

CAPITULO 4. ANALISIS DE LAS VIBRACIONES DE LAS PIEZAS Y ENSAMBLE CON EL METODO DE ELEMENTO FINITO.

4.1. Preparación de las piezas para el análisis en ALGOR.

La preparación de los datos es la parte más importante en el análisis.

Pasos del análisis del elemento finito¹:

1. *Modelación de una estructura:* la estructura está dividida en elementos infinitos. Procesadores, tales como el *SUPERDRAW* de Algor, ayudan al usuario a crear la malla del elemento finito. Este paso es uno de los más cruciales en determinar la solución aproximada de un problema.
2. *Definir las propiedades del elemento:* en este paso, el usuario debe definir las propiedades del elemento y seleccionar los tipos de elementos finitos, que son los mas apropiados para modelar el sistema físico.
3. *Ensamblar las matrices de dureza:* las matrices de dureza de un elemento consisten de coeficientes que pueden ser derivados del equilibrio, carga de peso, o un método de energía. La matriz del elemento de dureza relaciona los desplazamientos nodales con una carga aplicada en los nodos. Ensamblando las matrices del elemento de dureza implica aplicaciones de equilibrio de toda la estructura.
4. *Definir condiciones de frontera:* se deben definir las condiciones de frontera para que pueda ser preformado el análisis.
5. *Aplicar las cargas:* externamente se aplican cargas concentradas o fuerzas uniformes, momentos, y movimientos subterráneos (si es el caso).
6. *Solucionar el sistema de ecuaciones algebraicas lineares.*
7. *Calcular cualquier tipo de análisis.*

4.1.1. Modelación de modelos.

¹“Finite element modeling in engineering practice”, *SPYRAKOS, CONSTANTINE*

Estos son los pasos para la preparación del análisis; como el análisis consta de no solo una pieza, la modelación constituye de la construcción del modelo con todas las partes integradas asegurando que estén unidas una con otra, la siguiente ilustración muestra el ambiente del *SUPERDRAW*, con todas las piezas totales integradas, ya como un ensamble.

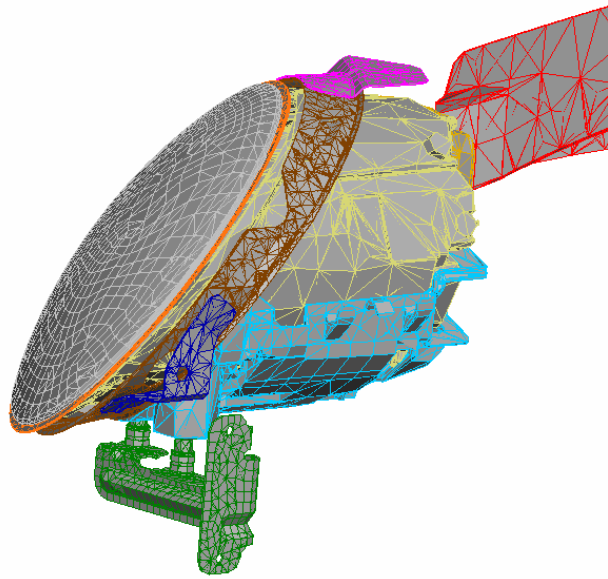


Figura 4.1.1.1: figuras malladas ensambladas en *SUPERDRAW* de *ALGOR*.

La modelación del sistema empieza desde la obtención del modelo *iges.*, que es una importación del dibujo desde otro formato y pasándolo a *.iges.*, para poder trabajarlo en cualquier software. En el *SUPERDRAW de ALGOR* hay una opción en la que se pueden importar cualquier modelo tipo *.iges.*, como mostrado en la figura 4.1.1.2.

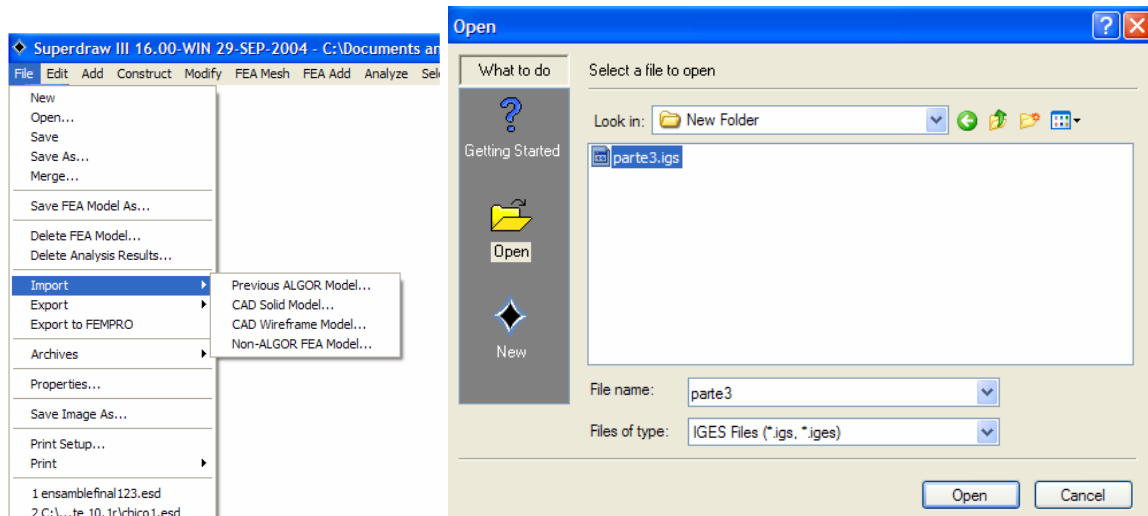


Figura 4.1.1.2: importación del modelo .iges., al SUPERDRAW de ALGOR.

Cuando se importa el modelo al software, la pieza aún no está mallada, por lo cual no se le puede hacer ningún tipo de análisis, por razones obvias se tiene que mallar. El software de *ELEMENTO FINITO* tiene un generador de mallas automático, con el que se hace una malla de acuerdo al tamaño requerido para el análisis. En la figura 4.1.1.3a., se muestra como se generan las mallas desde el *ALGOR FEMPRO*.

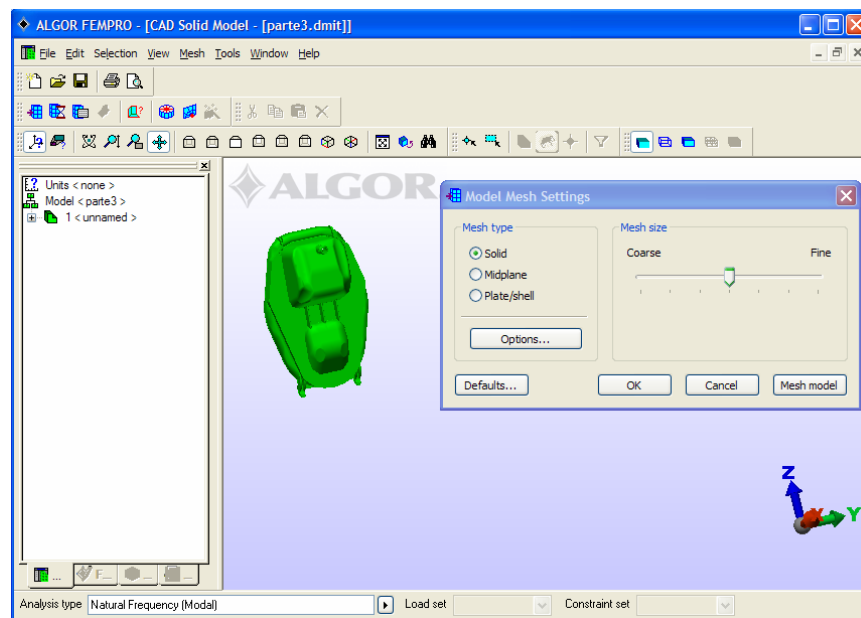


Figura 4.1.1.3a: tipo de malla para realizarse.

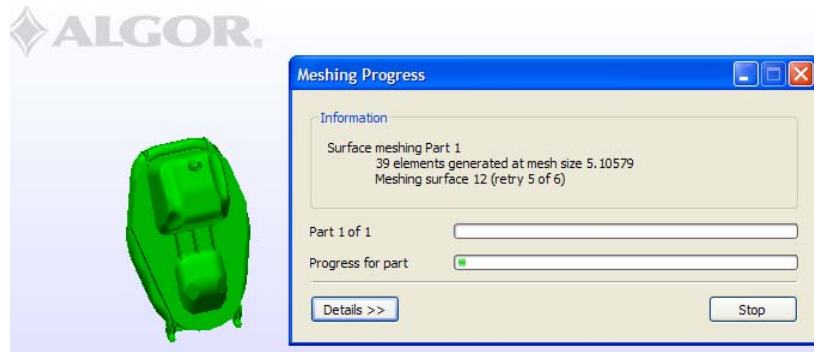


Figura4.1.1.3b: generación de mallas desde el algor FEMPRO

Pero no todas las mallas son perfectas, estas generaciones de mallas son buenas, únicamente en las piezas hechas en el mismo software *ALGOR*; la transferencia a *.iges.*, crea muchos errores en las piezas, y no siempre el software lo puede corregir. La figura 4.1.1.4., enseña claramente los errores de transferencia *.iges.* Las piezas comunes como figuras cilíndricas, cubos, pirámides, etc., son muy fáciles de crearles la malla, mientras que los sólidos tienen casi todas las figuras, son sólidos complejos.

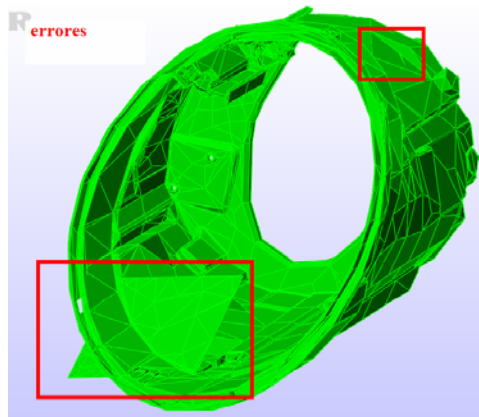


Figura 4.1.1.4: típicos errores en la malla, de la transferencia a *.iges.*

Estos errores de las piezas, no dejan hacer cualquier tipo de análisis, ya que son piezas incompletas o erróneas; cuando se tiene una malla así, se debe hacer una depuración de líneas, y la creación de superficies no encimadas “manualmente”, este proceso tarda demasiado tiempo, ya que se deben de corroborar los nodos o vértices de cada pieza para verificar que están perfectamente embonadas, una pieza normal tiene más de 3500 nodos en el contorno de la pieza, y ésta se incrementa si es una pieza complicada en su geometría, también depende del tamaño del grano de la malla.

La manipulación de superficies se hace en el *SUPERDRAW* de *ALGOR*, hay opciones en esta herramienta que facilitan la edición de las líneas, formando caras y superficies. En la figura 4.1.1.5 se muestra como se editan las líneas en el *SUPERDRAW* de *ALGOR*.

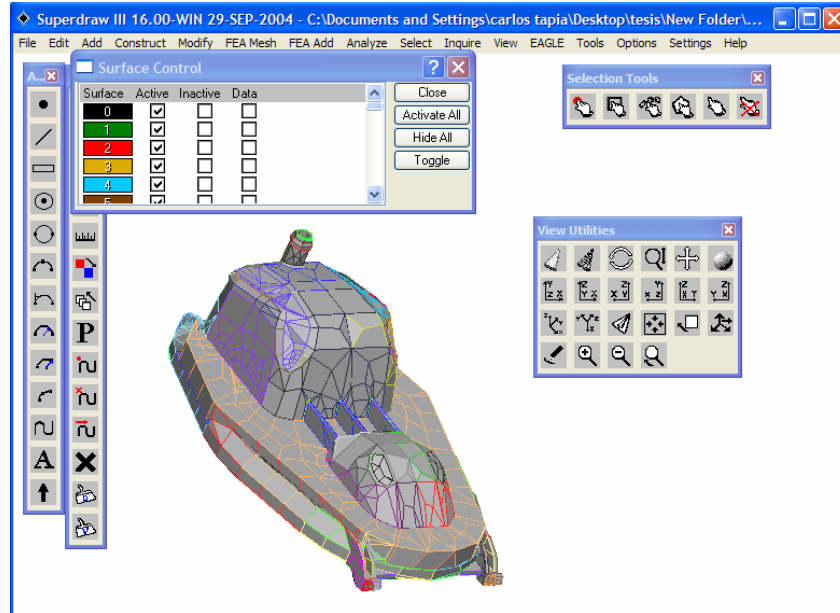


Figura 4.1.1.5: herramientas para la edición de las líneas y superficies en el *SUPERDRAW* de *ALGOR*.

