

## Capítulo 8. Vibración de la Viga

Existen muchos métodos para medir la respuesta dinámica de la vibración de una viga, tales como los siguientes:

- ✚ Ópticos.
- ✚ Detección Capacitiva.
- ✚ Detección Piezoeléctrica.

Las técnicas de detección óptica, son medios en los cuales se ven inmersos el rebote de la viga, además de estos las interferometría y la Vibrometría Doppler, ofrecen métodos en donde no es necesario el contacto para encontrar el desplazamiento llevado a cabo por la respuesta dinámica de la viga sujeta a estudio llevada bajo un efecto vibratorio. Los Métodos de detección óptica son considerados como no invasivos lo que nos permite tener un seguimiento permanente y confiable durante el periodo de excitación de la viga.

Por otro lado el sensamiento o detección capacitivos son usados comúnmente cuando se encuentran presentes electrodos por debajo de la viga y en la superficie, formando en su conjunto un capacitor de placa paralela en donde la capacitancia presente es inversamente proporcional a la separación entre ellos. Fig. 8.

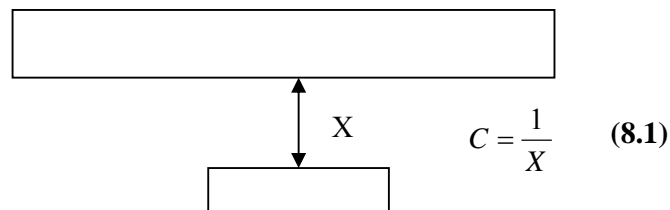


Fig.8 Diagrama de capacitores paralelos

Cuando la viga es cargada, la distancia de separación se somete a un cambio, haciendo con esto que la capacitancia se modifique de manera constante o proporcional.

Esta variación genera corriente a través de la viga presentándose de manera proporcional al voltaje aplicado la cual posteriormente será enviada a una célula de amplificadores convirtiéndola en una diferencia de potencial con el fin de extraer su frecuencia y mediante la ayuda de analizadores de espectros de frecuencia la señal se magnifica a una escala diferente.

Los métodos de detección piezoeléctrica son diferentes en comparación a los métodos ópticos y capacitivos, debido a que requieren una capa de material piezoeléctrico colocada en uno de los lados de la viga.

En este caso se genera una diferencia de potencial a través del material piezoeléctrico generando con estos esfuerzos debido a la deformación de la viga. Las deflexiones de la viga se pueden determinar monitoreando la propia diferencia de potencial a través de la capa piezoeléctrica.

Existen muchas formas para lograr la excitación de una viga, las más comunes están relacionadas con fuerzas electroestáticas y piezoeléctricas. En el proceso de interacción de fuerzas electroestáticas una diferencia de potencial es aplicada entre la viga de carácter conductivo y una superficie cercana.

Al aplicar la fuerza en una longitud determinada de la viga, logramos que esta se deflexione causando con esto la respuesta vibratoria que buscamos la cual depende directamente de la señal que estemos aplicando.

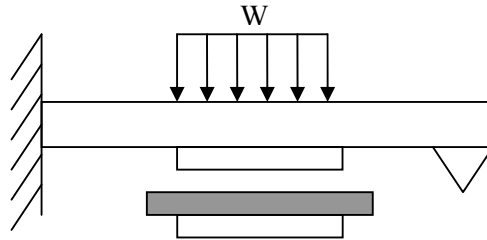


Fig. 9 Diagrama de Viga en Cantilever con carga distribuida.

En la interacción piezoeléctrica, la diferencia de potencial no es aplicada en la viga, en lugar de esto, esta se aplica a través del material que funge como capa piezoeléctrica causando la deformación de la misma por medio de elongaciones y contracciones y logrando que los esfuerzos residuales por tensión o compresión reflejen la viga en estudio.

De igual forma el comportamiento vibratorio de la viga dependerá de la señal aplicada a la muestra.

### **8.1 Modelo continuo Euler-Bernoulli**

La viga en cantilever estudiada en esta tesis es considerada como un sistema continuo debido a que presenta una masa y rigidez distribuidas, resultando con esto que el sistema tenga un número infinito de grados de libertad para movimiento así como de modos y frecuencias.

