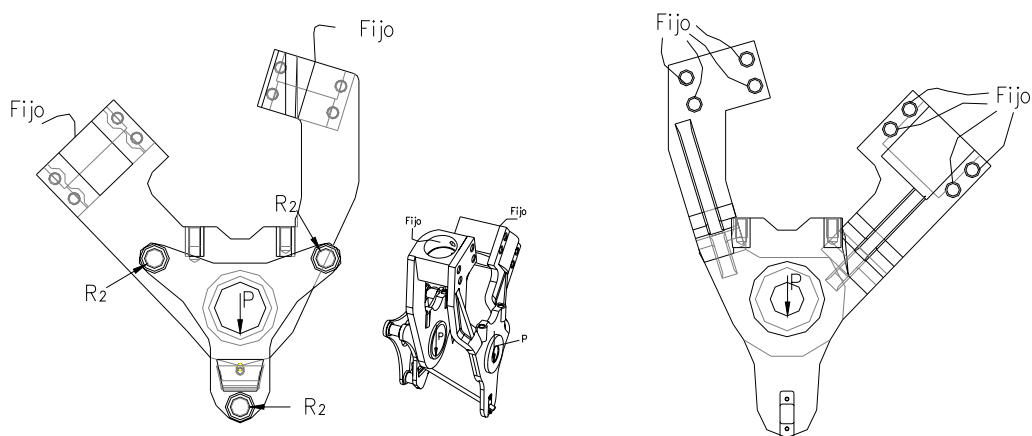


Figura 4.54a. Condiciones del análisis para Soporte-Base 1 y 2.

