CAPÍTULO 4

DEFINICIÓN DE LAS PROPIEDADES PARA UNA PARED COMPUESTA SOMETIDA A FLEXIÓN

En el capítulo anterior, se mencionó la configuración de una pared compuesta, las asunciones que hay que tomar en cuenta así como el análisis para una pared compuesta sometida a Tensión. En este capítulo las suposiciones siguen siendo las mismas para el análisis de rigidez así como la configuración de la pared compuesta.

4.1 Análisis de rigidez para una pared compuesta sometida a Flexión.

Las intensidades de un momento actuando en una sola capa, digamos la capa p están dadas por las ecuaciones siguientes de igual manera que obtuvimos las intensidades de fuerza en el capítulo anterior [3]:

$$(M_x)_p = \int_{z_{p-1}}^{z_p} \sigma_x z\,dz \tag{4.1}$$

de la misma manera para la direcciones y- y x-y:

$$(M_y)_p = \int_{z_{p-1}}^{z_p} \sigma_y z\,dz \tag{4.2}$$

$$(M_{xy})_p = \int_{z_{p-1}}^{z_p} \sigma_{xy} z\,dz \tag{4.3}$$

Si se sustituye el esfuerzo σ_x y se toman en cuenta las deformaciones causadas por el efecto membrana y la curvatura k, se le agrega el subíndice p a los términos Qij de la ecuación (2.2) del capítulo 2 y se sustituye en la ecuación (4.1) se obtiene la siguiente ecuación:

$$(M_x)_P = \left(\int_{z_{p-1}}^{z_p} \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_P \begin{vmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{vmatrix} dz - \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_P z \begin{vmatrix} k_x \\ K_y \\ k_{xy} \end{vmatrix} \right) z dz \quad (4.4)$$

Evaluando la integral se obtiene:

$$(M_x)_P = -\tfrac{1}{2}(z_p^2 - z_{p-1}^2) \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_p \begin{vmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{vmatrix} dz + \tfrac{1}{3}(z_p^3 - z_{p-1}^3) \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_P z \begin{vmatrix} k_x \\ K_y \\ k_{xy} \end{vmatrix}$$

(4.5)

El proceso se puede repetir para las otras componentes de σ_y y σ_{xy} como se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$(M_y)_P = -\tfrac{1}{2}(z_p^2 - z_{p-1}^2) \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_p \begin{vmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{vmatrix} dz + \tfrac{1}{3}(z_p^3 - z_{p-1}^3) \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_P z \begin{vmatrix} k_x \\ K_y \\ k_{xy} \end{vmatrix}$$

(4.6)

$$(M_{xy})_P = -\tfrac{1}{2}(z_p^2 - z_{p-1}^2) \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_p \begin{vmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{vmatrix} dz + \tfrac{1}{3}(z_p^3 - z_{p-1}^3) \left| Q_{11} \quad Q_{12} \quad Q_{13} \right|_P z \begin{vmatrix} k_x \\ K_y \\ k_{xy} \end{vmatrix}$$

(4.7)

Las ecuaciones anteriores se pueden combinar y escribir en forma matricial y al ser sumadas cada una de las intensidades de momento en cada una de las capas se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} \square_x \\ \square_y \\ \square_{xy} \end{vmatrix} = \sum_{P=1}^{N} \square \tfrac{1}{2}(z_p^2 \square z_p^2 \square 1) \begin{vmatrix} Q\square_{11} & Q\square_{12} & Q\square_{13} \\ Q\square_{12} & Q\square_{22} & Q\square_{23} \\ Q\square_{13} & Q\square_{23} & Q\square_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \square_x^0 \\ \square_y^0 \\ \square_{xy}^0 \end{vmatrix} dz + \tfrac{1}{3}(z_p^3 \square z_{p\square 1}^3) \begin{vmatrix} Q\square_{11} & Q\square_{12} & Q\square_{13} \\ Q\square_{12} & Q\square_{22} & Q\square_{23} \\ Q\square_{13} & Q\square_{23} & Q\square_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} k_x \\ K_y \\ k_{xy} \end{vmatrix}$$

(4.8)

Usualmente se utiliza la forma abreviada y está dada por la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} M_x \\ \square_y \\ \square_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \square_x^0 \\ \square_y^0 \\ \square_{xy}^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_x \\ \square_y \\ \square_{xy} \end{vmatrix} \qquad (4.9)$$

donde:

$$D_{ij} = \sum_{p=1}^{N} (t_p z_p^2 + t_p^3/12)(Q_{ij})_p \qquad \text{Rigidez a Flexión} \qquad (4.10)$$

donde t_p es el espesor de la capa.