Ya que una pieza está perfectamente unida y formada por malla externa, la pieza se debe de volver “sólida”, generando una malla interna formada por tetraedros o hexaedros, según sea el caso (mencionado en la generación de mallas de *algor* previamente). Cuando la pieza es formada como “sólida”, se vuelve una pieza idealizada como una pieza de 8 nodos, porque es más fácil considerar las deformaciones en ella. La figura 4.1.6 muestra una pieza sólida con malla interna: la malla interna es la es negra mientras que la malla externa es azul.

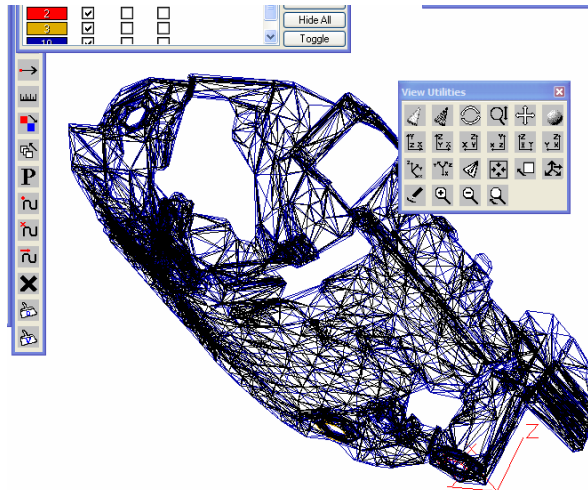


Figura4.1.1.6: malla interna de la pieza4.

Este proceso es el llamado modelación de una pieza. Al igual que esta pieza se tuvo que modelar 15 piezas. Para formar un ensamble es necesario tener todas las piezas modeladas; el ensamble se forma a través de una opción llamada *MERGE*, en la siguiente figura se indica como se anexan las piezas.

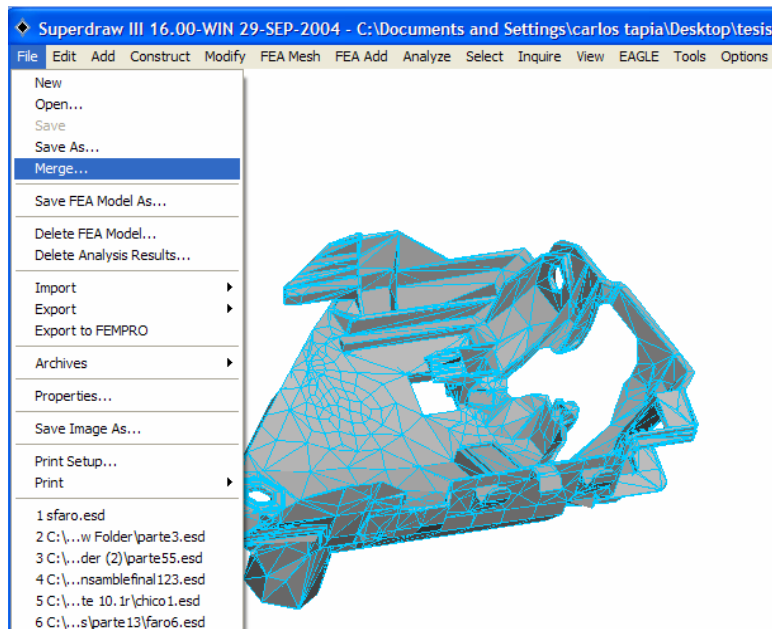


Figura 4.1.1.7: comando MERGE del SUPERDRAW de ALGOR.

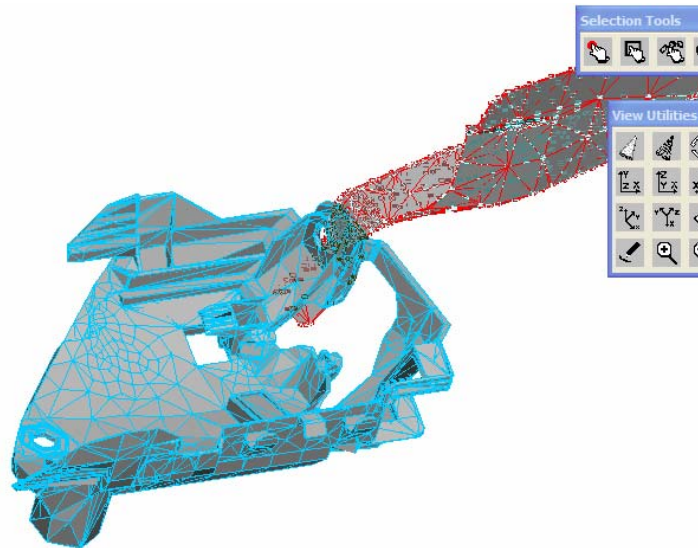


Figura 4.1.1.8a: comando MERGE ejecutado.

Después de ejecutar el comando *MERGE* quedan 2 piezas separadas (no fijadas entre ellas), la fijación se hace manualmente en el *ALGOR FEMPRO*, para poder hacer esto posible, se deben identificar las superficies, llamándolas en distinto *LAYER* para poder emparejarlas y poder hacer la unión correspondiente. La figura 4.1.1.8a., se nota claramente como esto se puede hacer posible para conformar una *UNION* o *FIJACION*.

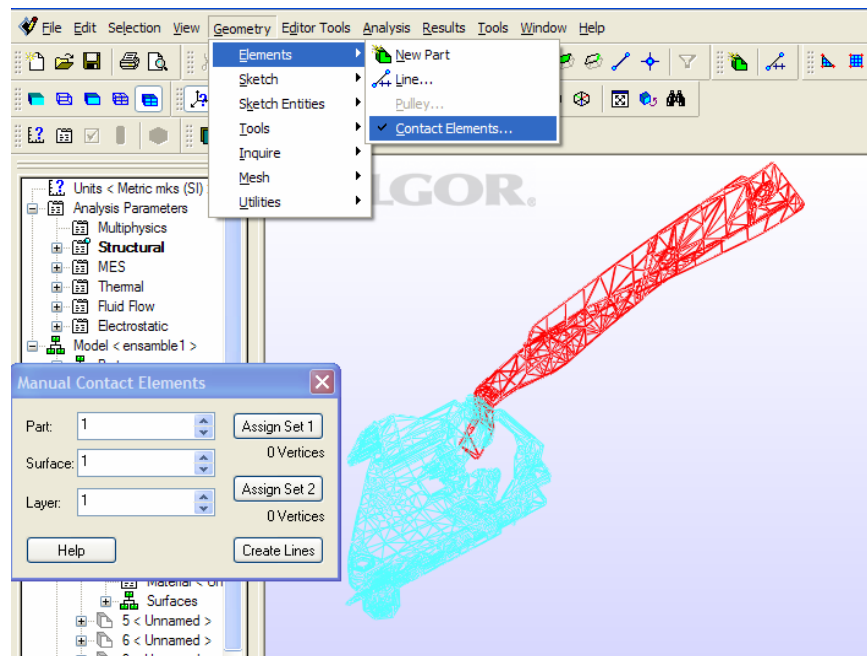


Figura 4.1.1.8b: comando para formar uniones entre las piezas.

Finalmente cuando todas las figuras están unidas en un ensamble, termina la etapa de modelación del sistema. La figura 4.1.1.1 ilustra como queda el ensamble en último plano.

4.1.2. Definición de las propiedades del elemento.

En este paso, el usuario debe definir las propiedades del elemento y seleccionar los tipos de elementos finitos, que son los más apropiados para analizar el modelo, esto quiere decir, que se debe de seleccionar el tipo de elemento que es, las propiedades necesarias que requiere el modelo; se debe de escoger qué tipo de propiedades de sólido posee, si es plato, un cubo, una viga, etc. Se ilustra en la imagen 4.1.2.1.

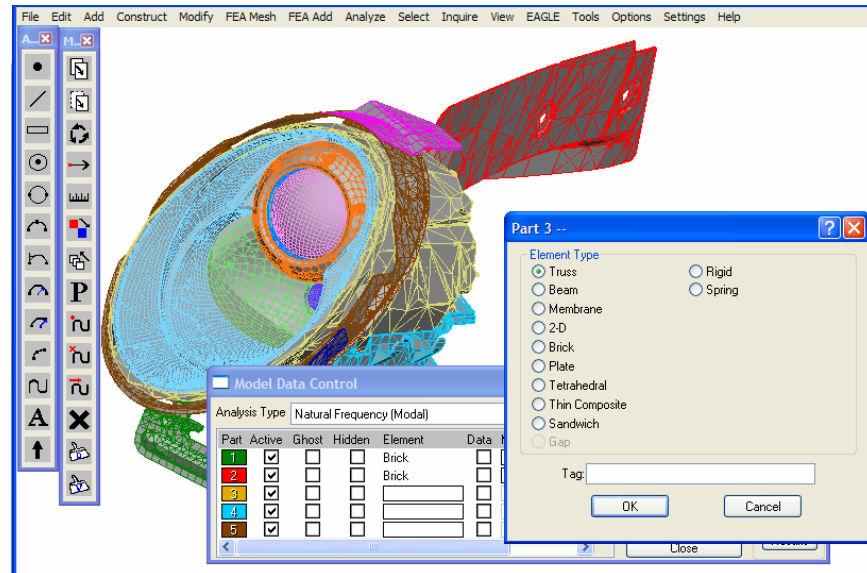


Figura 4.1.2.1: selección del tipo de elemento.

4.1.3. Ensamblar las matrices de dureza.

Las matrices de dureza de un elemento consisten de coeficientes que pueden ser derivados del equilibrio, carga de peso, o un método de energía. Estas se pueden aplicar poniendo el tipo de material adecuado, porque el software *ALGOR* contiene una lista de materiales con toda y sus propiedades mecánicas, y con esto el software puede calcular las ecuaciones de peso, gracias a los datos dados (figura 4.1.3).

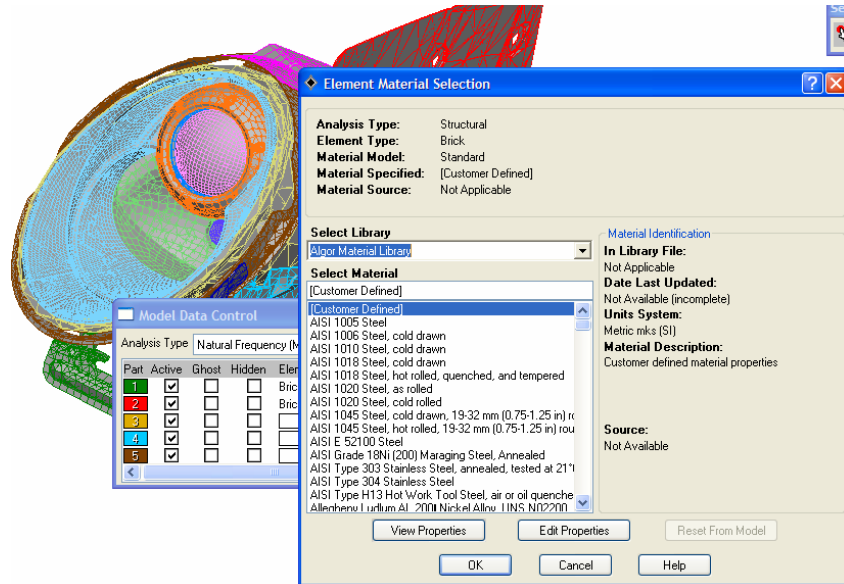


Figura 4.1.3: selección de materiales.

4.1.4. Definición de las condiciones de frontera.

Para que pueda ser preformado el análisis, se deben definir las condiciones de frontera. Estos son las condiciones que se deben de poner para justificar si las piezas están en el espacio, fijadas a tierra o si están empotradas, en este caso la justificación se realizó considerando unas partes fijas que no tienen movimiento (ni de rotación, ni desplazamientos en los tres ejes).