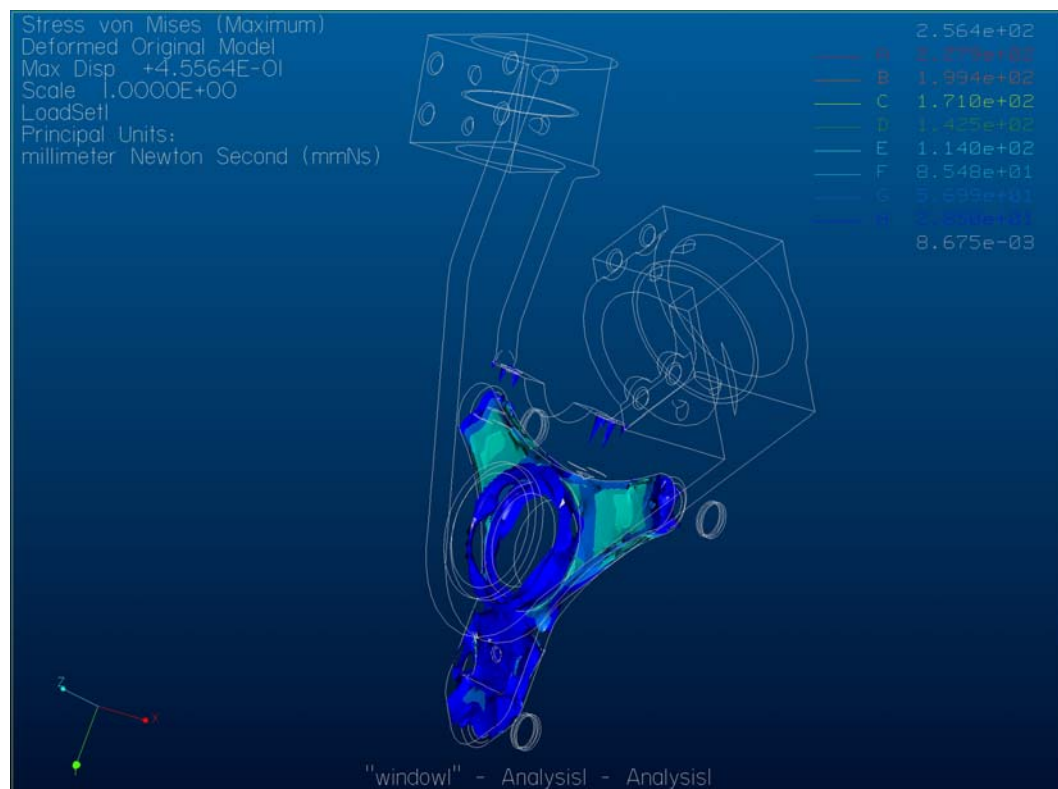
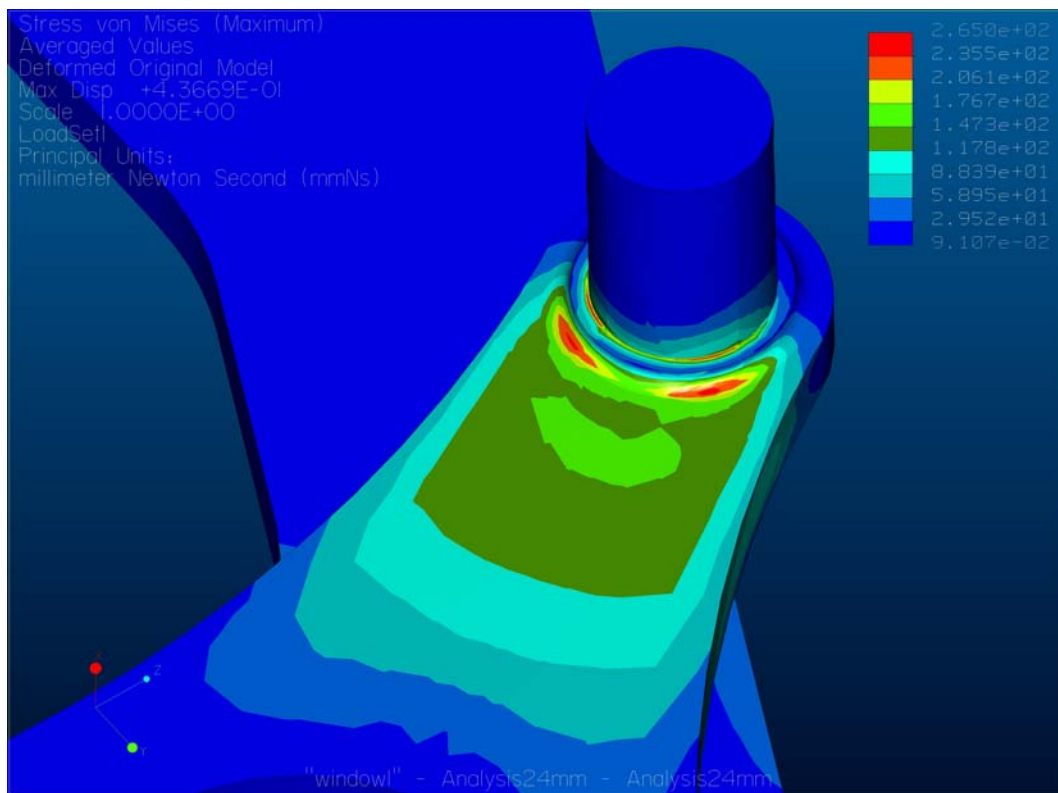


