

## Capítulo 10. Modelo Electro Estático y Mecánico de la Viga

Para poder realizar el estudio de la dinámica de la viga, necesitamos generar un modelo que nos ayude para poder ser capaces de fijar los criterios adecuados para poder determinar los parámetros adecuados que nos ayuden a concretar el análisis de la misma, es por eso que a continuación presentaremos el modelo mecánico generado por este dispositivo fungiendo como una viga en cantilever o doblemente empotrada.

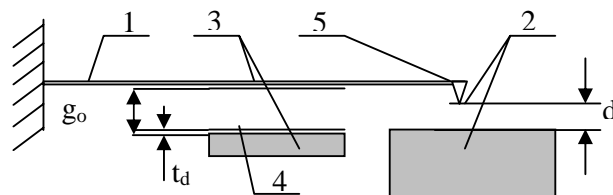


Figura 17. Modelo Mecánico de la Viga en Cantilever

En la figura 17 podemos observar en una vista lateral mediante el uso del modelo mecánico de la viga, los componentes pertenecientes al sistema que estudiaremos, como (1) Estamos denotando la Viga en Cantilever, (2) Observamos los Contactos Metálicos, (3) Electrodo, (4) Capa de Material Dieléctrico, (5) Palpador; la acotación marcada con la letra “d” denota el espacio entre el palpador y el contacto metálico, y como  $g_0$  estamos aclarando la distancia entre los dos electrodos. Cabe denotar que el espesor de la capa del **material dieléctrico** ocupado en nuestro análisis es de  $t_d=0.1\mu\text{m}$ .

A pesar de que existen diferentes tipos de fuerzas que puedan originar movimiento en el modelo, la que es más comúnmente usada es la electrostática, debido a que su nivel de consumo de energía tiende a ser cero, además de que el tamaño de los electrodos es pequeño, se utilizan capas delgadas de materia y relativamente tiempos de contacto muy cortos que tienden a estar en un rango de entre 50 – 200  $\mu\text{N}$ .

Al empezar a describir cosas tan pequeñas, lo que se nos puede venir a la cabeza como primer pensamientos, es lo que podemos generar con un dispositivo tan pequeño, que en general no tiene masa, no es sensible a la aceleración, no consume corriente directa, puede ser manufacturada a bajo costo y que tiene una frecuencia de corte que es de 30 a 50 veces mejor que la que se puede obtener con cualquier tecnología de **GaAs (Galio y Arsénico)**; la respuesta es mucho.

La dispositivos **GaAs** presenta algunas propiedades electrónicas que son superiores a las del silicio, tienen una alta saturación en la velocidad de electrones y una mayor movilidad de los mismos; permitiendo con esto que puedan funcionar con frecuencias que excedan los 250 GHz. Además de esto, los dispositivos GaAs, generan menos ruido que los dispositivos de silicio operando a frecuencias muy altas.

Realmente se pueden obtener muchas de dichos elementos, por citar un ejemplo el periodo de duración de un teléfono celular puede duplicarse con menos consumo de corriente, además de esto, en cuestión de seguridad se puede utilizar dichos elementos en los sensores conformantes en el sistema de activación de las bolsas de aire de los automóviles, siendo estos, capaces de sensar de algún modo la reducción de la velocidad del automóvil así como las masas dentro del vehículo.

Como podemos ver los campos de aplicación de estos elementos no solo se encuentran reducidos a un área en específico, sus aplicaciones son lo bastante amplias como para hacer como ya mencionamos estos productos algo muy redituables en diferentes sectores de comercio.

Cabe destacar que en el futuro conforme se vaya desarrollando este proyecto de tesis, volveremos a citar las figuras anteriormente mostradas como motivo del desarrollo de análisis de esta tesis.

### **10.1 Fuerza Electro-Estática**

Una aproximación analítica de la fuerza electro estática inducida puede ser obtenida al separar las componentes verticales de la fuerza desde los componentes geométricos que aproximan a nuestro elemento en lo que conocemos como viga. Por esto que se pueden desglosar en tres partes:

- ✚ Fuerza en la Viga
- ✚ Fuerza en cono.
- ✚ Fuerza en punta del palpador.