El “*languero*” como va soldado con la carrocería, en toda su sección, se idealizó como si fuera una pieza fija, así como también “*la oreja de perro*”, que es la pieza de soporte y que va fija, esta pieza tiene su fijación por medio de tornillos con la sección del chasis, los tornillos son idealizados por una fijación imaginaria impuesta por el programa en los barrenos que tiene la pieza (figura 4.1.4.1).

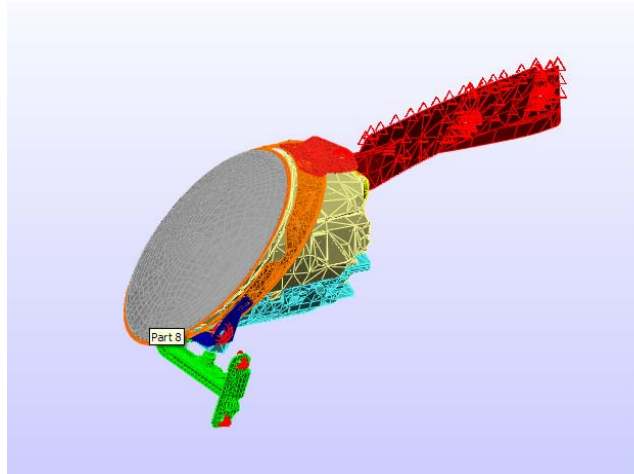


Figura 4.1.4.1: las fijaciones impuestas.

Como se muestra en la figura anterior, la pieza de soporte que es *roja*, va fijada, al igual que la pieza *verde*, que es la “*oreja de perro*”. Las otras tres piezas, que son tensores, también están fijadas en el espacio, estos como van unidos con la fascia, suponiendo que las piezas están fijas, es decir, también necesitan no tener rotación ni translación en ninguno de los tres ejes (figura 4.1.4.2).



Figura 4.1.4.2: fijaciones en tensores.

Estas tres piezas va fijadas por medio de tornillos, con la idealización del software se fijan a través de los barrenos al espacio.

4.1.5. Aplicación de las cargas.

Externamente se aplican cargas concentradas o fuerzas uniformes, momentos, y movimientos subterráneos (si es el caso). En el caso del análisis modal, no se requieren cargas, ya que este tipo de análisis no lo requiere, pero en el caso del análisis de la respuesta de la frecuencia, si se necesita una carga externa que haga la simulación de un “excitador” (*shaker* en inglés), en la prueba modal, o simulación de la vibración del campo.

4.1.6. Análisis requerido según el caso.

El próximo paso es el de la solución de las ecuaciones algebraicas lineales, esto lo lleva a cabo el programa; el mismo programa como anteriormente se describió hace los cálculos requeridos. Esto depende del tipo de análisis que se vaya a efectuar, el análisis más simple es el análisis modal; siempre es necesario efectuar el análisis modal de frecuencias naturales para resolver cualquier tipo de análisis posterior, ya que por este medio se calculan ecuaciones fundamentales para análisis más complejos (figura 4.1.13).

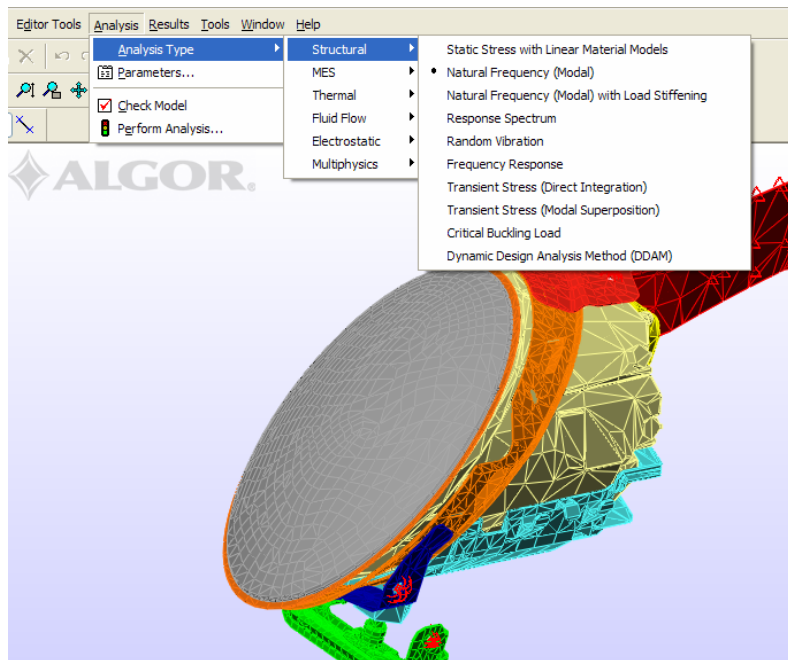


Figura 4.1.6: selección del tipo de análisis.

Hay tipos de análisis que requieren una malla más fina, como es el caso del análisis de esfuerzos y deformaciones, mientras que el análisis modal requiere una malla no tan pequeña. El *software* ALGOR tiene un gran número de cálculos por tipo de análisis, no todos los softwares de elemento finito tienen esta capacidad.

4.2. Análisis modal.

4.2.1. Introducción análisis modal

En las últimas décadas el incremento de tecnología se ha desarrollado muchísimo también en lo que trata en sí en los métodos ingenieriles, el mayor adelanto se ha dado en lo que es el análisis modal con la búsqueda de determinar, improvisar y optimizar las características dinámicas de las estructuras. Ésta no sólo se utiliza como antes en el ambiente mecánico y aeronáutico, sino también tiene grandes aplicaciones en distintos campos como en las áreas civiles, transportación, plantas nucleares etc.

Para comprender esta tecnología se tiene que apreciar la base de conocimiento que ésta nos puede brindar para poder utilizarlo de una forma adecuada.

Contemporáneamente la industria civil como antes mencionábamos al igual que las otras industrias desean lo mismo en lo que se refiere en piezas livianas, más fuertes y más flexibles, como por ejemplo la industria manufacturera de coches quiere tener piezas con menos peso y que sean mas duraderas, en el caso de la industria espacial se necesitan piezas que aguanten los trabajos extremos o simplemente para garantizar las propiedades de inerciales en el espacio. La meta más común de todas las industrias es mantener las estructuras o ensambles libres de vibraciones indeseables.

Otro hecho relevante es crear una seguridad y rentabilidad en las estructuras lo cual ha establecido un nuevo reto para los científicos para satisfacer el entendimiento de las estructuras ingenieriles modernas. Las vibraciones de una estructura son de vital importancia, el reto recae directamente en el conocimiento de las propiedades dinámicas usando un método analítico, numérico o experimental o las combinaciones de estos.

Como el significado del comportamiento dinámico de las estructuras ingenieriles es mejor apreciado hoy en día, se ha considerado muchas formas de resolver este tipos de problemas, se han creado distintas formas, ahora se usa la modelación por computadora que antes no se utilizaba. El *software* de elemento finito es un ejemplo de modelación por computadora y es considerado una herramienta de tal importancia por que tiene un análisis numérico que resalta la valor de la dinámico, este análisis numérico requiere una rigurosa guía para acercar el significado a la relación de la estructura dinámica, el cual el

software la tiene. Una parte del análisis dinámico del elemento finito es el llamado análisis modal.

La modelación por computadora sola no puede determinar completamente el comportamiento dinámico de la estructura por que propiedades como amortiguamiento y no linealidad no conforman con el tratamiento de modelación tradicional. Hay también condiciones de frontera que no son tan ciertas por que hay veces que son criterio o idealización que uno toma para ayudar al modelado. Avances substanciales también han sufrido las tecnologías experimentales las cuales han complementado las propiedades estructurales. Hoy en día la experimentación y el modelado por computadora van de la mano, por que la experimentación es argumentado por la teoría del análisis modal lo cual nos provee una nueva importancia en el.²

4.2.2. Definición de análisis modal.

El Análisis Modal es el proceso para determinar las características dinámicas del sistema en forma de frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y forma de los modos, y así usándolos para formular un modelo matemático para su comportamiento dinámico. El modelo matemático obtenido es el llamado modelo modal de un sistema y su información es referida como su información modal.

La información dinámica de la estructura es físicamente desmantelada en su frecuencia y su posición. Esto es claramente desarrollado en su solución analítica por las ecuaciones diferenciales parciales en un sistema continuo como vigas y secuencias. El análisis modal esta basado en el hecho que la respuesta de vibración de un sistema linear dinámico de tiempo invariante puede ser expresado como la combinación lineal de movimientos simples armónicos llamados los modos naturales de vibración. Este concepto es similar a utilizar la combinación de *Fourier* de senos y cósenos de las ondas para representar una onda compleja. Los modos naturales de la vibración son determinados completamente por sus propiedades físicas (masa, dureza y amortiguamiento) y su distribución espacial.

² JIMIN He, "modal analysis", editorial Butterworth Heinemann.

Cada modo está descrito en términos de sus parámetros modales: frecuencias naturales, los factores de amortiguación modal y las características de patrones de desplazamiento llamados modos. El modo debe ser real y complejo. Cada uno corresponde a su frecuencia natural. El grado de participación de cada modo natural abarcando toda la vibración correspondiente es determinado por las propiedades del ambiente de excitación y por sus modos en el sistema.

El Modal análisis abarca ambas técnicas: la experimental y la teórica. El análisis modal teórico recae en modelo físico de un sistema dinámico comprendiendo su masa, dureza y propiedades de amortiguamiento. Esas propiedades deben ser dadas en forma de ecuaciones diferenciales parciales. Un ejemplo es la ecuación de la onda de una vibración uniforme con secuencia establecida de su distribución de masa y propiedades elásticas.

La solución de la ecuación provee la frecuencia natural y el modo de secuencia su respuesta de vibración forzada. Sin embargo, un modelo físico más realista va comprendido las propiedades de la masa, dureza y amortiguamiento en términos de su distribución espacial llamadas matrices de masa, dureza y amortiguamiento. Estas matrices son incorporadas a un conjunto de ecuaciones diferenciales normales de movimiento. El principio de superposición de un sistema dinámico lineal nos deja transformar las ecuaciones en un problema más sencillo, su solución provee la información modal del sistema. El análisis de elemento finito moderno potencia la solución de casi todas las estructuras dinámicas lineales, además del fortalecimiento de las capacidades y adelanto del análisis modal teórico. Por otra parte, el rápido avance en las últimas dos décadas de la tecnología sobre todo en la adquisición de información y capacidades de procesamiento ha dado mayores resultados en el área experimental del análisis, esto es lo que se ha convertido en lo que se ha denominado prueba modal.

4.2.3. Aplicaciones prácticas del análisis modal

En las últimas dos décadas, han habido innumerables aplicaciones del análisis modal reportadas en la literatura, cubriendo extensas áreas de ingeniería, ciencia y tecnología.

Para los próximos años la expansión de lo que es la utilización del análisis modal va a ser muy diverso. Se piensa que las aplicaciones prácticas de modal análisis van a estar relacionadas a los avances en tecnología experimental. Simplemente es imposible pensar lo que podrían ser todas las aplicaciones que se le va a dar en el futuro pero en este momento hay muchas áreas que están “iluminadas” por el uso del análisis modal y el potencial de éste, está en crecimiento.

Como previamente se había comentado, la relación del análisis modal con casi todas las aplicaciones de aeronáutica y mecánica en particular (por los casos reportados en la literatura), pero lo que podemos suponer que esta practica, se está convirtiendo en algo interdisciplinario, es decir, que en los años venideros, todo tipo de personal va a usar ésta herramienta en algo específico sin importar carrera o tipo de aplicación especial.

En la industria de la ingeniería automotriz el enorme comercial y seguridad de los aspectos relacionados con el rediseño de un vehículo, obliga de la mejor forma posible entender todo lo respectivo a las propiedades dinámicas de las estructuras vehiculares y la repercusión de cualquier cambio de diseño. El interés que se le ha dado es ahora en combinar los dos tipos de análisis el experimental y el teórico para encontrar un solo resultado. Esto se ha hecho para incrementar el porcentaje de aproximación o reducir los errores para hacer el tipo de vehiculo ideal ya que los vehículos modernos son livianos y fuertes. Pero esto va en relación a los dos métodos. El análisis modal experimental como prueba antes del lanzamiento, también juega un papel importante en el estudio del ruido del vehiculo y estudio de vibraciones.