Figura 4.55. Análisis de elemento finito de soporte-base 1.

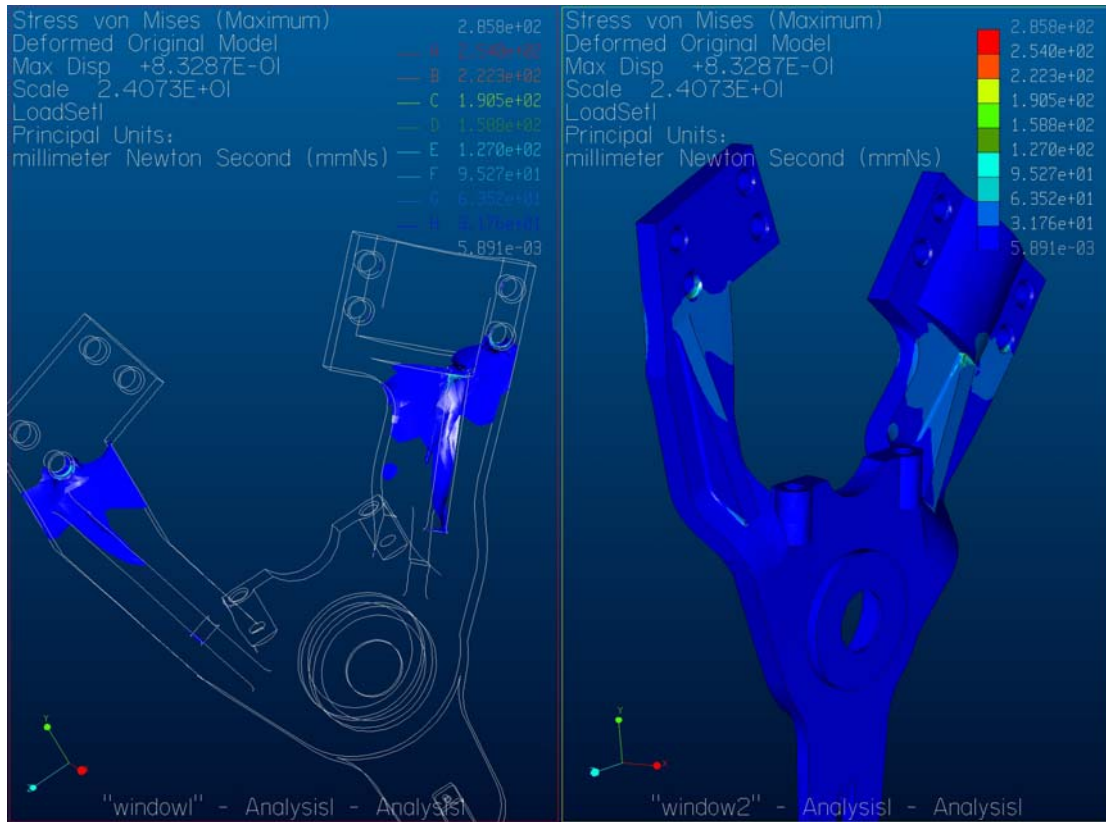


Figura 4.56. Análisis de elemento finito de soporte-base 2.

El material del que serán fabricados es Aluminio 7075-T6 y a continuación se muestran sus características:

Aluminio 7075-T6

Propiedad	Valor
Resistencia a la tensión, Última, MPa	572
Resistencia de cedencia, MPa	503
Elongación, %	11
Módulo de Elasticidad, GPa	71.7

Propiedades del material [9].

Ya que su trabajo es estático se utilizará factor de seguridad $N = 2$.

Por lo tanto es esfuerzo de diseño $\sigma_d = 286$ MPa.

Los resultados encontrados son:

En el soporte-base 1:

Esfuerzo máximo von Mises: 265 MPa

Desplazamiento máximo: 0.4 mm.

En el soporte-base 2:

Esfuerzo máximo von Mises: 83 MPa.

Desplazamiento máximo: 0.6 mm.

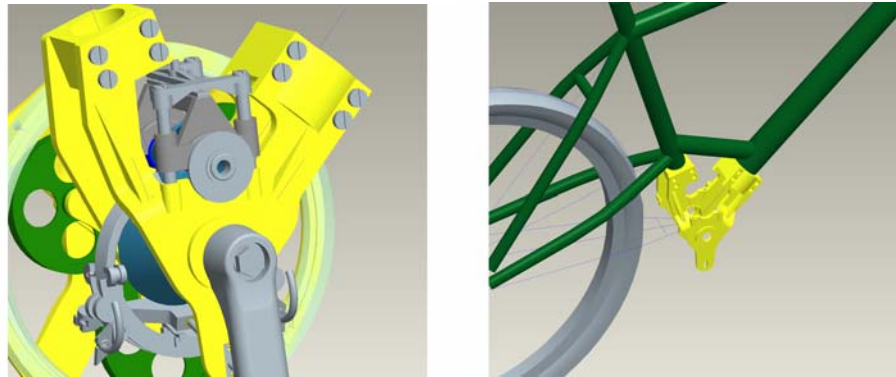


Figura 4.57 Vista de los soportes

4.8. Cadena y catarina.

Se utilizará un juego de cadena y catarina para la transmisión de la potencia hacia la llanta trasera. Se ha tomada esta decisión por razones de peso y de espacio, ya que de haberse hecho a base de engranes y flecha el peso habría aumentado considerablemente además de que el espacio que existe disponible no es suficiente para instalar un sistema tan voluminoso.

