CAPTIULO V

5.1 Historia del análisis modal

Lo fundamental del análisis modal es la interpretación de fenómenos complejos en la estructura dinámica con unos simples componentes, como pueden ser, los modos de vibración naturales. Esto viene de una idea atomista, en la cual se buscan los elementos más sencillos y básicos para a partir de ellos obtener las demás substancias, otro concepto es de las series de Fourier, la cual de una simple combinación de ondas de seno y coseno se obtiene una complicad onda, en este sentido se puede dar por hecho el origen del análisis modal, sin embargo hay otros dos hechos representativos para el inicio del análisis modal. El primero se obtiene a partir de las observaciones de Newton, del espectro de la luz solar, la cual confirmo la composición de los colores y sus componentes, en segundo lugar sin ser menos importante se tiene a Fourier, ya que basado en un conocimiento matemático, obtiene que una función periódica arbitraria con un intervalo infinito puede siempre ser representado por una sumatoria de funciones armónicas simples, de aquí el desarrollo del análisis modal.

La teoría del análisis modal, se puede definir con una ecuación de onda, la cual puede describir la dinámica de una secuencia de vibraciones, de esta solución se puede obtener la frecuencias naturales, lo modos de vibración y la respuesta forzada. Esta parte del análisis modal, se desarrollo en gran parte en el siglo XIX, en esta etapa el análisis modal estuvo muy ligada a las matemáticas, por el hecho de la solución de las ecuaciones diferenciales parciales, puesto que estas describen una gran variedad de estructuras dinámicas continuas.

El concepto de un objeto y la introducción del análisis de las matrices fueron traídas acerca un clímax en análisis modal teórico en el ultimo siglo. La teoría fue desarrollada tal que un análisis dinámico de la estructura de un sistema arbitrario puede ser obtenido cuando sabiendo la distribución de su masa y dureza en forma matricial. Sin embargo la teoría pudo únicamente realizado después computadoras fueron inventadas. En ese aspecto el análisis modal teórico es mucho más análisis modal numérico.

En el último siglo es cuando se inicia con el análisis modal experimental. La función vital del análisis modal experimental es la búsqueda del sistema, como un resultado, lo cual fue desarrollado gracias al avance que se logro en la rama de la ingeniería eléctrica y de sistemas. La afinidad de los circuitos eléctricos y un procedimiento mecánico, acento la aplicación de alguna suposición del análisis de circuitos hacia el estudio de sistemas mecánicos. Con lo cual se origino las de técnicas, impedancia mecánica y el análisis del subsistema en la dinámica estructural.

El desarrollo del algoritmo de la transformada de Fourier por J.W.Cooly y J.W.Turkey en 1965, tuvo como objetivo la aplicación rápida y aprovechar una practica experimental en estructuras dinámicas. Con el FFT, las respuestas de la frecuencia de una estructura pueden ser calculadas de la medida de una entrada dada y la respuesta resultante.

La hipótesis del análisis modal, establece la correlación entre la medida de la FRFs y los datos modales de una muestra probada. En donde se puso énfasis para el desarrollo de esta técnica, fue en derivar la información modal de la medida de FRF. Los pioneros del método de análisis experimental son C.C Kennedy y C.D.Pancu en 1947 antes de que la FFT se hubiera hecho, pero este método no se siguió desarrollando hasta que el FFT llego y resurgió el análisis modal experimental, a partir de aquí cuantiosos métodos han sido propuestos y gran parte se han computarizado, incluso, estos métodos son cimentados en vibraciones libres de una estructura *rather than* con su respuesta en frecuencia.

El análisis modal metódico tradicional basado en la proporcionalidad de un modelo de amortiguamiento, fue difundido en uno no proporcional modelo de amortiguamiento, se logro abrir el camino para los modos de vibración compleja, se pudo desenvolver la solución a los problemas dinámicos estructurales inversos como la identificación de la fuerza desde una medida de respuesta y las características dinámicas no lineales fueron desarrolladas experimentalmente. En la actualidad el campo del análisis modal a sido de gran ayuda en la rama de la ingeniería como de la ciencia.