El rápido desarrollo en el área de las industrias la aeronáutica y astronáutica ha sido un gran reto en muchas disciplinas de ingeniería con diversas dificultades tecnológicas. Las estructuras dinámicas de ambas estructuras, tanto de aviación, terrestre y espacial han sido un significativo catalítico en el adelanto del análisis modal. Las estructuras de las áreas anteriores, impusieron rigurosos requerimientos sobre la integridad estructural y el comportamiento dinámico, el cuál ha sombreado los duros esfuerzos para reducir el peso. Las largas dimensiones de las estructuras espaciales también afirman nuevos estímulos para el análisis estructural. Estableciendo un modelo matemático exacto es siempre una tarea para las estructuras terrestres al igual que las espaciales.

El análisis modal experimental ha proveído un indispensable significado verificando un modelo matemático derivado de la modelación por computadora.

Esto asegura un significado especial en términos de las propiedades de amortiguación, no linealidades y un valor exacto de fuerza y respuesta de estimación, lo cual la modelación por computadora a menudo encuentra dificultades para tratar lo que mencionó anteriormente. De hecho, la mayor cantidad de publicaciones de los 80's del elemento finito data de las industrias aeronáuticas. Largas amplitudes de fuerza y respuesta experimentada por aviación terrestre y espacial impulsan el desarrollo de linealidad de la teoría modal hacia su límite.

El análisis modal también se incrementó en la ingeniería civil, donde los análisis estructurales siempre han sido su área crítica. El interés por el comportamiento de estructuras civiles sobre sismos o vientos, garantiza la utilización del análisis modal. Las estructuras civiles son usualmente mucho más grandes que aquellas mecánicas o aeronáuticas, por lo cual la prueba modal se empezó a utilizar. Un gran número de aplicaciones son interesantes con la predicción de respuestas de una construcción civil, debido a las vibraciones causadas por el ambiente o cargas externas. Este esfuerzo por la predicción de la respuesta recae en un modelo matemático exacto, el cual puede ser derivado por un análisis modal. Ejemplos de tal rango de aplicación desde edificios muy altos, con relación de suelo, estructuras, hasta un sistema de represas. Las fuerzas que afectan la vida diaria están relacionadas con la ingeniería civil en forma de terremotos, viento, vibraciones ambientales, cargas relacionada por el tráfico de automóviles, etc.

En los años recientes, se ha usado la prueba modal en puentes, para complementar la inspección tradicional y prueba estática. La prueba modal has sido usada como una prueba efectiva no destructiva para localizar la presencia de defectos críticos. Esto puede proveer una información invaluable para el mantenimiento de los puentes o la toma de decisiones acerca de ellos.

Una aplicación ajena al campo de la ingeniería, puede ser en la acústica y los instrumentos musicales. El análisis modal acústico ha sido usado para analizar las características dinámicas de bocinas. Este análisis provee una información crucial en el diseño de nuevas bocinas con mejor sonido.

4.2.4. Desarrollo histórico del análisis modal

La idea esencial del análisis modal es describir un fenómeno complejo en la estructura dinámica con unos simples componentes, por ejemplo, los modos de vibración naturales. Esta idea es muy parecida al atomismo, el cual trata de encontrar los mayores elementos básicos para variar distintas sustancias, o el concepto de las series de Fourier que representan una complicada forma de onda, por una combinación de unas simples ondas de seno y coseno. En este sentido, el origen del análisis modal puede ser escrito en la historia. Sin embargo, hay dos marcas en el origen y comprensión del análisis modal. Newton, de su observación del espectro del sol, confirmó la composición de los colores y componentes. Por su parte Fourier, basado en un conocimiento matemático, demanda que una función periódica arbitraria con un intervalo infinito puede ser siempre representada por una sumatoria de funciones armónicas simples. La serie de Fourier y el análisis del espectro recaen en la fundación de un sólido desarrollo del análisis modal.

El análisis modal teórico puede ser cercanamente definido con una ecuación de onda, el cual describe la dinámica de una secuencia de vibraciones. De la solución, podemos determinar sus frecuencias naturales, los modos y la respuesta forzada. Esta etapa del análisis modal, desarrollada durante el siglo XIX, fue dependiente de las matemáticas para resolver las ecuaciones diferenciales parciales, las cuales describen diferentes estructuras dinámicas continuas; la elegancia de la solución es evidente mientras el alcance de las estructuras que se pueden resolver son limitadas.

El concepto de un objeto y la introducción del análisis de las matrices fueron traídas acerca un clímax en análisis modal teórico en el último siglo. La teoría fue desarrollada tal que, un análisis dinámico de la estructura de un sistema arbitrario puede ser obtenido cuando se sabe la distribución de su masa y dureza en forma matricial. Sin embargo la teoría pudo únicamente ser realizada después de que las computadoras fueron inventadas. En ese aspecto, el análisis modal teórico es mucho más un análisis modal numérico.

La fundación del análisis modal experimental fue descubierta en el último siglo. El corazón de análisis modal experimental es la identificación del sistema y como resultado,

este fue notorio por el desarrollo de la ingeniería eléctrica. La analogía de los circuitos eléctricos y un sistema mecánico dejó la aplicación de alguna teoría del análisis de circuitos hacia el estudio de sistemas mecánicos. Esto dio cuatro identificación de sistemas, impedancia mecánica y el análisis del subsistema en la dinámica estructural.

La invención del algoritmo de la transformada de Fourier (FFT) por J. W. Cooley y J. W. Turkey en 1965, finalmente pasmó la manera para una rápida aplicación prevalerte de una técnica experimental en estructuras dinámicas. Con el FFT, las respuestas de la frecuencia de una estructura pueden ser calculadas de la medida de una entrada dada y la respuesta resultante.

La teoría del análisis modal ayuda a establecer la relación entre la medida de la FRFs y la información modal de un espécimen probado. Esfuerzos fueron puestos en derivar la información modal de la medida de FRF. El primero, y quizá el mas significativo método del análisis modal experimental fue propuesto por C. C. Kennedy y C. D. Pancu en 1947, antes de que la FFT se hubiera hecho. Su método fue olvidado hasta que la FFT le dio vida al análisis modal experimental. Desde entonces, han sido propuestos numerosos métodos y muchos de los cuales han sido computarizados, incluso esos métodos que son basados en vibración libre de una estructura con su respuesta en frecuencia.

El desarrollo experimental también ayudó a avanzar la teoría del análisis modal. El análisis modal analítico tradicional basado en el modelo proporcional de amortiguamiento fue expandido en un modelo no-proporcional de amortiguamiento. Así mismo, se desarrolla la teoría de los modos de vibración complejos. El análisis modal engloba más que la teoría de control paralelo. Por lo tanto, algunos problemas dinámicos estructurales inversos, tal como la identificación de la fuerza desde una medida de respuesta, pudieron ser resueltos.

Hoy en día el análisis modal ha ayudado muchos campos de ingeniería y ciencia. Y hay aplicaciones de todo tipo como previamente se comentó.

4.2.5. Análisis modal o análisis de la forma del modo: definiciones e interpretación física.

En las vibraciones libres, la aplicación externa de cargas es “Cero” y la estructura vibra bajo los efectos de las condiciones iniciales. El análisis de las vibraciones es raramente realizado, puesto que en la mayoría de los casos, la estructura es sujeta a las cargas externas “no-Cero”. Sin embargo, la solución del problema de las vibraciones con amortiguación “Cero”, provee las características dinámicas más importantes de una estructura: las frecuencias naturales y las formas de los modos. A continuación vamos a mencionar algunas fórmulas para el entendimiento de las definiciones para el tipo de problema del análisis modal.

Mas específicamente, cuando se buscan las soluciones “no cero” del problema:

$$[M] \{\ddot{y}\} + [K] \{y\} = \{0\} \quad (1)$$

Entonces estamos realizando un análisis modal. Para un sistema N- grados de libertad, nosotros debemos asumir que una posible solución es de la forma

$$\{y\}_i = \{\Phi\}_i \text{sen}(\omega_i t - \alpha_i) \quad (2)$$

Donde $\{\Phi\}_i$ es la i- forma del modo o modo con una correspondiente frecuencia natural circular ω_i y ángulo de fase α_i . Substituyendo la ecuación 2 en la ecuación 1 y eliminando $\text{sen}(\omega_i t - \alpha_i)$ nos da:

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\Phi\}_i = \{0\} \quad (3)$$

La ecuación 3 puede ser escrita como un sistema de N - ecuaciones dando la ecuación 4:

$$\begin{pmatrix}
 k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} & \dots & k_{1N} \\
 k_{12} & k_{11} - \omega^2 m_1 & \dots & k_{2N} \\
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\
 K_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{NN} - \omega^2 m_N
 \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix}
 \Phi_1 \\
 \Phi_2 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \Phi_2 \quad i
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 \cdot \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (4)$$

La formulación de las ecuaciones 3 y 4 es un problema matemático importante conocido como "eigenproblema". El eigenproblema aparece en otro tipo de análisis ingenieriles aparte de los dinámicos. Un ejemplo característico es el cálculo de la carga en la estabilidad estructural. Una característica principal del problema del valor propio (eigenvalor) es que no proporciona una solución única de la respuesta. Más específico, {Φ}i que se calcula en análisis modal no representa las amplitudes del sistema bajo vibración libre, pero aun así, los cocientes normalizados de la amplitud que, cuando están combinados correctamente, pueden proporcionar la reacción dinámica del sistema.

El objetivo del análisis modal es calcular la ωi y la correspondiente {Φ}i que satisface la ecuación 3. Una solución no trivial, por ejemplo, una solución por el cual todos los ωi y {Φ}i no son Cero, requiere que el determinante de la ecuación 3 es Cero, por eso es:

$$\text{Det} ([K] - \omega_i^2 [M]) = 0 \quad (5)$$

La ecuación 5 es una ecuación polinomial de ángulo N en ωi2. Este polinomial es conocido como la ecuación característica del sistema. Para cada solución ωi2 (i = 1,2,...N) de la ecuación característica se puede resolver la ecuación 4 para {Φ}i. Una solución ωi2 de la ecuación característica es llamada un eigenvalor (valor propio). Para cada uno de los eigenvalores corresponde un eigenvector, que es, por un sistema con N grados de libertad hay N eigenvectores y sus correspondientes eigenvalores. En

dinámica, ω_i es llamado la frecuencia natural circular, y los correspondientes *eigenvectores* son llamados la forma del modo; esto es, en términos del eigenvector y la forma del modo son equivalentes. La frecuencia natural circular mas pequeña ω_i es llamada la frecuencia circular fundamental, y su correspondiente forma del modo $\{\Phi\}_i$ es llamada el modo fundamental de vibración.³

A este punto debe de ser de ayuda presentar una interpretación física de una forma de modo. La ecuación 3 expresa equilibrio entre la inercia y las fuerzas de dureza en una estructura en tiempo t . Si reescribimos la ecuación 3 en la forma:

$$[\mathbf{K}] \{\Phi\}_i = \omega_i^2 [\mathbf{M}] \{\Phi\}_i \quad (6)$$

Una forma del modo puede ser vista como una deflexión estática resultante de la fuerzas del lado de la mano derecha de la ecuación 6.

La figura 2.2.3 (a) y (b) muestran una viga simplemente apoyada y modelada con cinco puntos de masa. Las dos primeras formas de los modos de la viga están enseñadas en la figura 2.2.3 (c) y (d). Los puntos donde la deflexión de una forma del modo de una viga o marco es cero son llamados nodos. En platos, placas y estructuras de membranas de los nodos recaen sobre líneas nodales. Los sólidos tridimensionales tienen superficies nodales.

³ "Finite element modeling in engineering practice". Constantine C. Spyarakos.

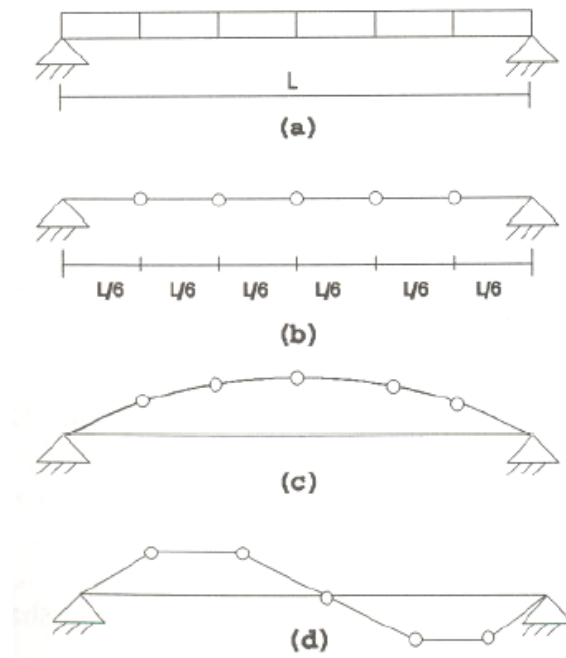


Figura 4.2.5.1: (a) Modelo de seis elementos de la viga; (b) Modelo total de puntos; (c) y (d) primero y segundas formas del modo.