Para obtener las constantes elásticas es necesario invertir la matriz de la ecuación (4.9) Para de está manera obtener la relación fuerza-deformación. La conversión de una matriz $\mathbf{D}_{ij}$ a su inversa $\mathbf{d}_{ij}$ se muestra en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & D_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{vmatrix} \tag{4.11}$$

donde:

$$d_{11} = (D_{22}D_{33} - D_{23}^2)/DD$$
$$d_{22} = (D_{11}D_{33} - D_{13}^2)/DD$$
$$d_{33} = (D_{11}D_{22} - D_{12}^2)/DD$$
$$d_{12} = (D_{13}D_{23} - D_{12}D_{33}^2)/DD$$
$$d_{13} = (A_{12}D_{23} - D_{22}D_{33}^2)/DD$$
$$d_{23} = (D_{12}D_{13} - D_{11}D_{23}^2)/DD$$

Y

$$DD = D_{11}D_{22}D_{33} + 2D_{12}D_{23}D_{13} - D_{22}D_{13}^2 - D_{33}D_{12}^2 - D_{11}D_{23}^2$$

Sustituyendo las constantes elásticas en las ecuaciones anteriores se obtiene que:

$$E_x = 12/(t^3 d_{11}) \tag{4.12}$$

$$E_y = 12/(t^3 d_{22}) \tag{4.13}$$

$$G_{xy} = 12/(t^3 d_{33}) \tag{4.14}$$

$$v_{xy} = -d_{12}/d_{11} \tag{4.15}$$

$$v_{yx} = -d_{12}/d_{22} \tag{4.16}$$

4.2 Ejemplo para la validación del programa

A continuación se muestra un ejemplo en el que se utilizan las ecuaciones del capítulo 3 y del presente capítulo. Este ejemplo tiene como fin también validar el programa que se ha desarrollado para la obtención de las propiedades para una pared compuesta sometida a tensión o flexión.

Si se considera la siguiente configuración para una pared compuesta (0/45/-45/90)s. Donde las capas son unidireccionales y todas las capas son de fibra de carbono de alta resistencia, con un espesor de 0.125 mm cada una y teniendo las siguientes constantes elásticas: E_1=140 GPa E_2= 10 GPa G_{12}= 5 GPa y ν_{12}= 0.3

La configuración de la pared compuesta se muestra en la figura 4.1

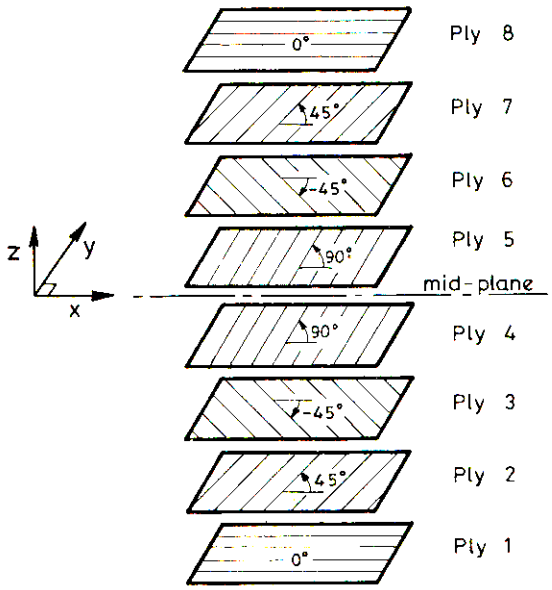

Figura 4.1. Ejemplo 1

1) Primero se obtiene la relación de Poisson menor:

donde:

$\nu_{12}/E_1 = \nu_{21}/E_2$

despejando:

$v_{21} = v_{12} * E_2/E_1 = v_{21} = 0.3 * (10GPa/140GPa) = v_{21} = 0.021$

2) Se obtienen los términos reducidos de la rigidez Q obtenidos de la ecuación (2.8)