Como ya sabemos es necesario en este paso reducir la velocidad de rotación y aumentar el torque. Ya que la reducción que se encuentra en la entrada fue de $VR = 7$ pues en este caso debe ser el mismo valor. Debido a la gran reducción que se debe hacer utilizaremos en la catarina pequeña el menor número de dientes n_c posible que según las tablas [12] es 9. El paso que se utilizará es de 12.5 mm. pues, aunque en realidad no existe un tamaño estándar

entre los fabricantes de bicicletas para el tamaño de las cadenas este es el paso utilizado más comúnmente como en el caso de Shimano con su modelo IG. Entonces para calcular el diámetro de paso de la catarina pequeña utilizamos la siguiente fórmula.

$$d_c = \frac{p}{\text{sen}(180^\circ/N)} = \frac{12.5\text{mm}}{\text{sen}(180^\circ/9)} = 37.13\text{mm} \quad (4.88)$$

El número de dientes en la catarina trasera será de

$$N_c = n_c VR = 9(7) = 63 \quad (4.89)$$

y el diámetro

$$D_c = d_v VR = 37.13(7) = 259.93\text{mm} \quad (4.90)$$

De hecho el tamaño de la catarina trasera es bastante grande y de hecho no existen catarinas estándar del tamaño especificado por lo tanto será necesario fabricarlas especiales.

Un material utilizado en la industria de biciletas para la fabricación de catarinas debido a su bajo peso y alta resistencia es el aluminio 7075-T6, el mismo que hemos utilizado para otros elementos de la bicileta. Por lo tanto nuevamente lo utilizaremos nuevamente.

El método de afianzamiento de la catarina delantera con el cono B será hecho por medio de ranuras. Mediante el procedimiento estándar de diseño de ranuras se obtuvieron los siguientes resultados.

$$\begin{array}{ll} T= & 18.83 \text{ Nm} & L= & 10 \text{ mm} \\ & & T/m & 1882.65 \text{ N} \\ D= & 14 & & \end{array}$$

Fórmulas para ranuras SAE rectas

Ajuste permanente					
N	W	h	d	τ (Pa)	
4	3.374	1.05	11.9	69.23	
6	3.5	0.7	12.6	67.41	
10	2.184	0.63	12.74	44.70	
16	1.372	0.63	12.74	27.94	

Tabla 4.22. Dimensiones y esfuerzos presentados para diferente número de dientes en las ranuras [12].

Se escogen 6 ranuras. La longitud L de las ranuras es de 10 mm. y el torque máximo que se presentó a la salida del cono B es de 18.83 Nm. El diámetro D máximo de las ranuras es de 14 mm., que es el diámetro de la flecha del cono B.

Se han presentado los principales cálculos que tomaron lugar en el diseño del sistema, ahora veremos las modificaciones realizadas sobre el cuadro de la bicicleta.

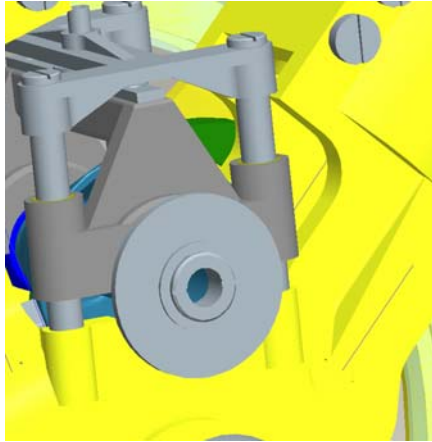


Figura 4.58 Vista de la catarina.

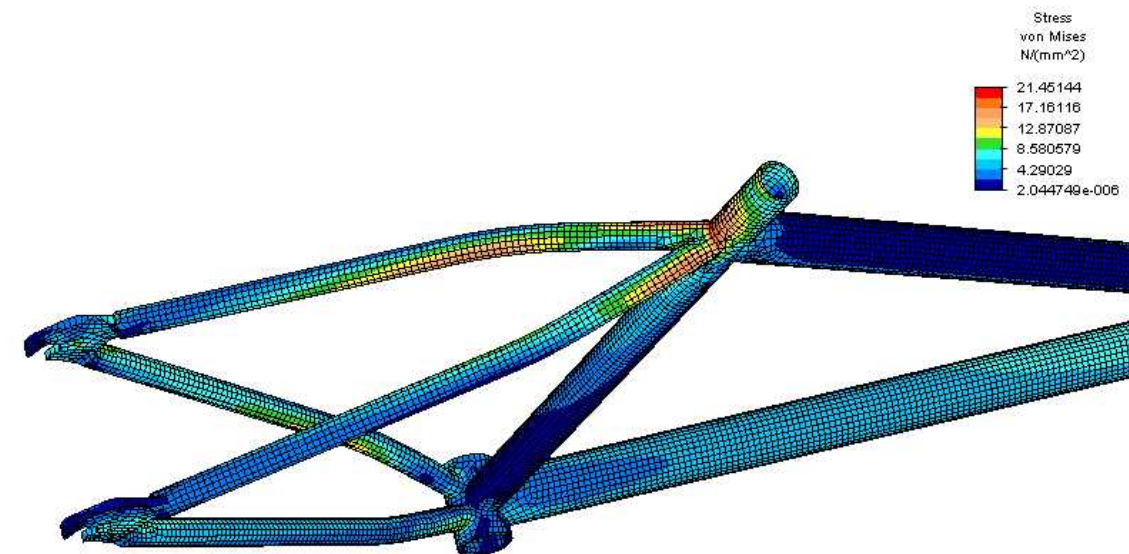
4.9 Modificaciones al cuadro.