A continuación se presenta un ejemplo para el mayor entendimiento de lo descrito anteriormente: a) los cálculos de las frecuencias naturales y formas del modo de una estructura modelada como un sistema de 2 grados de libertad; b) la definición y los cálculos de la forma del modo normalizada; y c) la propiedad ortogonal de las formas del modo.

Ejemplo 1: encuentra las frecuencias naturales y las formas de los modos de una barra en cantiliver fijada en el extremo y libre en el otro para vibrar axialmente, como se muestra en a figura 4.2.5.1. Usa dos elementos y formulaciones de puntos de masa.

($E = 29 \times 10^6$ psi, $L = 480$ in, $A = 2$ in², $\rho = 0.10$ lb-sec²/in⁴)

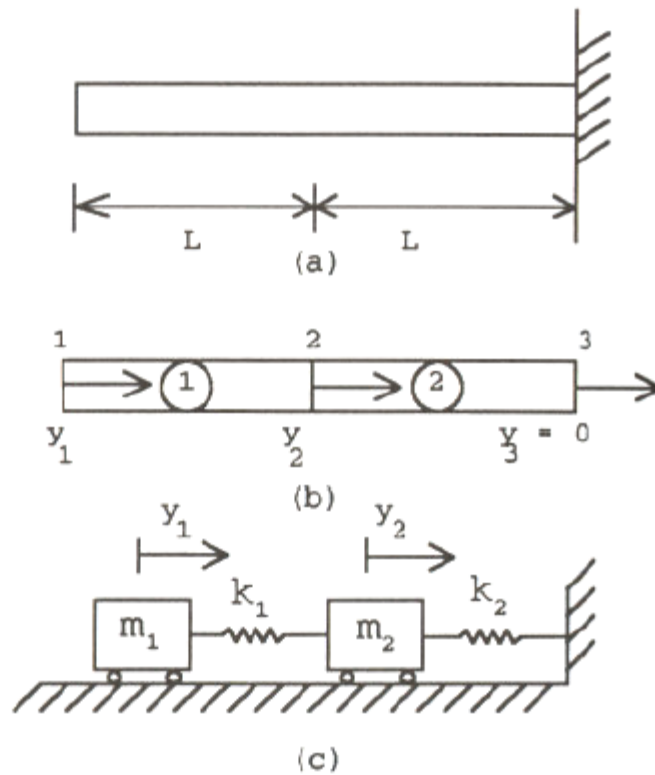


Figura 4.2.5.2: (a) Barra voladiza; (b) modelo de Dos elementos; (e) modelo del resorte-masa de Dos grados de libertad.

El procedimiento de la solución consiste de los 4 siguientes pasos:

1. Formulación de las ecuaciones de movimiento con amortiguación cero y cargas externas cero.
2. Derivación de la ecuación característica.
3. Cálculos de las frecuencias naturales y formas del modo.
4. Normalización de la forma del modo.

Paso 1:

La ecuación de movimiento del modelo de 2 elementos con cero fuerzas puede ser obtenido de la ecuación 7 para $F_1 = F_2 = F_3 = 0$, eso es:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

La U_i en la ecuación 7 ha sido substituida con y_i ($i = 1, 2, 3$) en ecuación 7.

Una solución de la ecuación 7 está dada por

$$\{y\} = \{Y\} \text{sen}(\omega t - \alpha) \quad (8)$$

Diferenciando la ecuación 8

$$\{\ddot{y}\} = -\omega^2 \{Y\} \text{sen}(\omega t - \alpha) \quad (9)$$

Substituyendo las ecuaciones 8 y 9 en la ecuación 7, y eliminando $\text{sen}(\omega t - \alpha)$ nos resulta:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Desde $Y_3 = 0$, la ecuación 10 puede ser reducida a:

$$\left[\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Después de hacer las multiplicaciones de la matriz obtenemos:

$$\left(\frac{EA}{L} - \omega^2 \frac{\rho AL}{2}\right) Y_1 - \frac{EA}{L} Y_2 = 0$$

$$-\frac{EA}{L} Y_1 + \left(\frac{2EA}{L} - \omega^2 \rho AL\right) Y_2 = 0 \quad (12)$$

Paso 2:

Para una solución no cero de ecuaciones 11 y 12 el determinante debe ser cero:

$$\det \left| \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (13)$$

Dejamos:

$$\mu = \frac{\omega^2 (\rho AL/2)}{EA/L} = \omega^2 \frac{\rho L^2}{2E} \quad (14)$$

Entonces la ecuación 13 puede ser descrita como:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\mu & -1 \\ -1 & 2-2\mu \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

La expansión de la determinante deja a la ecuación característica:

$$2\mu^2 - 4\mu + 1 = 0 \quad (16)$$

Paso 3:

Las 2 raíces de la ecuación 16 son $\mu_1 = 0.293$, $\mu_2 = 1.707$. Substituyendo μ_1 y μ_2 en la ecuación 14, obtenemos las frecuencias naturales circulares para la fundamental y el segundo modo

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{0.76}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 27.14 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 &= \frac{1.85}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 65.55 \text{ rad/sec}\end{aligned}\tag{17}$$

Las frecuencias naturales circulares también pueden ser obtenidas a través de un método analítico clásico que considera una viga como un sistema continuo. Tales métodos proveen la exacta ω_1 y ω_2 que para nuestro sistema son dados por:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\pi}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 27.86 \text{ rad/sec} \\ \omega_2 &= \frac{3\pi}{4L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 83.59 \text{ rad/sec}\end{aligned}\tag{18}$$

Así, los dos análisis de elemento finito de modelos de dos elementos dan un error de 2.6% y 21.6% por las ω_1 y ω_2 , respectivamente.

Las frecuencias naturales correspondientes obtenidas con modelos de 2 elementos son:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 4.32 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 10.44 \text{ Hz}$$

(19)

Y los periodos naturales:

$$T_1 = \frac{1}{f_1} = 0.231 \text{ sec}$$

$$T_2 = \frac{1}{f_2} = 0.096 \text{ sec}$$

(20)

Para resolver la ecuación 12 para las amplitudes Y_1 y Y_2 , observamos que fijando el determinante de la ecuación 12 igual a cero, el sistema de las dos ecuaciones son reducidas a una ecuación independiente. Así, substituyendo $\omega_1^2 = (27.14 \text{ rad/sec})^2$ en la segunda ecuación 12 obtenemos:

$$-120833 Y_{11} + 170949 Y_{21} = 0$$

(21)

Un segundo subíndice en Y_1 y Y_2 ha sido introducido para indicar que la frecuencia circular ω_1 es usada. Desde la ecuación 21 hay dos no conocidas y solo a una ecuación, podemos resolver para el valor relativo de Y_{21} sobre Y_{11} para obtener

$$\frac{Y_{21}}{Y_{11}} = 0.707$$

Es común asignar a un valor de unidad para uno de las amplitudes; así, seleccionamos $Y_1 = 1.00$ así que:

$$Y_{11} = 1.00$$

$$Y_{21} = 0.707$$

La Y_{21} y Y_{11} definen a la forma del modo que corresponde a las primeras frecuencias naturales.

Similarmente, substituyendo $\omega_2^2 = (65.55 \text{ rad/sec})^2$ en la segunda ecuación 12 obtenemos:

$$\frac{Y_{22}}{Y_{12}} = -0.707$$

Fijamos $Y_{12} = -1.00$. Por lo tanto, la Y_{22} y Y_{12} que especifican la segunda forma del modo son dados por:

$$Y_{22} = 0.707$$

$$Y_{12} = -1.00$$

Paso 4:

Como se ha visto, las amplitudes de la forma del modo son valores relativos que pueden ser normalizados como uno escoja. Una normalización conveniente especial para un sistema N grados de libertad es dado por

$$\phi_{ij} = \frac{Y_{ij}}{\left(\sum_{n=1}^N m_n Y_{nj}^2 \right)^{1/2}} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, N \end{array}$$

(22)

Los componentes de las *formas del modo normalizados* son denotados como ϕ_{ij} para distinguirlos de la Y_{ij} .

Para nuestro ejemplo la ecuación 22 nos da:

$$\phi_{11} = \frac{Y_{11}}{\sqrt{(m_1 Y_{11}^2 + m_2 Y_{21}^2)}} = 0.102, \quad \phi_{12} = -0.102$$

$$\phi_{21} = \frac{Y_{21}}{\sqrt{(m_1 Y_{11}^2 + m_2 Y_{21}^2)}} = 0.072, \quad \phi_{22} = 0.072$$

Donde $m_1 = 0.5 \text{ lb} \cdot \text{sec}^2/\text{in}$, $AL = 48.0 \text{ lb} - \text{sec}^2/\text{in}$, y $m_2 = 2 m_1$ son los puntos de las masas en los nodos 1 y 2, respectivamente. La primera y la segunda forma del modo normalizada pueden ser expresadas en la forma:

$$\{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix}$$

(23)

Una representación grafica de dos formas de los modos son mostrados en la figura 4.2.5.3.

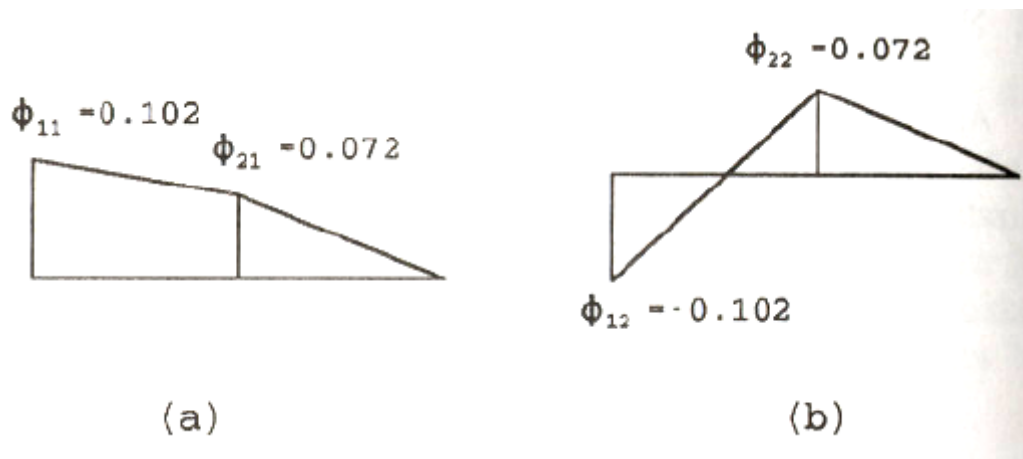


Figura 4.2.5.3: Formas del modo: (a) Fundamental; (b) En segundo lugar.

Para un sistema de N grados de libertad, todas las formas de los modos pueden ser expresadas en la forma de una matriz modal $[\Phi]$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1N} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \phi_{N1} & \phi_{N2} & \dots & \phi_{NN} \end{bmatrix} \quad (24)$$

En nuestro caso la ecuación 24 se convierte en:

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0.102 & -0.102 \\ 0.072 & 0.072 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Las características más importantes de la forma del modo es que satisfagan las condiciones de *ortogonalidad*. Para un sistema de N grados de libertad las condiciones de *ortogonalidad* son dadas por:

$$\begin{aligned} \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j &= 0 \quad \text{for } i \neq j \\ \{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j &= 1 \quad \text{for } i=j \end{aligned} \quad (26)$$

Y por:

$$\begin{aligned} \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j &= 0 \quad \text{for } i \neq j \\ \{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j &= \omega_i^2 \quad \text{for } i=j \end{aligned} \quad (27)$$

Donde $i, j = 1, 2, \dots, N$ y la $\{\Phi\}_i^T$ son las filas de la transpuesta de la matriz $[\Phi]^T$.