$Q_{11} = E_1/(1-v_{12}v_{21}) = 140\ GPa/(1-(0.3 * 0.021) = 140.9\ GPa$

$Q_{22} = E_2/(1-v_{12}v_{21}) = 10\ GPa/(1-(0.3 * 0.021) = 10.1\ GPa$

$Q_{33} = G_{12} = 5.0\ GPa$

$Q_{12} = V_{21} * E_1/(v_{12}v_{21}) = (0.021 * 140\ GPa)/(1-(0.3 * 0.021) = 3.0\ GPa$

3) Se obtienen los términos de la rigidez reducida transformada Q´ obtenidos de la ecuación (3.11).

Tabla 4.1 Terminos de Rigidez Reducida

para 0º	para 90º	para 45º	para (–45º)
$m = \cos 0º = 1;$ $n = \sin 0º = 0;$ $m^2n^2 = 0;$ $m^2 - n^2 = 1;$ $m^4 + n^4 = 1$ $m^3n = 0;$ $m^3n - mn^3 = 0;$ $mn^3 - m^3n = 0;$	$m = \cos 90º = 1;$ $n = \sin 0º = 0;$ $m^2n^2 = 0;$ $m^2 - n^2 = 1;$ $m^4 + n^4 = 1$ $m^3n = 0;$ $m^3n - mn^3 = 0;$ $mn^3 - m^3n = 0;$	$m = \cos 45º = 1/\sqrt{2}$ $n = \sin 45º = 1/\sqrt{2}$ $m^2n^2 = 0.25;$ $m^2 - n^2 = 0;$ $m^4 + n^4 = 0.5$ $m^3n = 0.25;$ $m^3n - mn^3 = 0;$ $mn^3 - m^3n = 0;$	$m = \cos (-45º) = 1/\sqrt{2}$ $n = \sin -45º = -1/\sqrt{2}$ $m^2n^2 = 0.25;$ $m^2 - n^2 = 0;$ $m^4 + n^4 = 0.5$ $m^3n = -0.25;$ $m^3n - mn^3 = 0;$

$m^2 = 1$;	$m^2 = 1$;	$m^2 = 0.5$;	$mn^3 - m^3n = 0$;
$n^2 = 0$;	$n^2 = 0$;	$n^2 = 0.5$;	$m^2 = 0.5$;
$2m^2n^2 = 0$;	$2m^2n^2 = 0$;	$2m^2n^2 = 0.5$;	$n^2 = 0.5$;
$mn^3 = 0$;	$mn^3 = 0$;	$mn^3 = 0.25$;	$2m^2n^2 = 0.5$;
$2(m^3n - mn^3) = 0$	$2(m^3n - mn^3) = 0$	$2(m^3n - mn^3) = 0$	$mn^3 = -0.25$;
$2(mn^3 - m^3n) = 0$	$2(mn^3 - m^3n) = 0$	$2(mn^3 - m^3n) = 0$	$2(m^3n - mn^3) = 0$
$m^4 = 1$	$m^4 = 1$	$m^4 = 0.25$	$2(mn^3 - m^3n) = 0$
$n^4 = 0$	$n^4 = 0$	$n^4 = 0.25$	$m^4 = 0.25$
$4m^2n^2 = 0$	$4m^2n^2 = 0$	$4m^2n^2 = 1$	$n^4 = 0.25$
			$4m^2n^2 = 1$

Sustituyendo los valores trigonométricos y los valores de la rigidez reducida obtenidos en la ecuación se obtienen los siguientes resultados:

Para 0º

$Q'_{11} = m^4Q_{11} + n^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4m^2m^2Q_{33}$

$= (1 * 140.9 \text{ GPa}) + (0 * 10.1 \text{ GPa}) + (0 * 0.3) +(0 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 140.9 \text{ GPa}$

$Q'_{22} = n^4Q_{11} + m^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0 * 140.9 \text{ GPa}) + (1 * 10.1 \text{ GPa}) + (0 * 0.3) +(0 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 10.1 \text{ GPa}$

$Q'_{33} = m^2n^2Q_{11} + m^2n2Q_{22} - 2m^2n^2Q_{12} + (m^2-n^2)2Q_{33}$

$= (0 * 140.9 \text{ GPa}) + (0 * 10.1 \text{ GPa}) - (0 * 0.3) + (1 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 5.0 \text{ GPa}$