5.2 Análisis modal

En los últimos dos décadas, el análisis modal se ha convertido en una de las mejores herramientas para el arrojo, invención y mejoras para el diseño de las estructuras dinámicas. No solo siendo ocupado en el ambiente mecánico y aeronáutico, se ha encontrado gran aplicación en las áreas de: ingeniería civil, biomecánica, estructuras espaciales. Para comprender esta tecnología, se debe tener el conocimiento de las bases para poder encontrar su aplicación.

En la actualidad en los diseños complejos mecánicos, aeronáuticos o estructuras civiles, se busca que estos sean mucho más ligeros, flexibles y sobre todo más fuertes. En la industria automotriz se necesita estructuras que aguanten una gran cantidad de kilómetros y ligeras, en la aeronáutica en el caso de los satélites se necesitan estructuras que trabajen en condiciones extremas y duraderas, de fácil mantenimiento. Estas demandas intransigentes en las estructuras de hoy suelen hacer susceptibles las vibraciones no deseadas.

Otro factor en la vida moderna es la de incrementar la demanda, seguridad y la rentabilidad de las estructuras y que cumplan con las regulaciones de los propios gobiernos o con las necesidades del consumidor. Estas demandas se han convertido en un reto tanto para los científicos entendiendo las necesidades de las estructuras ingenie riles, donde las vibraciones son de suma importancia, estos retos recaen en las propiedades dinámicas usando un análisis tanto numérico como experimental o en una combinación de ambas.

El análisis de elemento finito modelado por una computadora a proveído a los ingenieros una versátil herramienta para el diseño, especialmente en las propiedades dinámicas cuando se necesita un análisis cuidados. Este análisis numérico requiere de una rigurosa teoría para su comprensión y utilización en especial lo relacionado con las estructuras dinámicas. Y una parte importante del elemento finito dinámico es el análisis modal.

Un modelado por computadora sola no puede determinar completamente el comportamiento dinámico de la estructura, porque no sabe con certeza las propiedades de la estructura, al mismo tiempo si tiene amortiguamiento o no linealidad, como en el trato de modelado tradicional. Muchas veces las condiciones de frontera nos son totalmente ciertas ya que muchas veces son criterios que uno tomas para ayudar al trabajo del modelado. Estos avances con las técnicas experimentales son un complemento para la determinación de las propiedades de las estructuras. Esto se logra gracias al análisis de la transformada de fourier de una forma digital. Estas técnicas experimentales son basadas por la teoría del análisis modal y trae un nuevo impulso en esto.

5.2.1 Como se define el análisis modal

El modal análisis es el proceso de determinación de las características dinámicas inherentes de un sistema en forma de frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y las formas de modos, y se formula un modela matemático para este comportamiento dinámico. El modelo matemático es referido al modelo modal del sistema y de la información de las características que nosotros sabemos esto es la información modal.

La dinámica de la estructura es físicamente descompuesta por frecuencia y posición. Esto se hace claramente evidente por la solución analítica de las ecuaciones diferenciales parciales de un sistema continuo como vigas y strings. El análisis modales basa en el hecho de las respuestas de vibración (vibration1 response) de un sistema dinámico linear que no varia con el tiempo, esto se puede expresar como la combinación linear de movimientos simples harmónicos, los cuales son llamados modos naturales de la vibración. Este concepto es semejante a la combinación de Fourier de las ondas de senos y cosenos para representar una complicada forma de onda. Los modos naturales de la vibración son inherentes para un sistema dinámico y completamente determinantes por las propiedades físicas (masa, dureza, amortiguamiento) y por la distribución espacial. Cada modelo es descrito en términos de cada parámetro modal: frecuencia natural, el factor de amortiguamiento modal y la trayectoria de desplazamiento llamado modo de forma (mode shape). Cada una corresponde a una frecuencia natural. El grado de participación de cada modo natural de vibración es determinado por las propiedades de excitación (source) y por los modos de forma del sistema.

