

Capítulo 9. Definición de condiciones de Viga en Cantilever

La viga en cantilever esta sujeta a condiciones de frontera tomando en consideración un extremo fijo y por consiguiente su lado opuesto libre tal y como lo indica la siguiente figura:



Fig. 12 Diagrama de Viga en Cantilever

El lado fijo de este modelo no tiene desplazamiento y su ángulo de deflexión por tanto es cero, mientras que el extremo opuesto presenta una condición contraria, excepto que cuando nos ubicamos en el punto más alejado de la viga ósea cuando $x = L$ no hay presencia de momentos flexionantes ni esfuerzos cortantes.

Estas situaciones son conocidas como condiciones de frontera y pueden ser representadas de la siguiente forma:

$$\text{Extremo fijo (x=0): } X(0) = 0; \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (9.1)$$

$$\text{Extremo Libre (x=L): } \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \Big|_{x=L} = 0; \frac{\partial^3 X}{\partial x^3} \Big|_{x=L} = 0 \quad (9.2)$$

Aplicando estas condiciones de frontera, nos permite reducir la ecuación a la siguiente forma:

$$\cos \kappa_i L + \cosh \kappa_i L + 1 = 0 \quad (9.3)$$

En donde los valores para la ecuación $\varphi_i = \kappa_i L = \left\{ i - \frac{1}{2} \right\} \pi$ (9.4)

Y la función que describe el modo de forma, para el enésimo modo es:

$$X_i = \cos \kappa_i x - \cosh \kappa_i x - \frac{\cos \varphi + \cosh \varphi}{\sin \varphi + \sinh \varphi} (\sin \kappa_i x - \sinh \kappa_i x) \quad (9.5)$$

A continuación mostraremos los primeros cuatro modos de la viga:

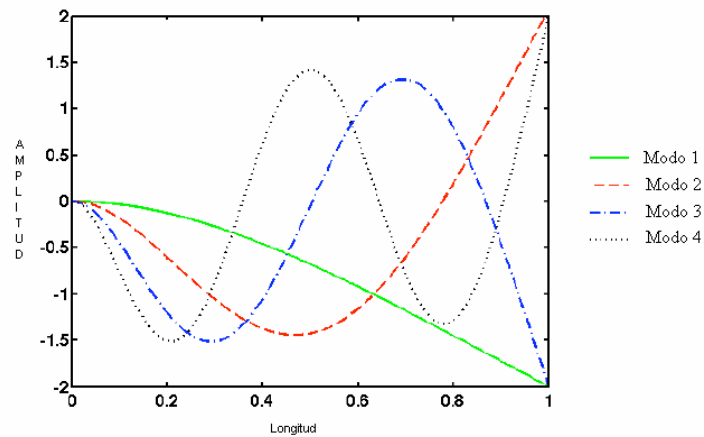


Fig. 13 Diagrama de Modos de Vibración

La grafica anterior se obtuvo utilizando la ecuación 9.2 y los valores de la amplitud de frecuencia obteniendo como resultado valores de frecuencias de resonancia que oscilan entre los 12 y 400 kHz.

9.1 Parámetros de Viga doblemente empotrada

La figura que representa esta condición es la siguiente:

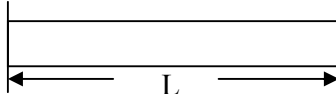


Fig. 13 Viga doblemente empotrada

Las condiciones de frontera para la geometría descrita bajo estas condiciones son:

$$X(0) = 0; \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (9.6)$$

$$X(L) = 0; \frac{\partial X}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0 \quad (9.7)$$

Aplicando estas condiciones de frontera en la ecuación anterior de la misma forma en que lo hicimos, tenemos que:

$$\cos \kappa_i L + \cosh \kappa_i L - 1 = 0 \quad (9.8)$$

Y en donde los valores $\varphi_i = \kappa_i L = \left\{ i + \frac{1}{2} \right\} \pi$ para el enésimo modo.