Al asumir que el material de la viga es homogéneo e isotrópico en conjunto con las vibraciones, la respuesta del sistema se puede determinar mediante una superposición de todas las contribuciones modales.

En la siguiente ilustración definiremos los ejes coordenados y la geometría del palpador con el que trabaja nuestra viga.

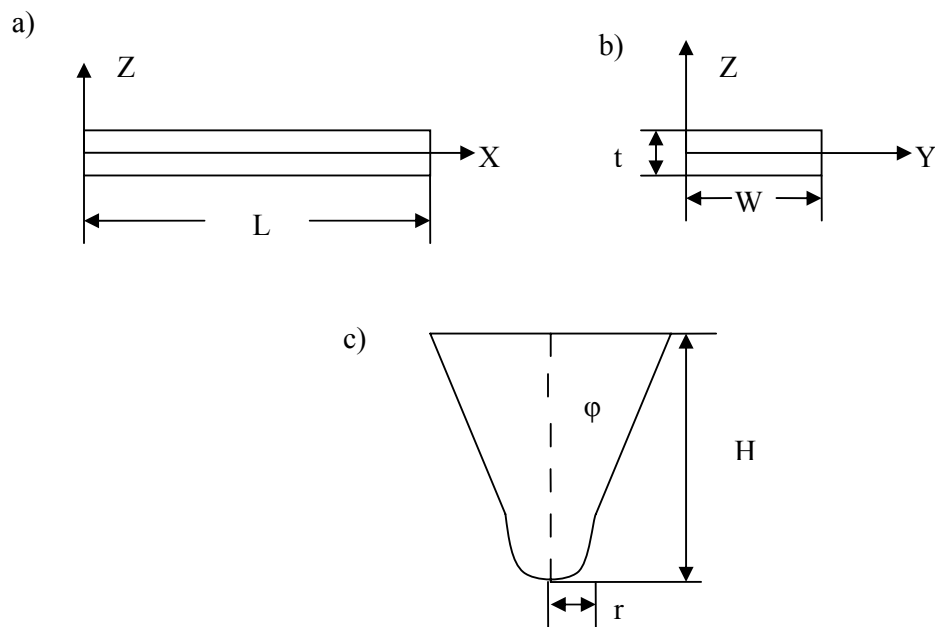


Fig. 10 Definición de Ejes coordenados y variables para características de viga y palpador.

El modelo de la viga de Euler-Bernoulli, se puede usar para describir desplazamientos transversales bajo las siguientes suposiciones:

- Las deflexiones son solamente atribuidos a momentos flexionantes a lo largo de la viga.

✚ El ancho y el espesor son pequeños en comparación a la longitud total de la muestra.

✚ Cualquier plano perpendicular al eje normal, permanece exactamente igual después de la deflexión, en donde el eje normal queda definido como el que pasa a través del centroide ubicado en el área de sección transversal de la viga.

Bajo estas condiciones, las deflexiones provenientes de las vibraciones libres  $z(x,t)$  a lo largo de la viga en posición inicial  $x$  con respecto al tiempo  $t$  pueden quedar expresadas de la siguiente forma.

$$EI \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = 0 \quad (8.2)$$

En donde  $E$  está definido como el Módulo de Young,  $I$  es el momento de inercia tomado con respecto al eje de rotación mostrado anteriormente,  $\rho$  es la densidad de masa y  $A$  es el área de la sección transversal.

Cuando la viga se encuentra bajo una respuesta dinámica en cualquiera de sus frecuencias naturales, la deflexión varía de manera armónica con el tiempo y la amplitud, a lo largo de la viga y puede ser descrita de la siguiente forma:

$$z = X_i \left( A e^{i(\omega t + \phi)} \right) \quad (8.3)$$

En donde A es una constante con frecuencia  $\omega$  y fase  $\varphi$  y  $X_i$  es el modo para la forma infinitesimal.