Para verificar la condición de ortogonalidad para nuestro ejemplo, fijamos $i = 1$ y $j = 1$ en la ecuación 26, para obtener:

$$[0.102 \quad 0.072] \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix} = \mathbf{1}$$

Y para $i = 1$ y $j = 2$ para obtener:

$$[0.102 \quad 0.072] \begin{bmatrix} 48 & 0 \\ 0 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.102 \\ 0.072 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

Se refiere nuevamente a la propiedad de ortogonalidad cuando se discute la superposición modal de la historia a lo largo del tiempo, el análisis de la respuesta en frecuencia, respuesta del espectro, y análisis aleatorio de vibraciones.

4.2.6. Consideraciones practicas para el análisis modal en ALGOR

Independientemente del tipo de análisis que se requiera para resolver un problema dinámico, el análisis modal debe de ser el primer paso. Aún así, por tiempo de una directa integración de valores que no requieran análisis modal, un cálculo previo puede ayudar, ya que desde el conocimiento de las frecuencias naturales pueden ayudar en ahorrar un periodo de tiempo.

El análisis modal calcula las mejores y más pequeñas frecuencias naturales y provee una aproximación mayor en la evaluación de las frecuencias aún mayores y los modos del espectro. Como resultado debería haber una justificación suficientemente mayor para calcular modos mayores e incluirlas en un análisis dinámico consecuente. Como una regla general, el número de modos como respuesta de un análisis modal dependen de las frecuencias naturales del sistema en relación de la frecuencia contenida y la variación de espacio de las cargas de las fuerzas.

4.3. Resultados de los análisis.

Debido a que las pruebas de análisis Modal varían según la forma de fijación, y se muestran los resultados de forma independiente y de forma total. Varias piezas para el análisis fueron consideradas como una “caja negra”, debido que varios modelos fueron considerados confidenciales, ya sea por el Proveedor de faros y por la VW.

Se efectuaron varios análisis desde el Modal, que fue el que posteriormente se va a comparar con las pruebas de laboratorio, hasta el análisis de esfuerzos y deformaciones, tomando en cuenta únicamente los pesos de la pieza y la gravedad del sistema. Como se mencionó anteriormente, el tipo de análisis sólo depende únicamente de los parámetros dados y los resultados para diferenciarlos.

4.3.1. Análisis Modal (vibraciones naturales).

Los resultados obtenidos dependen de los parámetros requeridos, en este análisis se requirió un rango de frecuencias (rango de frecuencias utilizados en la VW), de 0 – 1000 Hz (tabla 4.3.1). En el análisis modal, el *software ALGOR* no toma en cuenta el valor de amortiguación, por lo tanto no se tomó en cuenta.

Tabla 4.3.1: parámetros del análisis.

Datos del software ALGOR V.16	
<i>Numero de frecuencias para calcular</i>	15
<i>Frecuencia inicial</i>	100
<i>Frecuencia final</i>	1000 ciclos/s
<i>Modos de modelos rígidos</i>	1
<i>Máximo numero de iteraciones</i>	32
<i>Valor de convergencia para el eigenvalor</i>	0.00001
<i>Numero de nodos</i>	22425

El primer paso de interpretar los resultados es verificar el modelo desplazado, la figura muestra la deformación de acuerdo a la frecuencia del modo (figura 4.3.1.1).

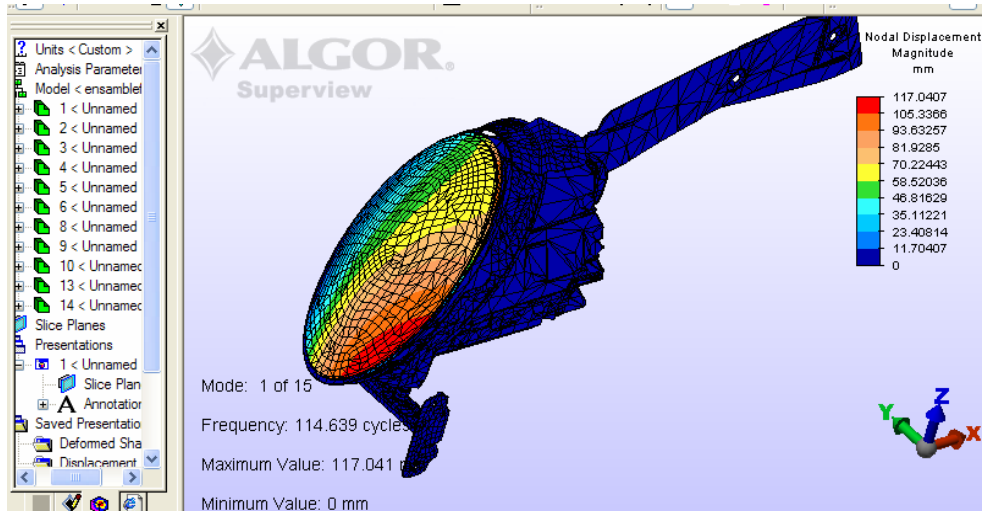


Figura 4.3.1.1: desplazamiento nodal del primer modo obtenido.

Como se aprecia la figura 4.3.1, los desplazamientos vienen dados en colores, el color *rojo* es el desplazamiento máximo, mientras que el *azul* es el desplazamiento mínimo; en cada modo se muestra el desplazamiento en mm y la frecuencia en Hz. Como este análisis es Modal (vibraciones naturales), los desplazamientos se llaman desplazamientos imaginarios, y las frecuencias se llaman frecuencias del modo, es por eso que los desplazamientos son exagerados.

Esto quiere decir que estos valores obtenidos son las mediciones de cómo se comporta la pieza pero con valores imaginarios; estos valores no son reales, ni se puede esperar que vaya a tener un desplazamiento real.

La siguiente tabla (tabla 4.3.2) muestra los valores obtenidos del valor máximo de desplazamiento y el mínimo, la frecuencia y el modo.

Tabla 4.3.2: resultantes de los desplazamientos (Modal).

Ensamble Final Análisis Modal			
Modo	Frecuencia	Valor máximo	Valor mínimo
	(Hz)	mm	mm
1	114.639	117.041	0
2	186	137.609	0
3	264.744	163.448	0
4	275.838	94.5095	0
5	299.257	89.4122	0
6	352.41	87.8632	0
7	370.627	118.637	0
8	462.72	85.29	0
9	472.75	114.534	0
10	497.802	76.5017	0
11	522.155	127.261	0
12	562.151	73.229	0
13	640.329	77.875	0
14	679.66	101.94	0
15	693.864	119.995	0

Los desplazamientos vienen dados en forma tridimensional, para su comparación posterior; el desplazamiento en el eje Y es insignificante por las fijaciones, ya que este es un análisis modal. En los ejes X y Z se desarrolla casi todo el desplazamiento. Como se observa en la tabla 5.2.3, el mayor desplazamiento en el eje X se da en el modo 3, que tiene una frecuencia de 264.744 Hz (figura 4.3.1.2); mientras que el menor desplazamiento se da en el modo 6, que tiene una frecuencia de 352.41 Hz.

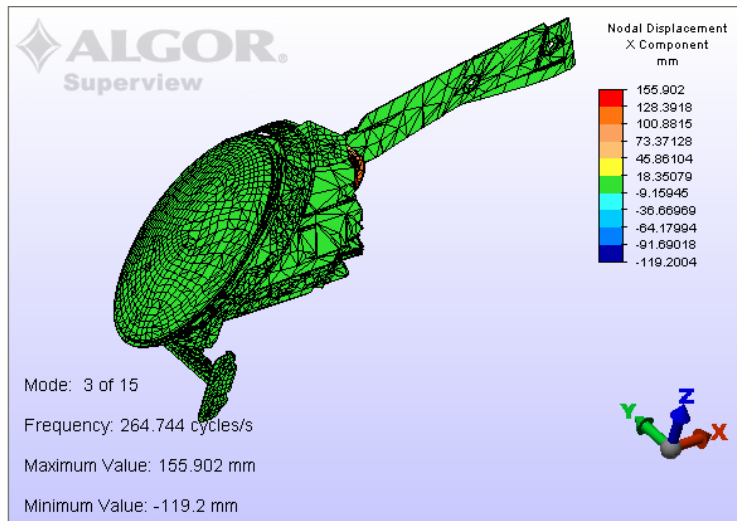


Figura 4.3.1.2: mayor desplazamiento en el modo 3 en eje X.

Tabla 4.3.3: desplazamiento eje X (Modal).

Ensamble Final Análisis Modal (Eje X)			
<i>Modo</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Valor máximo</i>	<i>Valor mínimo</i>
	(Hz)	mm	mm
1	114.639	8.9267	-75.11
2	186	82.974	-84.329
3	264.744	155.902	-119.2
4	275.838	45.5338	-38.5812
5	299.257	77.8895	-6.7957
6	352.41	33.9487	-9.8737
7	370.627	71.3473	-62.819
8	462.72	32.5938	-50.5934
9	472.75	75.9483	-57.1602
10	497.802	61.4942	-28.1617
11	522.155	79.7024	-95.6911
12	562.151	52.5212	-48.4223
13	640.329	53.8514	-22.1607
14	679.66	43.9507	-94.3045
15	693.864	69.5004	-101.758

Los desplazamientos en el eje Z también son significativos aunque el modelo se desplaza mayormente en el eje X, la tabla 4.3.4 muestra los desplazamientos en el eje Z.

Tabla 4.3.4: desplazamiento eje Z (Modal).

Ensamble Final Análisis Modal (Eje Z)			
<i>Modo</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Valor máximo</i>	<i>Valor mínimo</i>
	(Hz)	mm	mm
1	114.639	69.124	-10.6373
2	186	84.486	-82.9617
3	264.744	26.8142	-56.3595
4	275.838	87.3694	-5.4828
5	299.257	44.0402	-14.9037
6	352.41	86.0432	-29.6948
7	370.627	58.8662	-94.3029
8	462.72	70.5972	-27.292
9	472.75	50.6452	-68.8114
10	497.802	50.7281	-65.7236
11	522.155	90.7619	-63.9339
12	562.151	52.4179	-37.9383
13	640.329	67.6658	-22.9736
14	679.66	56.149	-47.4172
15	693.864	2.8122	-90.1312

Las frecuencias naturales circulares obtenidas se muestran en la tabla 4.3.5.

Tabla 4.3.5: frecuencias naturales circulares.

Número de Frecuencias	= 15
Número de modo	Frecuencia circular (rad/sec)
1	7.203D+02
2	1.1687D+03
3	1.6634D+03
4	1.7331D+03
5	1.8803D+03
6	2.2143D+03
7	2.3287D+03
8	2.9074D+03
9	2.9704D+03
10	3.1278D+03
11	3.2808D+03
12	3.5321D+03
13	4.0233D+03
14	4.2705D+03
15	4.3597D+03

La amortiguación no fue considerada en este análisis. Sin embargo, Algor te deja considerar la amortiguación usando una amortiguación de *RAYLEIGH*, en el método de integración directa.

4.3.2. Análisis de vibraciones forzadas.

Las vibraciones que tienen lugar bajo la excitación de fuerzas externas son **vibraciones forzadas**. Cuando la excitación es oscilatoria, el sistema es obligado a vibrar a la frecuencia de excitación. Si ésta coincide con una de las frecuencias naturales del sistema, se produce una situación de resonancia y ocurren oscilaciones peligrosamente grandes. Estas frecuencias son reales, no como las frecuencias naturales modales; las frecuencias reales crean desplazamientos, esfuerzos y deformaciones reales, en el sistema. Este es un tipo de análisis que se puede comparar con la realidad.

Para el análisis de vibraciones forzadas, se tomaron los parámetros mostrados en la figura 4.3.2.1, el tipo de análisis fue un análisis de vibraciones vibratorias sobre las piezas; se le dio un rango de vibraciones aleatorias oscilatorias de 0 – 1000 Hz, en los ejes Z y X, con una amortiguación de 0.03. Este tipo de análisis es una oscilación de frecuencias sobre las fijaciones en el espacio.