El análisis modal se basa en las técnicas tanto experimental como la teórica. El análisis modal teórico recae en el modelo físico del sistema dinámico abarcando las propiedades como masa, dureza, amortiguamiento. Estas propiedades se obtienen de las ecuaciones diferenciales parciales. Un ejemplo es la ecuación de la onda de una vibración uniforme string estableciendo su distribución de masa y las propiedades elásticas. La solución de la ecuación se obtiene de las frecuencias naturales y de los modos de forma del string y de las respuestas de las vibraciones forzadas. Un modelo físico más real comprendería las propiedades de masa, dureza y amortiguamiento de forma de la distribución espacial, esto es llamado matriz de masa, dureza y amortiguamiento. Esta matriz es incorporada por una ecuación diferencial normal de movimiento. El principio de superposición en un sistema linear dinámico nos permite transformar el problema un sistema linear más fácil de comprender. Esta solución es dada por los datos modales del sistema. Los nuevos software de análisis de elemento finito aumenta la disctretización de la mayoría de las estructuras dinámicas lineares y el fortalecimiento de sus capacidades y el avance del análisis modal teórico. Por el otro lado una rápida evolución sobre las décadas pasadas sobre la información adquirida y capacidad de procesamiento ha arrojado grandes avances en el área del análisis experimental.

5.3 Aplicaciones prácticas del análisis modal

En las últimas décadas, se tienen un gran número de casos de aplicación que se han reportado del análisis modal, en el cual se han cubierto una gran parte del área de la ingeniería, ciencia y tecnología. Se piensa que en los años venideros el análisis modal va ha tener un impulso significante. Las aplicaciones practicas del análisis modal están gran parte relacionas con el avance de las tecnología experimental. La mayoría de las aplicaciones practicas reportados en libros han sido de la ingeniería aeronáutica, ingeniería automotriz y de la ingeniería mecánica en particular, aunque no hay que discriminar el hecho que la aplicación del análisis modal se ha venido tomando fuerza de una forma interdisciplinaria

En la ingeniería automotriz, la gran comercialización y los aspectos de seguridad asociados con el rediseño del vehículo han obligado al mejor entendimiento de las propiedades dinámicas de la estructura del vehículo y la repercusión que cualquier cambio de diseño. Lo que se ha buscado hoy en día es la combinación del análisis modal experimental y del análisis de elemento finito en el estudio de componentes automotrices. Las estructuras de los nuevos vehículos son mas ligeros y de alta resistencia. Una combinación del análisis modal tanto experimental como analítico, provee un diseño de las auto-partes y un incremento de las propiedades dinámicas de los vehículos. El análisis modal experimental como una herramienta juega un papel crucial en el estudio del ruido y fatiga del vehículo. Un análisis modal simple de un cuerpo-en-blanco o un subframe estructural es una típica aplicación. Una aplicación sofisticada que se a logrado es en el panel del piso de un vehículo la sensibilidad modal, la optimización estructural de un vehículo, la estimación de vida de fatiga de un vehículo, en la suspensión de un auto con un mecanismo controlado de activación de vibración y una condición de monitoreo y diagnostico del sistema del motor de un vehículo. El análisis modal es usado como una herramienta para entender el surgimiento del ruido es la estructura de los componentes del vehículo.

El análisis modal a alcanzado gran aceptación en el área de ingeniería civil, en este caso el área que siempre ha sido crítica es el análisis estructural. El conocimiento de la dinámica es ocupado en estructuras sujetas a sismos y la carga del viento en el cual se garantiza la aplicación del análisis modal. Estas estructuras son usualmente más largas que las ocupadas en mecánica, por eso las pruebas físicas son poco usadas. Después de un gran numero de aplicaciones ellos han adquirido el conocimiento con la predicción de respuesta de la vibración, ellos construyen a escala y crean un ambiente de vibración o cargas externas, con estas predicciones ellos crean modelos matemáticos con el cual se puede derivar por el análisis modal.