Para poder realizar las modificaciones al cuadro y de hecho para el diseño de los soportes presentados anteriormente se midió el cuadro utilizando la máquina de medición por coordenadas, cinta métrica y calibrador para poder tener el modelo en CAD.

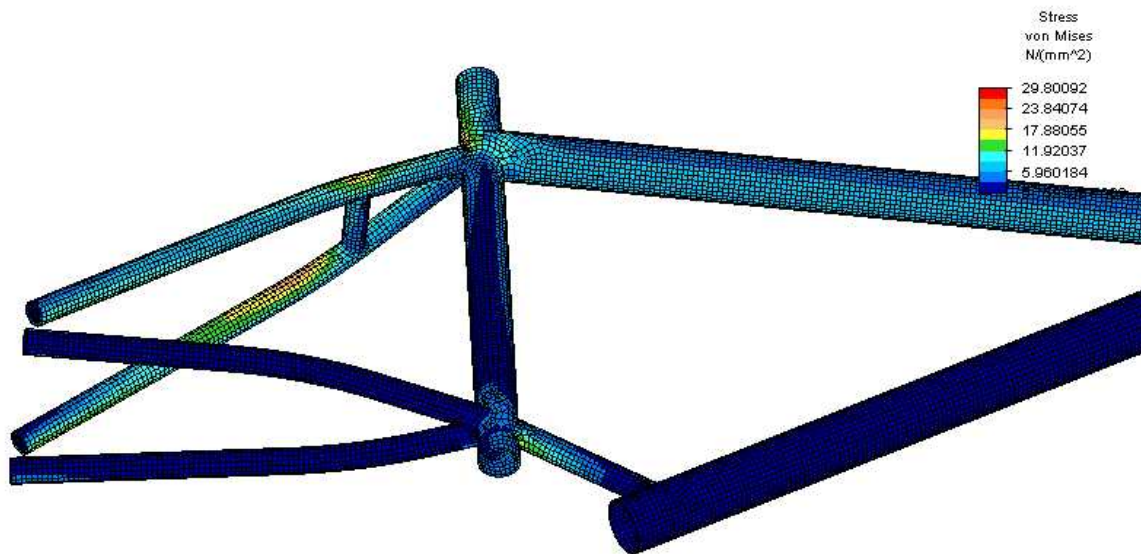
Posteriormente se realizó un análisis de elemento finito estático para tener un parámetro de referencia acerca de los esfuerzos que debe soportar.

Vemos en este análisis que el máximo esfuerzo presentado en el cuadro fue de 21.46 MPa. Es muy bajo, pero hay que considerar que solo fue un análisis estático. Sin embargo este dato nos sirve como punto de referencia para el cambio de cuadro.

A continuación se realizó un análisis en iguales condiciones y se compararon los resultados. Vemos que los esfuerzos aumentaron a casi 30 MPa, casi un 40% sin embargo sigue estando dentro del esfuerzo permisible.



Load Case: 1 of 1
Maximum Value: 21.4514 $N/(mm^2)$
Minimum Value: 2.04475e-006 $N/(mm^2)$



Load Case: 1 of 1
Maximum Value: 29.8009 $N/(mm^2)$
Minimum Value: 5.75941e-009 $N/(mm^2)$

Figura 4.59. Análisis de elemento finito para el cuadro original y el modificado.