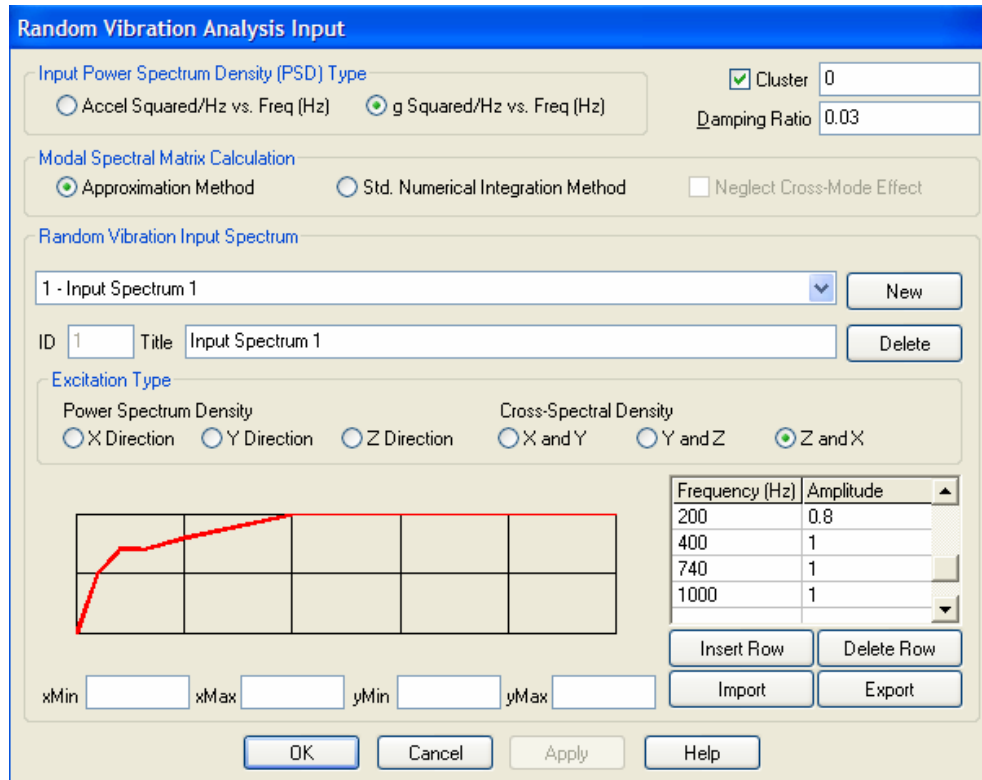


Figura 4.3.2.1: parámetros de vibraciones aleatorias.

Este tipo de análisis es el adecuado para comparar sistemas que son transportados por “algo”, los ingenieros usan el análisis aleatorio de vibraciones para encontrar una manera de ver cómo responde la excitación, como en el caso del manejo de una camioneta, un auto, etc. La vibración generada por los vehículos desde motores hasta condiciones de carreteras es una combinación de frecuencias que varían de la fuente y tiene una naturaleza aleatoria.⁴ Los desplazamientos resultantes del sistema forzado (figura 4.3.2.2) vienen dados en el modo uno, por el valor máximo de desplazamiento de 1.068 mm, mientras que el valor mínimo es de 0 (cero). Los valores obtenidos de los demás modos se muestran en la tabla 4.3.6.

⁴ Tutoriales ALGOR V16

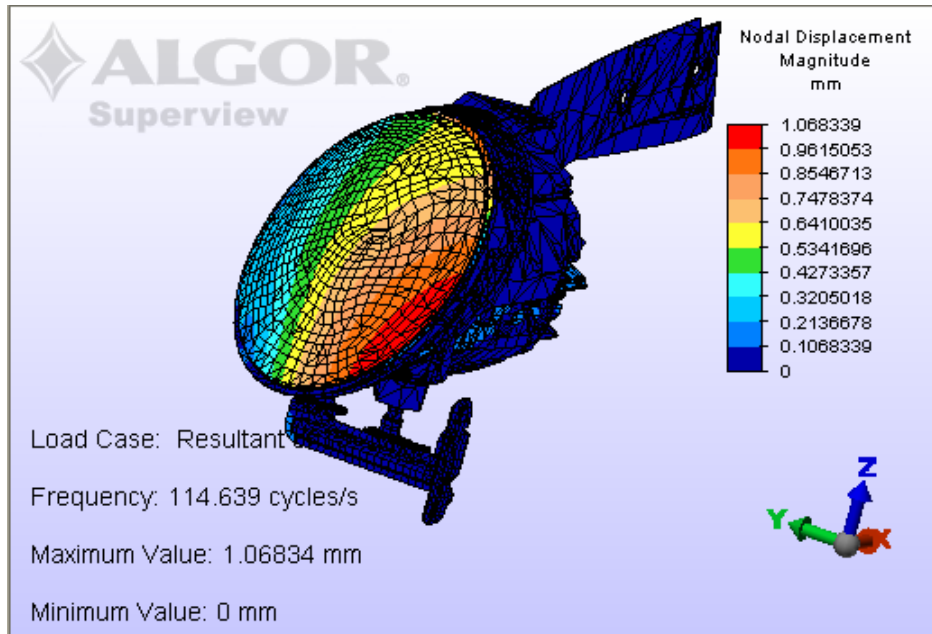


Figura 4.3.2.2: resultante del sistema del desplazamiento nodal.

Tabla 4.3.6: desplazamientos de todos los modos vibraciones forzadas.

Ensamble Final Análisis Modal			
<i>Modo</i>	<i>Frecuencia</i>	<i>Valor máximo</i>	<i>Valor mínimo</i>
	<i>(Hz)</i>	<i>mm</i>	<i>mm</i>
1	114.639	1.09815	0
2	186	0.279301	0
3	264.744	0.163476	0
4	275.838	0.294823	0
5	299.257	0.277645	0
6	352.41	0.101552	0
7	370.627	0.0806233	0
8	462.72	0.117817	0
9	472.75	0.00904623	0
10	497.802	0.137769	0
11	522.155	0.163076	0
12	562.151	0.103595	0
13	640.329	0.108036	0
14	679.66	0.0370142	0
15	693.864	0.0480292	0

Algunos de los desplazamientos modales de las piezas más demostrativos en la mica del faro se muestran en la figura 4.3.2.3.

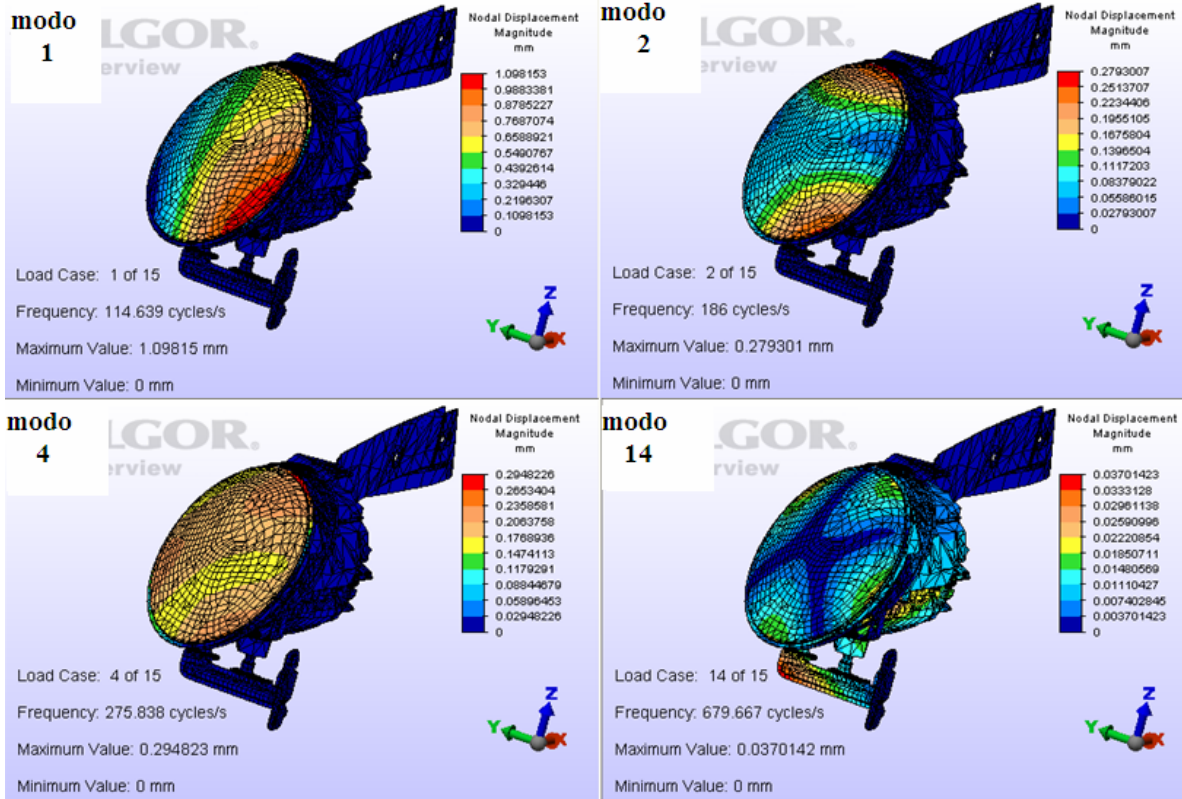


Figura 4.3.2.3: desplazamiento nodal modos 1, 2, 10, 14.

Tabla 4.3.7: desplazamientos en X y Z.

Ensamble Final Análisis Modal (Eje X)				Ensamble Final Análisis Modal (Eje Z)			
Modo	Frecuencia	Valor máximo	Valor mínimo	Modo	Frecuencia	Valor máximo	Valor mínimo
	(Hz)	mm	mm		(Hz)	mm	mm
1	114.639	0.704739	0	1	114.639	0.648567	0
2	186	0.171761	0	2	186	0.171479	0
3	264.744	0.155928	0	3	264.744	0.0563689	0
4	275.838	0.142012	0	4	275.838	0.272549	0
5	299.257	0.241864	0	5	299.257	0.136755	0
6	352.41	0.0392379	0	6	352.41	0.0994489	0
7	370.627	0.0484861	0	7	370.627	0.0640862	0
8	462.72	0.0698876	0	8	462.72	0.09752	0
9	472.75	0.00599863	0	9	472.75	0.00543494	0
10	497.802	0.110742	0	10	497.802	0.118359	0
11	522.155	0.122622	0	11	522.155	0.116305	0
12	562.151	0.0742992	0	12	562.151	0.074153	0
13	640.329	0.0747079	0	13	640.329	0.0938726	0
14	679.66	0.0342417	0	14	679.66	0.0203876	0
15	693.864	0.0407296	0	15	693.864	0.036076	0

Los desplazamientos en el eje X y Z, vienen dados en la tabla 4.3.7. Los esfuerzos vienen dados en valores de N/mm^2 y los valores son mostrados en la tabla 4.3.8; en donde se nombra el valor máximo, valor mínimo, el valor visto y la pieza en la que se observa el valor visto.

Tabla 4.3.8: esfuerzos máximos y mínimos de las vibraciones forzadas.

Esfuerzos Máximos Y Mínimos				
modo	Valor máximo	Valor mínimo	Valor visto	Pieza visible
	N/mm^2	N/mm^2	N/mm^2	
1	0.696	2.246E-08	0.2087	14 y 5
2	48.272	6.417E-06	14.4815	14
3	6.312E-02	1.074E-08	0.0631	3 y 13
4	0.591	1.551E-07	0.1772	14
5	141.255	3.253E-05	56.5022	14 y 5
6	96.309	1.603E-04	38.5238	14, 5, 1 y 4, 3 y 13
7	58.096	2.073E-05	no visible	no visible
8	0.298	1.509E-07	0.1190	1 y 4
9	3.487E-04	4.494E-10	1.3940E-04	1,2,5,6,9,10,14
10	0.220	3.322E-07	0.1320	1 y 4
11	0.270	1.334E-07	0.0541	1 y 4
12	0.773	6.273E-07	0.2319	1 y 4
13	384.127	1.036E-03	153.6513	1 y 4
14	5.932E-02	4.295E-08	0.0178	1 y 4
15	107.790	1.772E-04	43.1161	1 y 4

Los esfuerzos más significativos, según la tabla 4.3.8, son en los modos 2, 5, 6, 7, 13 y 15 (algunos de los esfuerzos más significativos visibles en la figura 4.3.2.3). Los esfuerzos (vienen dados en valores *VON MISES*) que alcanzan el valor máximo y en el valor visto tienen un valor mucho menor, son esfuerzos internos del sistema, que no se pueden observar al menos que se le haga un corte, pero el *ALGOR V16* no tiene un sistema de corte para poder observar los esfuerzos mayores.