5.4 Análisis de la forma del modo físicamente

Con las vibraciones libres no existe la aplicación externa de cargas por lo tanto se define como "cero", por este motivo la estructura a analizar solo tiene vibraciones por los efectos de las condiciones iniciales. Este análisis de vibración raramente es realizado, ya que los casos que se analizan la mayoría esta sujeta a cargas externas y esto nos darían que tal condición es diferente de cero. Sin embargo, la solución del problema de las vibraciones con amortiguación "Cero", provee las características dinámicas más importantes de una estructura: las frecuencias naturales y las formas de los modos. Enseguida se presentaran las formulas mas no la deducción de tales, con el motivo de explicar por que se hace este análisis y su entendimiento para el análisis modal. En este caso se buscar cuando la carga no es cero

$$[M]\{\ddot{y}\} + [K]\{y\} = \{0\} \qquad \text{(a)}$$

Se realizara un análisis modal para un sistema de N-grados de libertad, por lo tanto se asume que una posible solución es la forma.

$$\{y\}_i = \{\Phi\}_i \operatorname{sen}(\omega_i t - \alpha_i) \qquad \text{(b)}$$

Donde $\{\Phi\}_i$ es la i- forma del modo con una correspondiente frecuencia natural circular ω_i y ángulo de fase α_i. Substituyendo la ecuación 2 en la ecuación 1 y se elimina $\operatorname{sen}(\omega_i t - \alpha_i)$ se obtiene.

$$([K] - \omega_i^2 [M])\{\Phi\}_i = \{0\} \qquad \text{(c)}$$

La ecuación (c) puede ser escrita como un sistema de N- ecuaciones por lo cual puede ser dada la ecuación (d)

$$\begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} & \cdots & k_{1N} \\ k_{12} & k_{11} - \omega^2 m_1 & \cdots & k_{2N} \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ K_{N1} & k_{N2} & \cdots & k_{NN} - \omega^2 m_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \Phi_2 \end{Bmatrix}_i \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(d)}$$

La enunciación de las ecuaciones c y d es un problema matemático importante, el cual se denomina “eigenproblema” (valor propio), este valor propio aparece en otros tipos de análisis de la rama de ingeniería y no solo es un segmento de los problemas dinámicos. El ejemplo clásico es, cuando se trata de calcular la cara den la estabilidad estructural. La particularidad del problema valor propio, es que la solución no es única. Para entrar a detalle, $\{\Phi\}_i$ que se calcula en análisis modal no representa las amplitudes del sistema bajo vibración libre, pero aun así, los cocientes normalizados de la amplitud que, cuando están combinados correctamente, pueden proporcionar la reacción dinámica del sistema.

La función del análisis modal es el computo de ω_i y la reciprocidad correspondiente de Φ_i, que compensa a la ecuación c. obteniendo una solución no trivial, por ejemplo, una solución por el cual todos los ω_i y $\{\Phi\}_i$ no son Cero, requiere que el determinante de la ecuación c es cero, por eso:

$$\mathbf{Det\ ([K] - \omega_i^2\ [M]) = 0} \qquad \textbf{(e)}$$

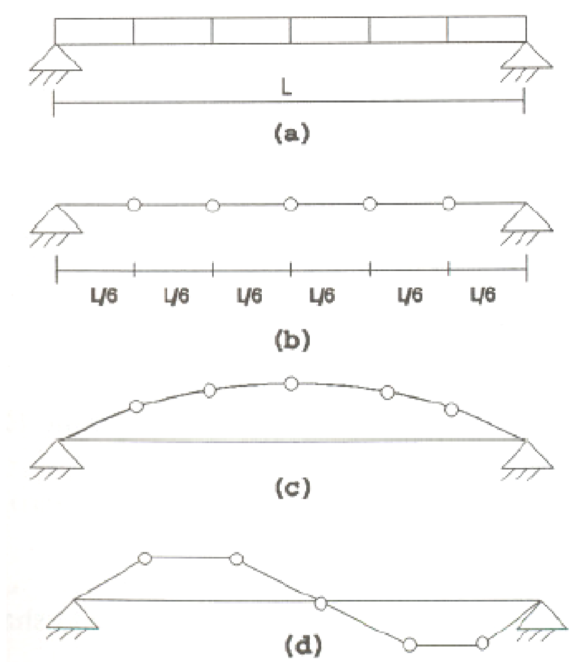
La ecuación e es una ecuación polinomial de ángulo N en ω_i^2. Este polinomial es conocido como la *ecuación característica* del sistema. Para cada solución ω_i^2 $(i = 1,2,\ldots N)$ de la ecuación característica podemos resolver la ecuación d para $\{\Phi\}_i$. Una solución ω_i^2