$Q'_{12} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} + (m^4 + n^4)Q12 - 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0 * 140.9\ GPa) + (0 * 10.1\ GPa) + (1 * 0.3) - (0 * 5.0\ GPa)$

$= 3.0\ GPa$

$Q'_{13} = m^3nQ_{11} - mn^3Q_{22} + (mn^3 - m^3n)Q_{12} + 2(mn^3 - m^3n)Q_{33}$

$= (0 * 140.9\ GPa) - (0 * 10.1\ GPa) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa) = 0$

$Q'_{23} = mn^3Q_{11} - m^3nQ_{22} + (m^3n - mn^3)Q_{12} + 2(m^3n - mn^3)Q_{33}$

$= (0 * 140.9\ GPa) - (0 * 10.1\ GPa) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa) = 0$

Para 90º

$Q'_{11} = m^4Q_{11} + n^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0 * 140.9\ GPa) + (1 * 10.1\ GPa) + (0 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa)$

$= 10.1\ GPa$

$Q'_{22} = n^4Q_{11} + m^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4m^2n^2Q_{33}$

$= (1 * 140.9\ GPa) + (0 * 10.1\ GPa + (0 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa)$

$= 140.9\ GPa$

$Q'_{33} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} - 2m^2n^2Q_{12} + (m^2-n^2)2Q_{33}$

$= (0 * 140.9\ GPa) + (0 * 10.1\ GPa) - (0 * 0.3) + (1 * 5.0\ GPa)$

$= 5.0\ GPa$

$Q'_{12} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} + (m^4 + n^4)Q_{12} - 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0 * 140.9\ GPa) + (0 * 10.1\ GPa) + (1 * 0.3) - (0 * 5.0\ GPa)$

$= 3.0\ GPa$

$Q'_{13} = m^3nQ_{11} - mn^3Q_{22} + (mn^3 - m^3n)Q_{12} + 2(mn^3 - m^3n)Q_{33}$

$= (0 * 140.9\ GPa) - (0 * 10.1\ GPa) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa) = 0$

$Q'_{23} = mn^3Q_{11} - m^3nQ_{22} + (m^3n - mn^3)Q_{12} + 2(m^3n - mn^3)Q_{33}$

$= (0 * 140.9 \text{ GPa}) - (0 * 10.1 \text{ GPa}) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0 \text{ GPa}) = 0$

Para 45º

$Q'_{11} = m^4Q_{11} + n^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4n^2n^2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9 \text{ GPa}) + (0.25 * 10.1 \text{ GPa}) + (0.5 * 0.3) +(1 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 44.3 \text{ GPa}$

$Q'_{22} = n^4Q_{11} + m^4Q_{22} + 2n^2n^2Q_{12} + 4n^2n^2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9 \text{ GPa}) + (.25 * 10.1 \text{ GPa}) + (0.5 * 0.3)+(1 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 44.33 \text{ GPa}$

$Q_{33} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} - 2m^2n^2Q_{12} + (m^2-n^2)2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9 \text{ GPa}) + (0.25 * 10.1 \text{ GPa}) - (0.5 * 0.3) + (0 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 36.3 \text{ GPa}$

$Q_{12} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} + (m^4 + n^4)Q_{12} - 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9 \text{ GPa}) + (0.25 * 10.1 \text{ GPa}) + (0.5 * 0.3) - (1 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 34.3 \text{ GPa}$

$Q_{13} = m^3nQ_{11} - mn^3Q_{22} + (mn^3 - m^3n)Q_{12} + 2(mn^3 - m^3n)Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9 \text{ GPa}) - (0.25 * 10.1 \text{ GPa}) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 32.7 \text{ GPa}$

$Q_{23} = mn^3Q_{11} - m^3nQ_{22} + (m^3n - mn^3)Q_{12} + 2(m^3n - mn^3)Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9 \text{ GPa}) - (0.25 * 10.1 \text{ GPa}) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0 \text{ GPa})$

$= 32.7 \text{ GPa}$

Para (–45º)

$Q'_{11} = m^4Q_{11} + n^4Q_{22} + 2n^2n^2Q_{12} + 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9\ GPa) + (0.25 * 10.1\ GPa) + (0.5 * 0.3) + (1 * 5.0\ GPa)$