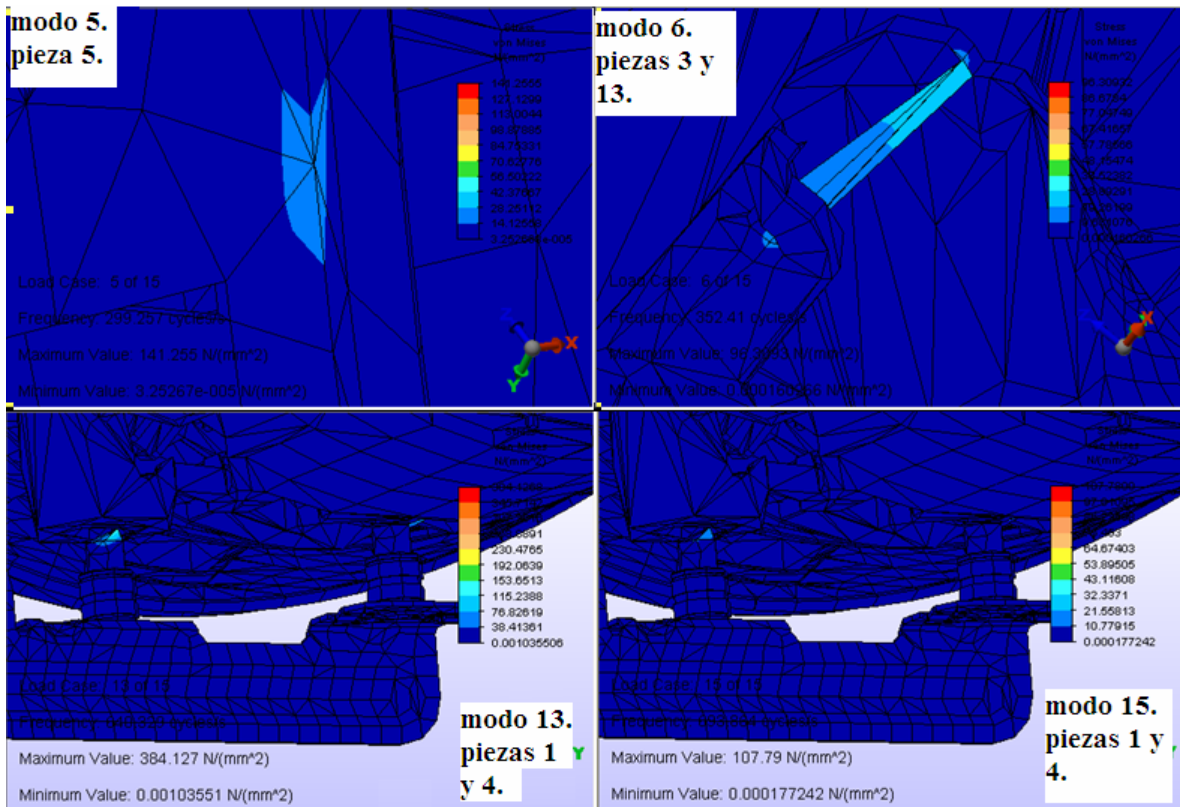


Figura 4.3.2.3: esfuerzos visibles más críticas del sistema.

4.3.3. Análisis de esfuerzos.

El análisis de esfuerzos es más fácil de realizar, ya que es un análisis estático del sistema, en este caso, el análisis de esfuerzos fue realizado únicamente con los pesos de las piezas y la gravedad. El parámetro de entrada fue: la fuerza de gravedad que actuó en el eje Z, con una carga de la masa por la gravedad. Los resultados obtenidos fueron en desplazamientos (figura 4.3.3.1), esfuerzos (figura 4.3.3.2) y deformaciones (figura 4.3.3.3). Para los esfuerzos se utilizaron los esfuerzos *VON MISES*. La tabla de esfuerzos de la figura 4.3.3.2 se ve como el máximo valor de esfuerzos y que fue de 14.8036 N/mm² o 14.8036 MPa y el mínimo valor de esfuerzos resultó de 1.67e- 005 N/mm²; este valor podría ser considerado 0 (cero).

Los desplazamientos vienen dados en mm, el mayor desplazamiento es 0.03407mm y el menor es 0 (cero).

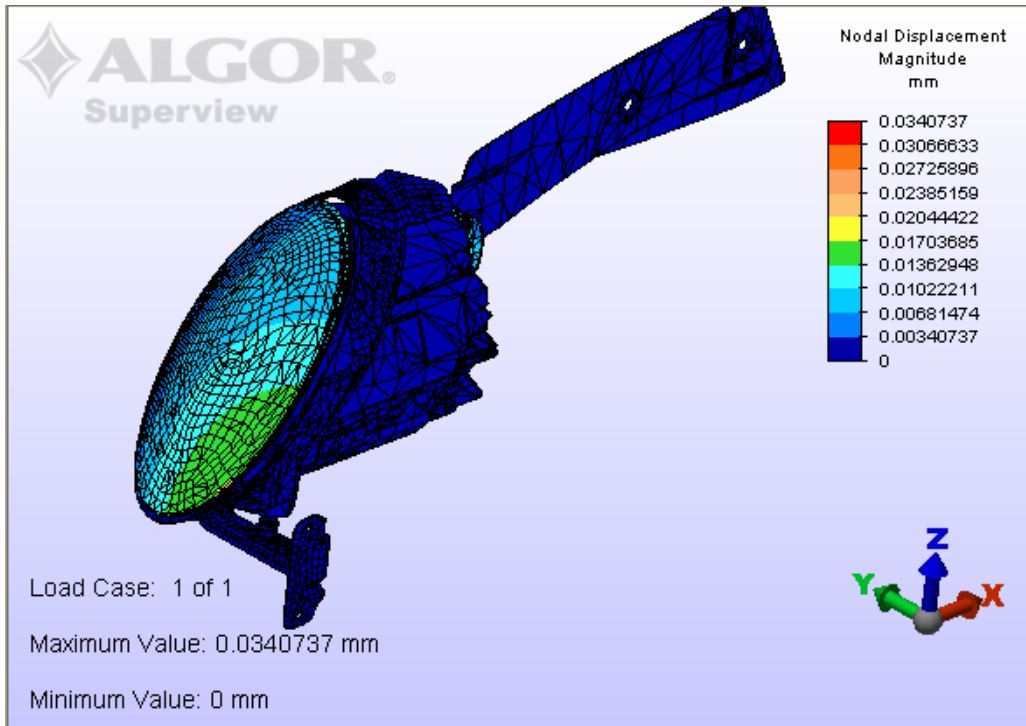


Figura 4.3.3.1: desplazamientos nodales del análisis de esfuerzos.

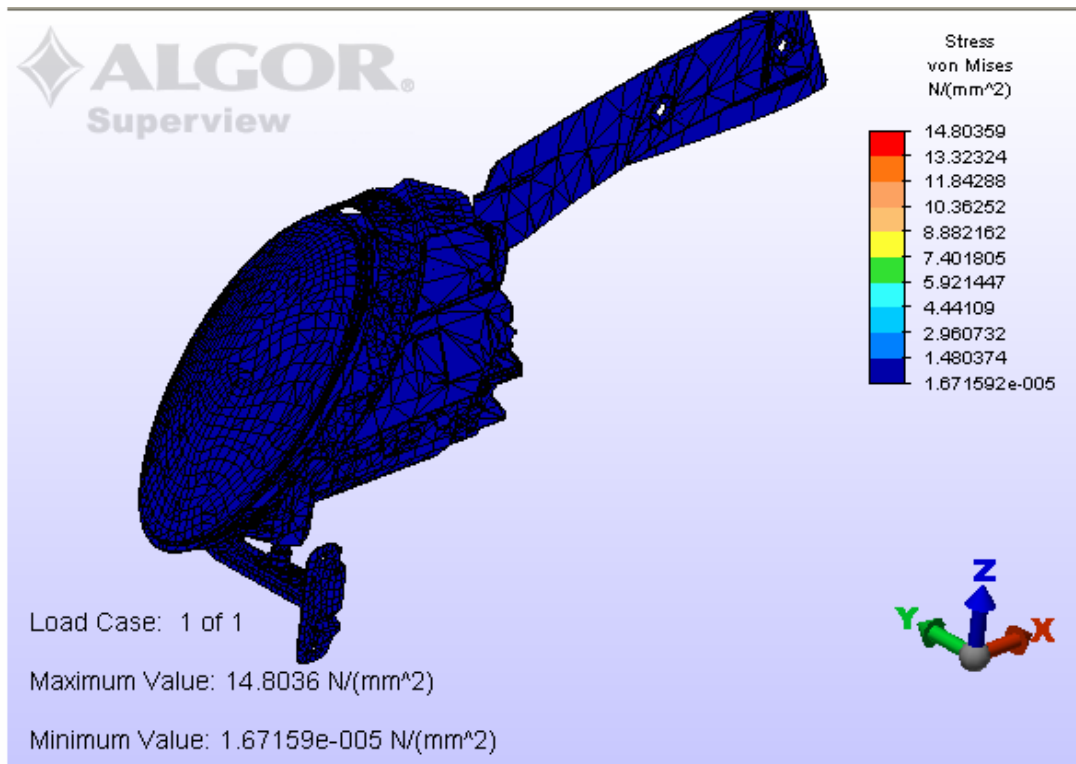


Figura 4.3.3.2: esfuerzos VON MISES del análisis de esfuerzos.

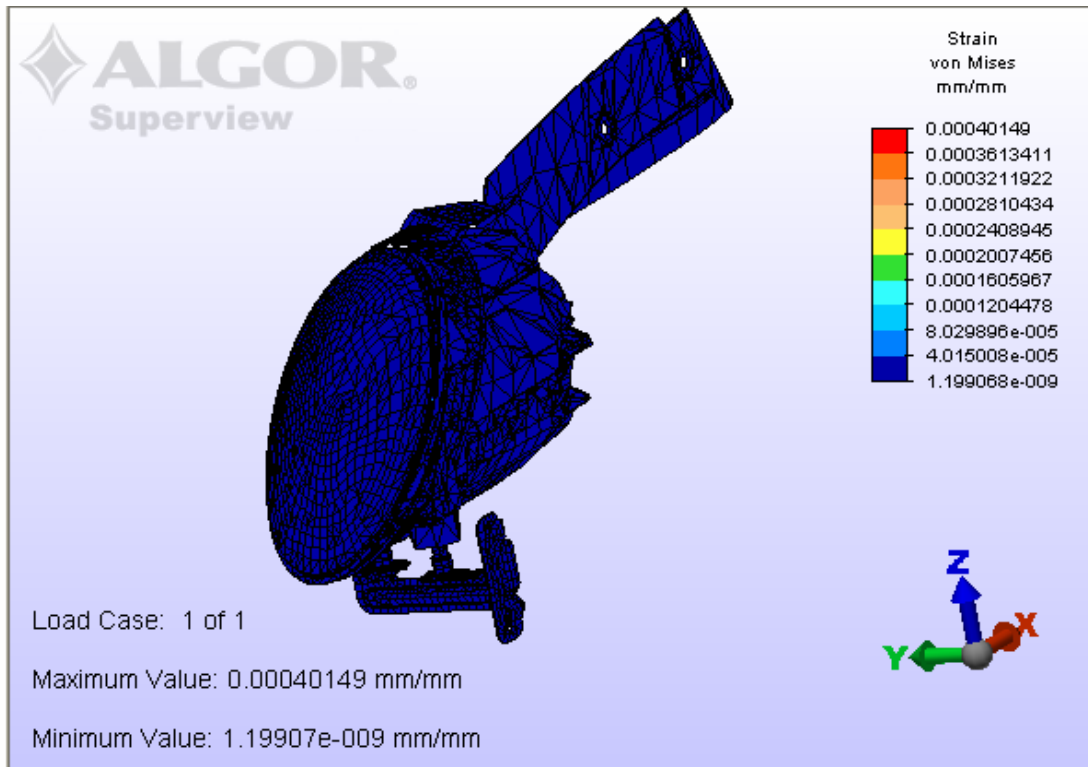


Figura 4.3.3.3: deformaciones unitarias VON MISES del análisis de esfuerzos.

Los valores máximos de las deformaciones son los mostrados en la tabla de la figura 4.3.3.3. En sí, las piezas no tienen una gran deformación, por qué las cargas de los pesos de las piezas no son significativas, es decir, no tienen una gran influencia las masas para crear una carga demostrativa.

Se utilizaron las deformaciones de *VON MISES* por el criterio de falla descrito en el capítulo 2.2.2.3.