de la ecuación característica es llamada un eigenvalor (valor propio). Para cada uno de los eigenvalores corresponde un eigenvector, que es, por un sistema con N grados de libertad hay N eigenvectores y sus correspondientes eigenvalores. En dinámica, ω_i es llamado la frecuencia natural circular y los correspondientes eigenvectores son llamados la forma del modo; esto es, en términos del eigenvector y la forma del modo son equivalentes. La frecuencia natural circular mas pequeña ω_i es llamada la *frecuencia circular fundamental* , y su correspondiente forma del modo $\{\Phi\}_i$ es llamado el *modo fundamental* de vibración. [1]

Aquí debe de ser de ayuda exhibir una exégesis física de una forma de modo. La ecuación c formula equilibrio entre la inercia y las fuerzas de dureza en una estructura en tiempo t. si se reformula la ecuación c de tal forma que:

$$[K]\ \{\Phi\}_i = \omega_i^2\ [M]\ \{\Phi\}_i \qquad (f)$$

Una forma del modo puede ser vista como una deflexión estática resultante de la fuerzas del lado de la mano derecha de la ecuación f.



[1] Referencia de "finite element modeling in engineering practice". Constantine C.Spyrakos.

Figura 5.1 Modo de vibración

La imagen anterior los índices (a) y (b) muestran una viga simplemente apoyada modelada con cinco puntos de masa. Los dos primeros modos de esa viga, se presentan en los índices (c) y (d). Los puntos en los cuales la deflexión producida por el modo es cero, a este punto se le llaman nodos. En platos, placas y estructuras de membranas de los nodos recaen sobre líneas nodales. Sólidos tridimensionales tienen superficies nodales.

5.5 Ejemplo del análisis modal teórico

Para que al lector se le facilite el entendimiento de esto, presentare un ejemplo propuesto en el libro de "finite element modeling in engineering practice". Constantine C.Spyrakos:

Ejemplo 1: Encuentra las frecuencias naturales y las formas de los modos de una barra en cantiliver fijada en el extremo y libre en el otro para vibrar axialmente, como se muestra en la siguiente figura. Usa dos elementos y formulaciones de puntos de masa.

(E = 29 x 10^6 psi, L = 480 in, A = 2 in^2, ϱ = 0.10 lb-sec^2/in^4)