$= 44.3\ GPa$

$Q'_{22} = n^4Q_{11} + m^4Q_{22} + 2m^2n^2Q_{12} + 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9\ GPa) + (.25 * 10.1\ GPa) + (0.5 * 0.3) + (1 * 5.0\ GPa)$

$= 44.33\ GPa$

$Q'_{33} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} - 2m^2n^2Q_{12} + (m^2-n^2)2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9\ GPa) + (0.25 * 10.1\ GPa) - (0.5 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa)$

$= 36.3\ GPa$

$Q_{12} = m^2n^2Q_{11} + m^2n^2Q_{22} + (m^4 + n^4)Q_{12} - 4m^2n^2Q_{33}$

$= (0.25 * 140.9\ KN/mm^2) + (0.25 * 10.1\ KN/mm^2) + (0.5 * 0.3) - (1 * 5.0\ GPa)$

$= 34.3\ GPa$

$Q'_{13} = m^3nQ_{11} - mn^3Q_{22} + (mn^3 - m^3n)Q_{12} + 2(mn^3 - m^3n)Q_{33}$

$= (-0.25 * 140.9\ GPa) - (-0.25 * 10.1\ GPa) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa)$

$= -32.7\ GPa$

$Q'_{23} = mn^3Q_{11} - m^3nQ_{22} + (m^3n - mn^3)Q_{12} + 2(m^3n - mn^3)Q_{33}$

$= (-0.25 * 140.9\ GPa) - (-0.25 * 10.1\ GPa) - (0 * 0.3) + (0 * 5.0\ GPa)$

$= -32.7\ GPa$

1) Determinamos el espesor de cada una de las capas de la pared compuesta obtenidos de la figura 4.1 y obtenemos los valores para las siguientes

expresiones: t_p, z_p, $t_p z_p$, $(t_p z_p^2 + t_p^3/12)$

Los cuales están dados en siguiente tabla:

Tabla 4.2 Valores Centroidales

Numero de Capa	t_p (mm)	z_p(mm)	$(t_p z_p^2 + t_p^3/12)$
1	0.25	-0.4375	0.0241
2	0.25	$-0.3_{12}5$	0.0124
3	0.25	-0.1875	0.0046
4	0.25	-0.0625	0.0007
5	0.25	0.0625	0.0007
6	0.25	0.1875	0.0046
7	0.25	0.3125	0.0124
8	0.25	0.4375	0.0241

5) Determinamos la rigidez extensional a Tensión $\mathbf{A}_{ij}$ como se definió en la ecuación (3.18). De la tabla 4.1 se obtiene t_p y del paso 3 se obtienen los términos de la rigidez reducida transformada para cada capa. En este caso se calcula solamente de la capa 1 a la 4 y se multiplica por dos debido a la simetría de la pared compuesta par de está manera obtener el valor total para la rigidez extensional a tensión de toda la pared.

A_{11} = 2((0.125mm * 140.0 GPa)$_{\text{capa 1}}$ + (0.125mm * 44.3 GPa)$_{\text{capa 2}}$ + (0.125mm * 44.3 GPa)$_{\text{capa 3}}$ + (0.125mm * 10.1 GPa)$_{\text{capa 4}}$

= 59.9 KN/mm

A_{22} = 2((0.125mm * GPa)$_{capa\ 1}$ + (0.125mm * 44.3 GPa)$_{capa\ 2}$ + (0.125mm * 44.3 GPa)$_{capa\ 3}$ + (0.125mm * 140.9 GPa)$_{capa\ 4}$

= 59.9 KN/mm

A_{33} = 2((0.125mm * 5.0 GPa)$_{capa\ 1}$ + (0.125mm * 34.3 GPa)$_{capa\ 2}$ + (0.125mm * 34.3 GPa)$_{capa\ 3}$ + (0.125mm * 5.0 GPa)$_{capa\ 4}$

= 20.7 KN/mm

A_{12} = 2((0.125mm * 3.0 GPa)$_{capa\ 1}$ + (0.125mm * 34.3 GPa)$_{capa\ 2}$ + (0.125mm * 34.3 GPa)$_{capa\ 3}$ + (0.125mm * 3.0 GPa)$_{capa\ 4}$