Teniendo de la misma forma la solución general aplicando las condiciones de frontera para la viga doblemente empotrada y referida en la siguiente ecuación:

$$X_i = \cos \kappa_i x - \cosh \kappa_i x - \frac{\cos \varphi - \cosh \varphi}{\sin \varphi - \sinh \varphi} (\sin \kappa_i x - \sinh \kappa_i x) \quad (9.9)$$

9.2 Modelo Discreto

Las características de vibración de una viga en cantilever, pueden ser simplificadas de un sistema continuo a un modelo discreto en donde una sola dirección de desplazamiento y un grado de libertad son considerados.

En un modelo discreto, el movimiento verídico de la viga es modelado como una oscilación armónica simple en donde la masa distribuida y la rigidez son reemplazadas con un sistema masa- resorte amortiguado. La constante de rigidez del resorte k_c utilizado en el modelo de oscilación armónica es definido como:

$$k_c = \frac{Ewt^3}{4L^3} \quad (9.10)$$

Y la rigidez k_b para la viga doblemente empotrada es:

$$k_b = \frac{16Ewt^3}{L^3} \quad (9.11)$$

A continuación mostraremos el modelo discreto del cual estamos hablando

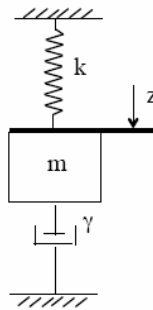


Fig. 15 Modelo Discreto.

La masa amortiguada usada para representa la masa distribuida de la viga en cantilever puede ser derivada usando las constantes de resorte y la frecuencia ω_o de la oscilación armónica:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad (9.12)$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k^4 EI}{\rho A}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\phi_1}{L}\right)^4 E \left(\frac{\omega t^3}{12}\right)}{\rho A}} = \sqrt{\frac{\phi_1^4 E \left(\frac{\omega t^3}{12}\right)}{\rho A}} = \sqrt{\frac{\phi_1^4}{3L\rho A} \left(\frac{E\omega^3}{4L^3}\right)} \approx \sqrt{\frac{k_c}{m_c}}$$

$$m_c \approx .243 \rho AL \quad (9.13)$$

La aproximación de la masa amortiguada para la viga doblemente empotrada se puede encontrar utilizando el mismo método por lo que tenemos:

$$m_b \approx 2.61 \rho AL \quad (9.14)$$

9.3 Oscilaciones Harmónicas Forzadas bajo un Amortiguamiento Viscoso

La ecuación de movimiento de una viga con vibración forzada con oscilamiento armónico, para un sistema de masa resorte bajo un amortiguamiento viscoso, puede ser expresada como:

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial z}{\partial t} + kz = F \quad (9.15)$$

En donde el segundo término de la ecuación es la fuerza de amortiguamiento y F es la fuerza que actúa sobre la masa, la deflexión z puede ser calculada como:

Y la fuerza F como:
$$z = Ae^{i(\omega t + \phi)} \quad (9.16)$$

$$F = F_o e^{i\omega t} \quad (9.17)$$

Al sustituir las ecuaciones, tenemos lo siguiente:

$$mA\omega^2 e^{i(\omega t + \phi)} + \gamma A e^{i(\omega t + \phi)} + kA e^{i(\omega t + \phi)} = F_o e^{i\omega t} \quad (9.18)$$

Y en donde A puede ser resuelta como:

$$A(\omega) = \left(\frac{F_o}{k}\right) \frac{1}{\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_o^2}\right) + i\left(\frac{\omega}{Q\omega_o}\right)\right]} \quad (9.19)$$

En donde el factor de calidad Q es definido como:

$$Q = \frac{m\omega_o}{\gamma} \quad (9.20)$$

La amplitud de vibración de las vibraciones forzadas puede ser calculada obteniendo la magnitud de la ecuación 9.19; y el ángulo de fase θ puede ser obtenido sacando la tangente inversa del coeficiente de la ecuación haciéndolo e la siguiente forma:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_o}}{\frac{1-\omega^2}{\omega_o^2}} \right) \quad (9.21)$$

El factor de calidad Q afecta de manera directa a los valores máximos de los picos de las gráficas de amplitudes y también a la forma. Mientras más pequeños sean los valores de Q, los picos se hacen mas chatos con amplitudes de frecuencia mas bajas y máximas amplitudes de frecuencia son encontradas ubicadas debajo de la resonancia natural de la viga sujeta a estudio.