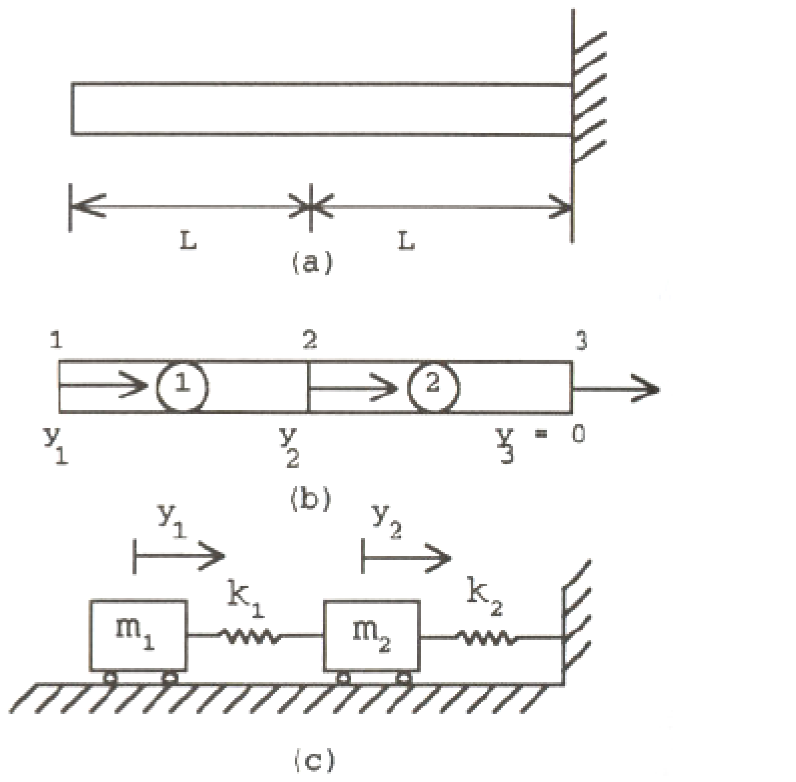


Figura 5.2 Problema análisis modal

Procedimiento de solución:

1. En el modelo de dos elementos con cero fuerza se tiene $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, por tanto:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} + \frac{\varrho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} \quad \textbf{(f)}$$

La U_i en la ecuación f ha sido substituida con y_i (i = 1,2,3) en la ecuación f. Una de las soluciones de la ecuación f es resultado de:

$$\{y\} = \{Y\} \text{ sen } (\omega t - \alpha) \qquad \textbf{(g)}$$

Diferenciando g

$$\{\ddot{y}\} = -\omega^2 \{Y\} \ \sin(\omega t - \alpha) \qquad \textbf{(h)}$$

Al substituir g y h en f se elimina sen (ωt - α) por lo cual se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} - \omega^2 \frac{\varrho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(i)}$$

Desde $Y_3 = 0$, la ecuación i, se reduce, por lo cual:

$$\left[\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\varrho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \textbf{(j)}$$

Después se multiplica las matrices adquiriendo:

$$\left(\frac{EA}{L} - \omega^2 \frac{\varrho AL}{2}\right) Y_1 - \frac{EA}{L} Y_2 = 0$$

$$-\frac{EA}{L}Y_1 + \left(\frac{2EA}{L} - \omega^2 \varrho AL\right) Y_2 = 0 \qquad \textbf{(k)}$$

2. Para una solución no cero las ecuaciones k el determinante debe ser cero

$$\det \left| \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\varrho AL}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

(l)

Dimitimos

$$\mu = \frac{\omega^2(\varrho AL/2)}{EA/L} = \omega^2 \frac{\varrho L^2}{2E}$$

(m)

Por tanto la ecuación l puede ser definida como

$$\det \begin{vmatrix} 1-\mu & -1 \\ -1 & 2-2\mu \end{vmatrix} = 0$$

(n)

La expansión de la determinante deja a la ecuación característica

$$2\mu^2 - 4\mu + 1 = 0$$

(ñ)

3. Las 2 raíces de la ecuación ñ son $\mu_1 = 0.293$, $\mu_2 = 1.707$. Substituyendo μ_1 y μ_2 en la ecuación m, adquirimos las frecuencias naturales circulares para la fundamental y el segundo modo

$$\omega_1 = \frac{0.76}{L}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 27.14 \quad rad/\sec$$

$$\omega_2 = \frac{1.85}{L}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 65.55 \quad rad/\sec$$

(o)

Las frecuencias naturales circulares se logran por medio de un método analítico clásico que considera una viga como un sistema continuo. Tales métodos proveen la exacta ω_1 y ω_2 que para nuestro sistema son dados por

$$\omega_1 = \frac{\pi}{4L}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 27.86 \quad rad/\sec$$

$$\omega_2 = \frac{3\pi}{4L}\sqrt{\frac{E}{\varrho}} = 83.59 \quad rad/\sec$$

(p)

Así, los dos análisis de elemento finito de modelos de dos elementos dan un error de 2.6% y 21.6% por las ω_1 y ω_2, respectivamente.