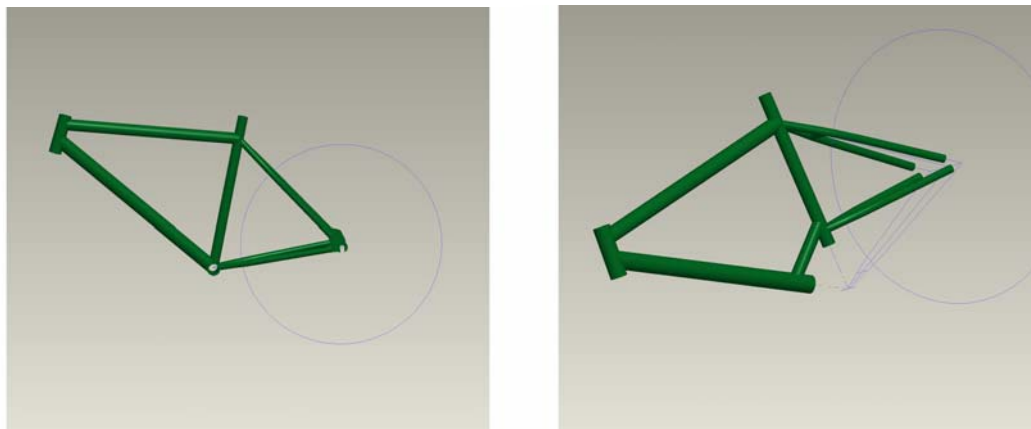


Figura 4.60 Vista de los dos cuadros. Original a la izquierda, nuevo a la derecha

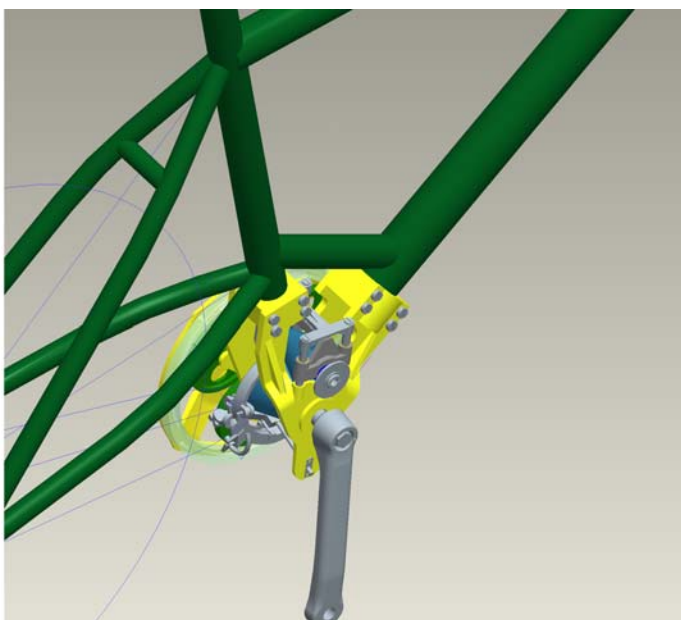


Figura 4.61a. Vista general de ensamble con el cuadro de la bicicleta.

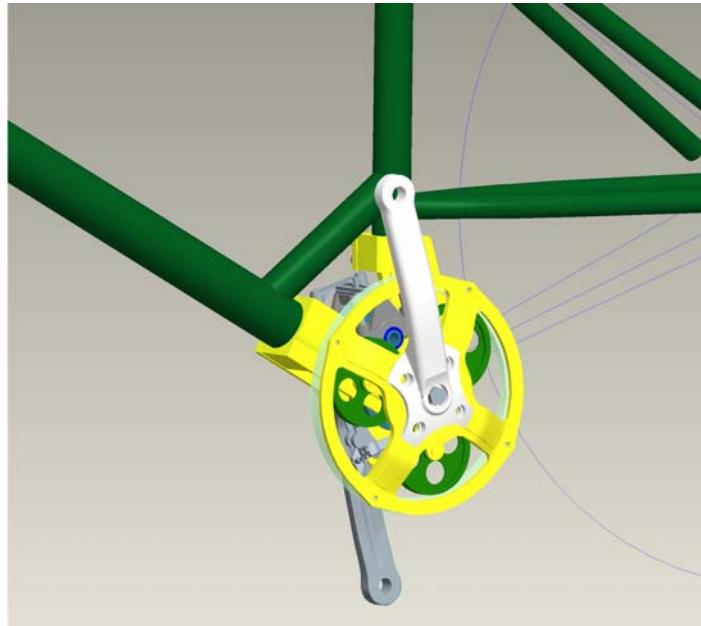


Figura 4.61b. Vista general de ensamble con el cuadro de la bicicleta.