= 18.7 KN/mm

A_{13} = 2((0.125mm * 0 GPa)$_{capa\ 1}$ + (0.125mm * 32.7 GPa)$_{capa\ 2}$ + (0.125mm * -32.7 GPa)$_{capa\ 3}$ + (0.125mm * 0 GPa)$_{capa\ 4}$

= 0 KN/mm

A_{23} = 2((0.125mm * 0 GPa)$_{capa\ 1}$ + (0.125mm * 32.7 GPa)$_{capa\ 2}$ + (0.125mm * -32.7 GPa)$_{capa\ 3}$ + (0.125mm * 0 GPa)$_{capa\ 4}$

= 0 KN/mm

6) Determinamos la rigidez a flexión D_{ij} como se definió en la ecuación (4.10). De la tabla 4 obtenemos los valores centroidales de cada capa con respecto al eje neutro de la pared compuesta. En este caso se calcula solamente de la capa 1 a la 4 y se multiplica por dos debido a la simetría de la pared compuesta par de está manera obtener el valor total para la rigidez a flexión de toda la pared:

D_{11} = 2((0.0241 mm^3 * 140.0 GPa)$_{capa\ 1}$ + (0.0124 mm^3 * 44.3 GPa)$_{capa\ 2}$ +

$(0.0046\ mm^3 * 44.3\ GPa)_{capa\ 3} + (007\ mm3 * 10.1\ GPa)_{capa\ 4}$

$= 8.31\ KN*mm$

$D_{22} = 2((0.0241\ mm^3 * 10.1\ GPa)_{capa\ 1} + (0.0124\ mm^3 * 44.3\ GPa)_{capa\ 2} +$

$(0.0046\ mm^3 * 44.3\ GPa)_{capa\ 3} + (007\ mm^3 * 140.9\ GPa)_{capa\ 4}$

$= 2.19\ KN*mm$

$D_{33} = 2((0.0241\ mm^3 * 5.0\ GPa)_{capa\ 1} + (0.0124\ mm^3 * 36.3\ GPa)_{capa\ 2} + (0.0046\ mm^3 *$

$36.3\ GPa)_{capa\ 3} + (007\ mm^3 * 5.0\ GPa)_{capa\ 4}$

$= 1.48\ KN*mm$

$D_{12} = 2((0.0241\ mm^3 * 3.0\ GPa)_{capa\ 1} + (0.0124\ mm^3 * 34.3\ GPa)_{capa\ 2} + (0.0046\ mm^3 *$

$34.3\ GPa)_{capa\ 3} + (007\ mm^3 * 3.0\ GPa)_{capa\ 4}$

$= 1.32\ KN*mm$

$D_{13} = 2((0.0241\ mm^3 * 0\ GPa)_{capa\ 1} + (0.0_{12}4\ mm^3 * 32.7\ KN/mm^2)_{capa\ 2} + (0.0046\ mm^3 *$

$-32.7\ GPa)_{capa\ 3} + (007\ mm^3 * 0\ GPa)_{capa\ 4}$

$= 0.51\ KN*mm$

$D_{13} = 2((0.0241\ mm^3 * 0\ GPa)_{capa\ 1} + (0.0124\ mm^3 * 32.7\ GPa)_{capa\ 2} + (0.0046\ mm^3 *$

$-32.7\ GPa)_{capa\ 3} + (007\ mm^3 * 0\ GPa)_{capa\ 4}$

$= 0.51\ KN*mm$

7) De la ecuación (3.19) obtenemos los términos compilados exenciónales aij obteniendo los valores de la rigidez extensional Aij del paso 5.