Las frecuencias naturales convenientes obtenidas con modelos de 2 elementos son

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 4.32 \quad Hz$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 10.44 \quad Hz$$

(p)

Y los periodos naturales

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 0.231 \quad \text{sec}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = 0.096 \quad \text{sec}$$

(q)

Para resolver las ecuación k para las amplitudes Y_1 y Y_2 , observamos que fijando el determinante de la ecuación k igual a cero, el sistema de las dos ecuaciones son reducidas a una ecuación independiente. Así, substituyendo $\omega^2{}_1 = (27.14 \text{ rad/ sec})^2$ en la segunda ecuación k obtenemos

$$-120833\,Y_{11} + 170949\,Y_{21} = 0$$

(r)

Un segundo subíndice en Y_1 y Y_2 ha sido introducido para indicara que la frecuencia circular ω_1 es usado. Desde la ecuación r hay dos no conocidas y solo a una ecuación, podemos resolver para el valor relativo de Y_{21} sobre Y_{11} para obtener

$$\frac{Y_{21}}{Y_{11}} = 0.707$$

Es común asignar a un valor de unidad para uno de las amplitudes; así, seleccionamos Y_1 = 1.00 así que

$$Y_{11} = 1.00$$

$$Y_{21} = 0.707$$

La Y_{21} y Y_{11} definen a la forma del modo que corresponde a las primeras frecuencias naturales.

Similarmente, substituyendo $\omega^2{}_2 = (65.55 \text{ rad/ sec})^2$ en la segunda ecuación r obtenemos

$$\frac{Y_{22}}{Y_{12}} = -0.707$$

Fijamos Y_{12} = -1.00. por lo tanto, la Y_{22} y Y_{12} que especifican la segunda forma del modo son dados por

$$Y_{22} = 0.707$$

$$Y_{12} = -1.00$$

4. A modo que hemos decretado, las amplitudes de la forma del modo son valores relativos que pueden ser normalizados como cada quien pueda escoger. Una normalización conveniente especial para un sistema N grados de libertad es dado por

$$\phi_{ij} = \frac{Y_{ij}}{\left(\sum_{n=1}^{N} m_n Y_{nj}^2\right)^{1/2}} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots N \\ j = 1,2,\ldots N \end{array}$$

(s)

Los elementos de las *formas del modo normalizados* son expresados como $ø_{ij}$ para distinguirlos de la Y_{ij}.

Para este caso la ecuación s:

$$\phi_{11} = \frac{Y_{11}}{\sqrt{(m_1 Y_{11}^2 + m_2 Y_{21}^2)}} = 0.102, \quad \phi_{12} = -0.102$$

$$\phi_{21} = \frac{Y_{21}}{\sqrt{(m_1 Y_{11}^2 + m_2 Y_{21}^2)}} = 0.072, \quad \phi_{22} = 0.072$$

Donde m_1 =0.5 ϱ AL = 48.0 lb – sec^2/in, y m_2 = 2 m_1 son los puntos de las masas en los nodos 1 y 2, respectivamente. La primera y la segunda forma del modo normalizada pueden ser formuladas:

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix}$$

(t1)