Por lo tanto haciendo la sustitución de la ecuación 8.3 a la ecuación 8.1 tenemos lo siguiente:

$$\frac{\partial^4 X_i}{\partial x^4} - \kappa_i^4 X_i = 0 \quad (8.4)$$

En donde 
$$\kappa_i^4 = \omega_i^2 \frac{\rho A}{EI} \quad (8.5)$$

Los modos  $X_i$  pueden ser obtenidos haciendo  $X=e^{nx}$  y substituyendo esta equivalencia en la ecuación 8.4 obteniendo:

$$e^{nx} (n^4 - \kappa^4) = 0 \quad (8.6)$$

En donde la solución radica en los siguientes valores de n:  $\{ k, -k, ik, -ik \}$  donde ya que la ecuación para los modos de frecuencia se describe como:

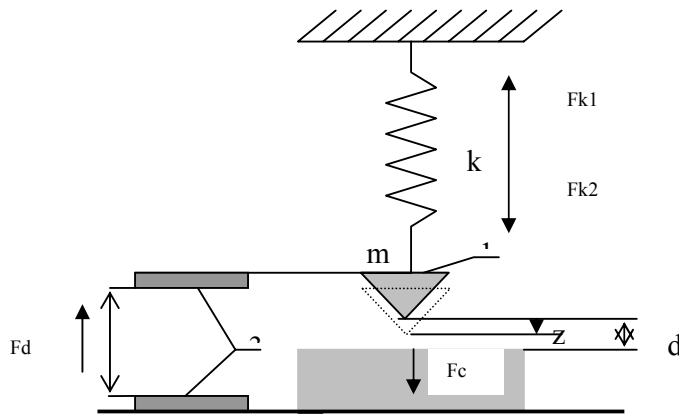
$$X_i = C_1 \text{sen} kix + C_2 \cos kix + C_3 \text{senh} kix + C_4 \cosh kix \quad (8.7)$$

En donde  $C_1, C_2, C_3, C_4$  son constantes que pueden ser obtenidas al aplicar las condiciones de frontera para la geometría descrita.

## 8.2 Modelo Dinámico de la Viga en Cantilever.

El análisis dinámico de los switches de frecuencia radial esta concentrado en dos tipos de vigas; una cantilever y la otra doblemente empotrada.

El modelo de la viga tomada para su análisis como una en cantilever, fue mostrada en la figura 5 y su modelo matemático en la figura 6, para la viga doblemente empotrada el modelo es similar solo que con otros parámetros de masa y k de resorte.



En la figura 11 podemos denotar las flechas que rigen el cuerpo rígido del sistema la Fuerza de amortiguamiento “Fd” y la Fuerza de repulsión por parte de la rigidez del resorte es “Fk1 y Fk2” , Fuerza Capilar “Fc”, el movimiento de la masa “m” esta regida por la ecuación siguiente:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_E + F_{DMT} + F_C \quad (8.8)$$

### 8.3 Modelo Dinámico de la Viga con introducción de las fuerzas.

Cuando la viga vibra, todas las fuerzas cambian en tiempo, para el desplazamiento  $x$  del palpador en la dirección de la superficie, la fuerza electrostática toma la siguiente magnitud:

$$F_e = 0.5 \frac{\epsilon \epsilon_0 A V^2}{(g + t_d / \epsilon r - x)^2} \quad (8.9)$$

La vibración del palpador esta definida por:

$$m\ddot{x} = F_E + F_c + F_{DMT} - c\dot{x} - kx \quad (8.10)$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_E + F_{DMT} + F_c \quad (8.11)$$

La masa efectiva de la viga en cantiliver es  $m = \frac{33}{140} m_{real} = 0.236 \rho t_b w_b L_b$ , para la viga doblemente empotrada  $m = 0.384 m_{real}$ .

Para un nuevo tiempo  $\tau = \omega_0 t$ , en donde,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , es la frecuencia natural de la viga, y  $y = x/d$  que es el desplazamiento normalizado de la viga, por lo que la ecuación 8.11 toma la siguiente forma.

$$\ddot{y} + 2\epsilon \dot{y} + y = (F_e + F_c + F_H)/(md\omega_0^2) \quad (8.12)$$

Esta ecuación no es lineal y el comportamiento de la viga en cantiliver puede ser definida por simulación de computadora.