Dependiendo de la distancia de separación entre la viga y la superficie de contacto, la contribución de la fuerza de las diferentes formas geométricas dominará, por lo tanto tenemos que tomar en cuenta lo siguiente:

- ✚ La contribución de las fuerzas de la punta del palpador dominará para separaciones menores que el radio de la punta.
- ✚ Para separaciones mayores que la longitud de la punta la contribución de la fuerza aplicada sobre la viga dominará.
- ✚ Para distancias intermedias (distancias con separaciones mayores que el radio de la punta pero menores que la altura de la misma), provocaran que las fuerzas dominantes se presenten en el cono.

**10.2 Contribución de la fuerza proveniente de la punta del palpador, a la fuerza total.**

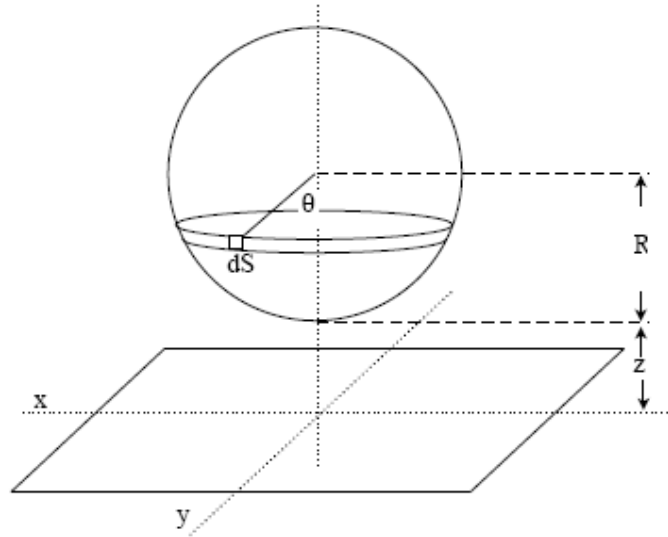


Fig. 18 Sistema del plano coordenado de la punta del palpador modelado como una esfera.

En este caso la fuerza electro estática, puede ser aproximada utilizando la interacción del plano coordenado de una esfera, de un modelo de fuerza capacitiva.

La capacitancia entre el plano y la esfera mostrada en la figura 18, puede ser descrita como:

$$C = 2\pi\epsilon_0 R \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\theta \left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta \quad (10.1)$$

Integral que podemos descomponer en intervalos:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\theta \left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta < \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\theta \left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\theta \left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta \quad (10.2)$$

El primero y último término pueden ser simplificados, aproximándolos a integrales con soluciones conocidas que mantengan lo que conocemos como no equivalencia, para esto simplificamos el primer término a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\theta \left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta > \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta}{\left( \frac{z}{R} + \frac{\theta^2}{2} \right)} d\theta = \frac{4}{\pi^2} \ln \left( 1 + \frac{\pi R}{8z} \right) > \frac{4}{\pi^2} \ln \left( 1 + \frac{R}{z} \right) \quad (10.3)$$

Y el segundo término se convierte en:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\theta \left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta < \ln \left( 1 + \frac{R}{z} \right) \quad (10.4)$$

Con estas simplificaciones podemos reescribir la ecuación 10.2, quedando de la siguiente forma

$$\frac{4}{\pi^2} \ln \left( 1 + \frac{R}{z} \right) < \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta < 2 \ln \left( 1 + \frac{R}{z} \right) \quad (10.5)$$

Y la solución a la integral central puede ser aproximada como:

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{\left( \frac{z}{R} + 1 - \cos \theta \right)} d\theta = k \ln \left( 1 + \frac{R}{z} \right) \quad (10.6)$$

En donde  $k = 1$  y es determinado mediante la comparación de la ecuación **10.8** y **10.1**, para una expresión exacta obtenida gracias a la utilización de él método de imágenes cargadas utilizando como medio, la siguiente relación:

$$F = \frac{1}{z} \frac{\partial C}{\partial z} V^2 \quad (10.7)$$

Para describir la fuerza capacitiva entre dos superficies, las ecuaciones 10.1 y 10.6 nos ayudan para que podamos expresar la fuerza ejercida entre la esfera y el plano, denominada en esta tesis como la fuerza del palpador, pero ahora de forma exacta.

$$F_{Punta} = -\pi^2 \varepsilon_0 \left[ \frac{R^2}{z(z+R)} \right] V^2 \quad (10.8)$$

### 10.3 Contribución de la fuerza proveniente del cono, a la fuerza total.

La contribución de fuerza de la sección cónica del palpador es obtenida considerando la interacción del campo eléctrico E ocurrida en cada punto de las paredes del cono y la superficie de contacto.