Donde:

$$AA = A_{11}A_{22}A_{33} + 2A_{12}A_{23}A_{13} \square A_{22}A_{13}^2 \square A_{33}A_{12}^2 \square A_{11}A_{23}^2$$

AA = (59.9 KN/mm * 59.9 KN/mm * 20.7 KN/mm) + (0 KN/mm) - (20.7 KN/mm * 18.7 KN/mm) - (0 KN/mm) = 3238.3 KN/mm

$a_{11} = (A_{22}A_{33} - A_{23}^2)/A$

= 59.9 KN/mm/3238.3 KN /mm = 0.01851/(KN/mm)

$a_{22} = (A_{11}A_{33} - A_{13}^2)/AA$

= 59.9 KN/mm/3238.3 KN /mm = 0.01851/(KN/mm)

$a_{33} = (A_{11}A_{22} - A_{12}^2)/AA\,3$

= 1/20.7 KN /mm = 0.0483/(KN/mm)

$a_{12} = (A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}^2)/AA$

= 18.7 KN/mm/3_{23}8.3 KN /mm = -0.0058/(KN/mm)

$a_{13} = (A_{12}A_{23} - A_{22}A_{33}^2)/AA$

= 0 KN/mm/3238.3 KN /mm = 0/(KN/mm)

$a_{23} = (A_{12}A_{13} - A_{11}A_{23}^2)/AA$

= 0 KN/mm/3238.3 KN /mm = 0/(KN/mm)

8) De la ecuación (4.19) obtenemos los términos compilados a flexión d_{ij} obteniendo los valores de la rigidez a flexión D_{ij} del paso 6.

Donde:

$DD = D_{11}D_{22}D_{33} + 2D_{12}D_{23}D_{13} - D_{22}D_{13}^2 - D_{33}D_{12}^2 - D_{11}D_{23}^2$

DD = (8.31 KN/mm * 2.19 KN/mm * 1.48 KN/mm) + 2(1.32 KN/mm * 0.51 KN/mm * 0.51 KN/mm) - (2.19 KN/mm * (0.51 KN/mm)2 - (1.48 KN/mm * (1.32 KN/mm)2) - (8.31 KN/mm * (0.51)2) = 22.31 KN/mm

$d_{11} = (D_{22}D_{33} - D_{23}^2)/DD$

= ((2.19 KN/mm * 1.48 KN/mm) - (0.51 KN/mm)2)/22.31 KN/mm = $0._{133}6$

$d_{22} = (D_{11}D_{33} - D_{13}^2)/DD$

= ((8.31 KN/mm * 1.48 KN/mm) - (0.51 KN/mm)2)/22.31 KN/mm = 0.5396

$d_{33} = (D_{11}A_{22} \square D_{12}^2)/DD$

= ((8.31 KN/mm * 2.19 KN/mm) - (1.32 KN/mm)2)/$_{22}$.31 KN/mm KN/mm = .7376

$d_{12} = (D_{13}D_{23} \square D_{12}D_{33}^2)/DD$

= ((0.51 * 0.51) - (1.32 * 1.48))/ 22.31= -0.0759

$d_{13} = (D_{12}D_{23} \square D_{22}D_{33}^2)/D$D

= (1.32 * 0.51) - (2.19 * 0.51))/$_{22}$.31 = - 0.0199

$d_{23} = (D_{12}D_{13} \square D_{11}D_{23}^2)/D$

= (1.32 * 0.51) - (8.31 * 0.51))/$_{22}$.31 = - 0.1598

8) De la ecuación (3.19) obtenemos las constantes elásticas equivalentes para una pared compuesta sometida a tensión. Donde t es el espesor total de la pared compuesta.

$E_x = 1/(ta_{11}) = 1/(1.0 * 0.085) = 54.1$ GPa

$E_y = 1/(ta_{22}) = 1/(1.0 * 0.085) = 54.1$ GPa

$G_{xy} = 1/(ta_{33}) = 1/(1.0 * 0.0483) = 20.7$ GPa

$v_{xy} = -a_{12}/a_{11} = -(-0.0058)/0.0185 = 0.31$

$v_{yx} = -a_{12}/a_{22} = -(-0.0058)/0.0185 = 0.31$

9) De las ecuaciónes (4.13) a (3.17) obtenemos las constantes elásticas equivalentes para una pared compuesta sometida a flexión. Donde t es el espesor total de la pared compuesta.