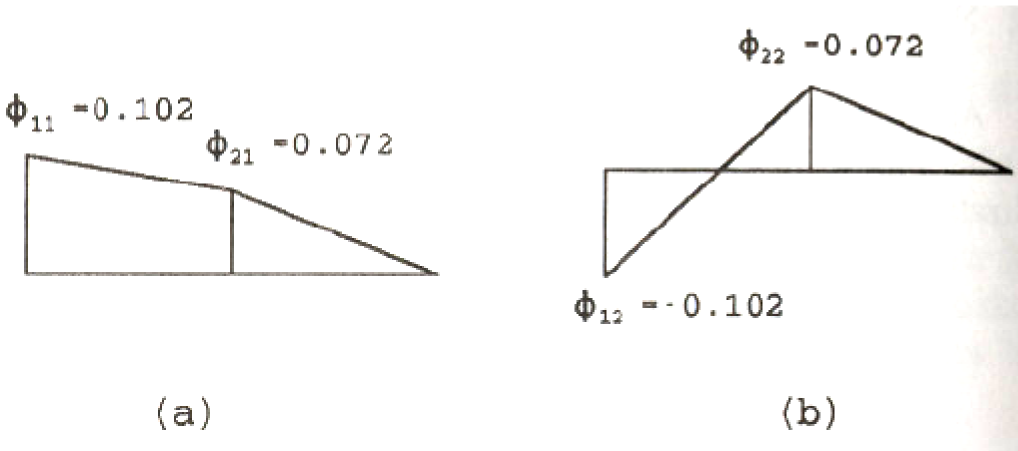


Figura 5.3 Diagrama de Normalización

La pasada ilustración, muestra la representación grafica de dos modos donde (a) fundamental y (b) segundo lugar. Para un sistema de N grados de libertad, todas las formas de los modos pueden ser expresadas en la forma de una matriz modal [Φ]

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2N} \\ . & . & . & . \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \cdots & \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

(t)

En nuestro caso la ecuación t se convierte

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.102 & -0.102 \\ 0.072 & 0.072 \end{bmatrix}$$

(u)

Las características más importantes de la forma del modo es que desagravien las condiciones de ortogonalidad. Para un sistema de N grados de libertad las condiciones de ortogonalidad son dadas por

$$\{\phi\}_i^T[M]\{\phi\}_j = 0 \quad for \quad i \neq j$$
$$\{\phi\}_i^T[M]\{\phi\}_j = 1 \quad for \quad i = j \qquad \textbf{(v)}$$

Y

$$\{\phi\}_i^T[K]\{\phi\}_j = 0 \quad for \quad i \neq j$$
$$\{\phi\}_i^T[K]\{\phi\}_j = \omega_i^2 \quad for \quad i = j \qquad \textbf{(w)}$$

Donde i,j = 1,2, …, N y la $\{\Phi\}_i^T$ son las filas de la transpuesta de la matriz $[\Phi]^T$.

Para verificar la condición de ortogonalidad para nuestro ejemplo, fijamos i = 1 y j = 1 en la ecuación w, para obtener

$$\lfloor 0.102 \quad 0.072 \rfloor \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix} = 1$$

Y para i = 1 y j = 2 para obtener

$$\lfloor 0.102 \quad 0.072 \rfloor \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix} = 0$$

Se refiere a la propiedad de ortogonalidad cuando discutimos la superposición modal de la historia a lo largo del tiempo, el análisis de la respuesta en frecuencia, respuesta del espectro, y análisis aleatorio de vibraciones.

5.6 Prueba modal experimental

Las dificultades que se presentan hoy con las vibraciones estructurales, presentan una limitación del diseño, por tal motivo sea convertido, el análisis de vibraciones en una rama de gran importancia para las estructuras. Para poder obtener una maquina con gran vida útil, es primordial que las cotas de vibración, presentadas durante la operación de dicha maquinas, se puedan anticipar y contempladas para poder evitar un problema de fatiga, el cual puede llegar a la destrucción del equipo.

Las metas trascendentales del análisis de vibración:

- Donde las fuerzas vibratorias son medidas durante la operación de la maquina
- Una prueba donde la estructura o componente se somete a una vibración con una excitación conocida para darle un servicio y evitar problemas futuros. Este tipo de prueba es generalmente hecho mediante unas cerradas condiciones de control las cuales brindan una aproximada. Este tipo de prueba incluyendo la información hasta el análisis es llamada prueba modal. Y son los procesos involucrados en probar componentes o estructuras con el objetivo de adquirir una descripción matemática de su comportamiento dinámico o de vibración.