A continuación mostraremos las graficas arrojadas por diferentes valores de Q y de ángulos de fase:

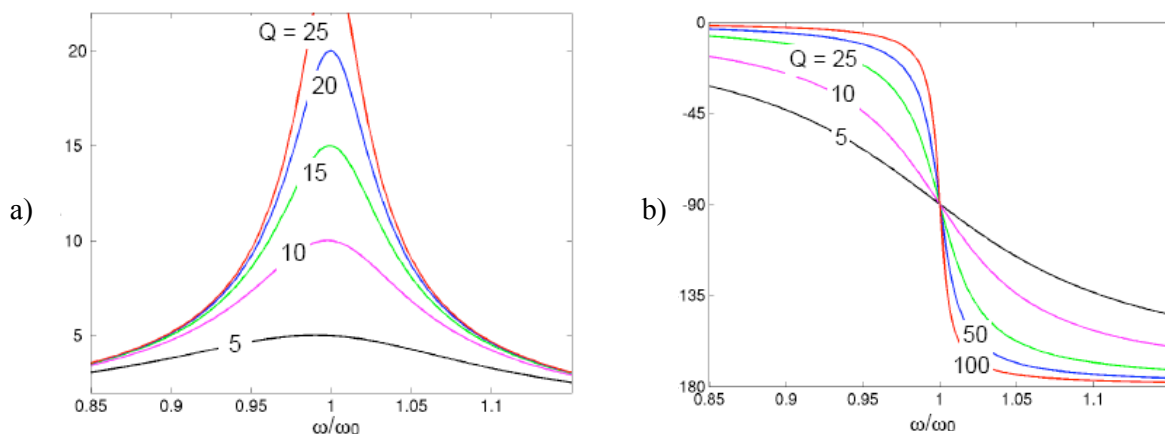


Figura 16 a) Amplitud de vibración con diferentes valores de Q
b) Angulo de Fase con diferentes valores de Q

9.4 Oscilaciones Forzadas no lineares

En un sistema en donde se presente una vibración lineal, se asume que la deflexión experimentada por un resorte es proporcional a la fuerza que actúa sobre el, tomando en cuenta un factor constante que en este caso es lo que conocemos como rigidez.

Por esto, un sistema es considerado no lineal cuando por ejemplo, al incrementar la fuerza, no necesariamente incrementa la respuesta del propio sistema.

Por ejemplo, a grandes amplitudes especialmente cuando ambos lados de la viga se encuentren empotrados, tomar en consideración un valor constante en la rigidez no es valido. Cuando una viga experimenta un incremento en su rigidez para grandes desplazamientos, se dice que esta bajo un efecto de endurecimiento de resorte o lo que conocemos en ingles como “Spring Hardening”, y de la misma forma cuando la rigidez del resorte disminuye, podemos decir que sufre un suavizamiento en el resorte conocido también como “Spring Softening” .

Este fenómeno se puede aproximar utilizando la ecuación de Duffing's:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_o^2 (x \pm \mu x^3) = F \cos \omega t \quad (9.22)$$

En donde la no linealidad es expresada por el término cúbico μx^3 . En este caso el método de aproximación de Ritz puede ser utilizado para encontrar una solución de estado estable para la ecuación de duffing's utilizando:

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (9.23)$$

Como solución particular. La solución de estado estable para la ecuación de Duffing's para una viga bajo el fenómeno de "Spring Hardening" o endurecimiento es la siguiente:

$$\frac{3\mu A^3}{4} = \left(\frac{\omega_o^2}{\omega^2} - 1 \right) A + \frac{F}{\omega_0^2} \quad (9.24)$$

Y la ecuación para la viga bajo el efecto de "Spring Softening" es:

$$\frac{3\mu A^3}{4} = \left(1 - \frac{\omega_o^2}{\omega^2} \right) A - \frac{F}{\omega_0^2} \quad (9.25)$$

Cuando el amortiguamiento es incluido en cualquiera de las dos situaciones nombradas anteriormente, la ecuación de la viga se convierte en:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{\partial x}{\partial t} + \omega_o^2 (x \pm \mu x^3) = F \cos \omega t \quad (9.26)$$