$E_x = 12/(t^3 d_{11}) = 12/(1.0^3 * 0.1336) = 89.8$ GPa

$E_y = 12/(t^3 d_{22}) = 12/(1.0^3 * 0.5396) = 22.2$ GPa

$G_{xy} = 12/(t^3 d_{33}) = 12/(1.0^3 * 0.7376) = 16.3$ GPa

$v_{xy} = -d_{12}/d_{11} = -(-0.0759)/0.1336 = 0.57$

$v_{yx} = -d_{12}/d_{22} = -(-0.0759)/0.5396 = 0.14$

4.3 Descripción del funcionamiento del programa

El programa desarrollado en este proyecto de tesis, para obtener las propiedades a tensión o flexión de una pared compuesta se realizo en el software Excel®. Los pasos necesarios para la realización de este programa son los siguientes:

1) Se realizo un hoja de cálculo para cada número de capas de una pared compuesta, por lo que se crearon 20 hojas de cálculo, ya que este programa, realiza el análisis de 1 a 20 capas, debido a que en las aplicaciones reales más comunes, el número de capas dentro de una pared compuesta se encuentran en estos rangos [8].
2) Se introdujo una lista de los posibles ángulos de orientación de las fibras dentro de cada capa, está los ángulos varían de –90º a 90º en incrementos de 5º ya que en aplicaciones reales mas comunes la orientación de las fibras por cada capa se encuentran dentro de este rango.
3) Se creó una lista con los espesores de capa comerciales, los cuales varían de 0.125mm a 2.00 mm.

4) Se creó una base de datos con las propiedades (E, G, ν) de 4 materiales disponibles, siendo estos los más comerciales en la industria. Las propiedades se despliegan automáticamente mediante las aplicaciones programables llamadas " macros" contenidas en el Excel®. Los materiales seleccionados tienen las siguientes características:

   a) Fibra de Carbono de alta resistencia.- Este material es utilizado comúnmente cuando los esfuerzos aplicados a la pared compuesta son a tensión y se requiere de un bajo módulo específico.

   b) Fibra de Carbono de Alto Módulo.- Este material es utilizado comúnmente cuando los esfuerzos principales aplicados a la pared compuesta son a flexión, y se requiere de un bajo módulo específico.

   c) Fibra de vidrio.- Este material se utiliza como una alternativa más económica, disminuyendo considerablemente las propiedades del material, sin embargo en aplicaciones en las que no se requiere un alto módulo de elasticidad, es una alternativa viable con respecto a su módulo específico.

   d) Kevlar.- Este material, se utiliza cuando se requiere un módulo de elasticidad moderado, y un muy alto módulo específico, es decir, la densidad de este material es mucho menor con respecto a los anteriores.

Nota: Los materiales mencionados anteriormente constan de fibras continuas en matriz epóxica.

5) Se introduce la ecuación (2.8) y se obtienen los términos reducidos de la rigidez tomando en cuenta las propiedades del material seleccionado.

6) Se introduce los despejes obtenidos de la ecuación (3.11) para cada uno de los términos reducidos de la rigidez transformados tomando en cuenta los ángulos de las fibras por capa.
7) Se introduce la ecuación (3.18) para obtener la rigidez extensional a tensión, tomando en cuenta el espesor de cada capa.
8) Se introduce la ecuación (4.10) para obtener la rigidez a flexión, teniendo en cuenta los valores centroidales de cada capa.

De la ecuación (3.19) obtenemos los términos compilados extenciónales Aij obteniendo los valores de la rigidez extensional Aij del paso 5.

9) Se introduce la ecuación (3.19) para obtener los términos compilados extensionales.
10) Se introduce la ecuación (4.19) para la obtención de los términos extensionales compilados a flexión.
11) Se introducen la ecuaciones (3.20) a (3.24) y se obtienen las constantes elásticas (E_1, E_2, G_{12} y v_{12} equivalentes para una pared compuesta sometida a tensión.
12) Se introducen las ecuaciones (4.13) a (4.17) y se obtienen las constantes elásticas equivalentes para una pared compuesta sometida a flexión.

Se puede observar en el ejemplo 4,2 lo largo que puede ser el análisis de rigidez para una pared compuesta de un número no muy grande de capas sometida a tensión o flexión. El programa desarrollado en está tesis permite hacer este análisis en un tiempo muchísimo menor hasta una pared de 20 capas, disminuyendo de una manera considerable el análisis cuando se está diseñando con materiales compuestos lográndose

así en muy poco tiempo obtener varias opciones en cuanto al numero de capas, el espesor de cada capa y el tipo de material compuesto, y de está manera seleccionar la opción más adecuada con respecto a las necesidades de diseño requeridas.