Utilizando la expresión  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$  para determinar la densidad de carga  $\sigma$  en cada punto,

la fuerza del cono se obtiene al integrar la contribución de las fuerza en cada punto, por lo tenemos lo siguiente:

$$F_z = \int_s \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS \hat{n} \cdot \hat{U}_z \quad (10.9)$$

En donde n y  $U_z$  son vectores normales y unitarios sobre la componente z, por lo que la contribución de la fuerza del cono viene dada por:

$$F_{Cono} = \pi \varepsilon_0 V^2 k^2 \left( -\ln \frac{z+R}{H} - 1 + \frac{R}{z+R} \frac{\text{sen} \theta_0}{z+R} \right) \quad (10.10)$$

$$k = \frac{1}{\left[ \ln \text{tg} \left( \frac{\theta_0}{2} \right) \right]} \quad (10.11)$$

En donde  $\theta_0$  es la mitad del ángulo del cono del palpador.

#### 10.4 Contribución de la fuerza de la viga a la fuerza total.

La contribución de la fuerza de la porción de la viga sobre la superficie de contacto dominará para distancia de separaciones cercanas o próximas a la altura del palpador, o si la viga no contiene el mismo, en este caso la contribución es expresada utilizando la fuerza capacitiva y las expresiones de placas paralelas capacitivas.

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{z} \quad (10.12)$$

De modo que la fuerza ejercida por la viga como contribución a la fuerza total, será:

$$F_{viga} = \frac{\epsilon_0 V^2}{z} \int_{x_1}^{x_2} \frac{w dx}{z(x)^2} \quad (10.13)$$

#### 10.5 Factor de Calidad y Mecanismos de pérdida de energía

El funcionamiento de la viga en estudio y otros sensores de resonancia, pueden mejorar su rendimiento, minimizando ruidos externos inducidos al sistema tales como:

- ✚ Ruido eléctrico.
- ✚ Vibraciones externas.
- ✚ Ruido acústico.

El limite superior para el control de ruido es obtenido con uso de ecuaciones termodinámicas, que rigen la transferencia de energía almacenada en la viga hacia su ambiente de trabajo en forma de calor, en donde el factor de calidad Q es medido por la forma en que la disipación de energía se lleva a cabo en el sistema.

El factor de calidad  $Q$  de una viga es definido por la razón de cambio de la energía vibratoria almacenada  $W_0$  sobre la energía total perdida en cada ciclo de vibración  $\Delta W$ , por lo que tenemos que:

$$Q = \frac{2\pi W_0}{\Delta W} \quad (10.14)$$

La energía total pérdida es obtenida sumando todas las contribuciones de perdidas de los diferentes mecanismos tales como:

$$\frac{1}{Q} = \sum_i \frac{1}{Q_i} = \frac{1}{Q_{sujeciones}} + \frac{1}{Q_{termo-elastico}} + \frac{1}{Q_{superficie}} + \dots \quad (10.15)$$

Las pérdidas en clampeos o soportes de sujeción ocurren cuando las vibraciones ejercidas por el sistema son de gran magnitud, si el soporte en la viga en estudio es fijado de manera rígido, deflexiones con amplitudes muy grandes resultaran en una fuerza axial de tensión sobre la viga y por lo tanto sus frecuencia de resonancia aumentarán.

De lo contrario, si el soporte no es lo suficientemente rígido, la viga experimentara deformaciones como resultado de grandes deflexiones y dando como consecuencia también esfuerzos de compresión sobre la viga.

Dichos esfuerzos causaran que las frecuencias de la viga decrezcan, por lo que la ecuación que describe las perdidas por clampeos es la siguiente:

$$Q_{Clamp} = 0.34 \left( \frac{L}{t} \right)^3 \quad (10.16)$$

Las pérdidas termo elásticas son resultado de la energía de vibraciones mecánicas convertidas a energía de calor. A medida que la viga vibra, esfuerzos de tensión y compresión inducidos a lo largo de la viga, resultan en gradientes de temperatura, causando pérdidas de energía a través de la conducción de calor a lo largo de la viga en estudio.



Sumado a las propiedades de material, esta pérdida de energía es también dependiente de la temperatura y la frecuencia de resonancia de la viga, de modo que:

$$Q_{\text{termoelastico}} = \frac{1}{2\Gamma(T)\Omega(f_0)} \quad (10.17)$$

En donde el término dependiente de la temperatura  $\Gamma(T)$  es:

$$\Gamma(T) = \frac{\alpha^2 T E}{4\rho C_p} \quad (10.18)$$

Con coeficiente de expansión térmica  $\alpha$ , temperatura  $T$ , modulo de Young  $E$ , densidad de masa  $\rho$ , calor específico  $C_p$ .

El término dependiente de la frecuencia  $\Omega(f_0)$  es:

$$\Omega(f_0) = \frac{\frac{2f_0}{F_0}}{1 + \left(\frac{f_0}{F_0}\right)^2} \quad (10.19)$$

En donde  $F_0$  esta definido cómo la frecuencia característica por lo que:

$$F_0 = \frac{\pi\kappa}{2\rho C_p t^2} \quad (10.20)$$

La ecuación anterior señala a  $\kappa$  como la conductividad térmica de la viga. La frecuencia característica  $F_0$  indica la frecuencia en que la disipación termo elástica es mayor.

Las pérdidas en superficie resultan por los defectos o imperfecciones en la misma, estas absorben las disipaciones y actúan como una capa muy delgada para incrementar la disipación de energía.

Este defecto puede convertirse muy significativo a medida en que la relación entre el área medida que el área de la superficie y el volumen incrementan. Una capa de espesor  $\delta$  tendrá un modulo elástico complejo  $E_s$  definido como:

$$E_s = E_{s1} + iE_{s2} \quad (10.21)$$

En donde  $E_{s1}$  es la porción real del modulo elástico y  $E_{s2}$  es el disipativo contenido en la porción compleja, de esta manera la contribución del factor de calidad de las pérdidas de superficie pueden ser expresadas como:

$$Q_{\text{sup}} = \frac{wt}{2\delta(3w+t)} \frac{E}{E_{s2}} \quad (10.22)$$

El factor de calidad de la viga en cantilever refleja las contribuciones de todas las fuentes de pérdida de energía. De los tres tipos de pérdidas energéticas presentados (superficie, clampeos, termo elástica), resulta muy complicado aproximar la contribución de las pérdidas en la superficie debido a la poca explicación de parámetro  $E_s$ .

De cualquier forma los valores para las pérdidas en clampeos y efectos termo elásticos, pueden ser obtenidos utilizando los siguientes parámetros:

$$\alpha = 2.6 * 10^{-6} K^{-1}$$

$$k = 1.5 * 10^2 Wm^{-1} K^{-1}$$

$$k = 0.7 * 10^3 Jkg^{-1} K^{-1}$$

Existen dos formas principales para determinar experimentalmente el factor de calidad de la viga en cantilever; el método de aro libre, y el de la frecuencia de resonancia; la elección del método, es determinado por el contexto en el cual se desean recibir los datos.

### 10.6 Método de aro libre.

Uno de los métodos para medir Q de una viga en cantilever involucra la excitación de la viga hasta llevarla a la resonancia para que posteriormente paremos esta, después de que se haya alcanzado la amplitud z de estado estable.

La razón en que la amplitud de vibración decrece sigue una función exponencial descrita por:

$$z(t) = Ze^{-\zeta\omega_0 t} \quad (10.23)$$

En donde  $\zeta$  es el factor de amortiguamiento:

$$\zeta = \frac{\gamma}{2m\omega_0} \quad (10.24)$$

El factor Q puede ser determinado tomando la constante de tiempo de la respuesta de decremento  $\tau_0 = 1/\zeta\omega_0$  de modo que:

$$Q = \pi\tau_0 f_0 \quad (10.25)$$

En donde  $f_0$  es la frecuencia de resonancia de la viga en cantilever.

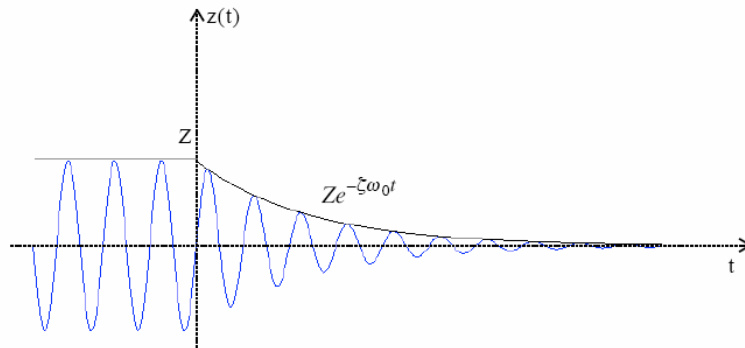


Fig. 19 : Respuesta vibratoria de la viga, después de haberla detenido en  $t=0$