

## CAPÍTULO 2

### PRINCIPIOS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

#### 2.1 Introducción al método de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos de análisis ingenieril es relativamente nuevo, ya que sus inicios fueron en el año de 1941, donde Hrenikoff presentó una solución de problemas de elasticidad usando el método denominado “*frame work*”, en 1943 aparece Courant con trabajos realizados en interpolaciones lineales basado en subregiones triangulares para modelar problemas de torsión, después a mediados de los años 50’s aparece Turner desarrollando matrices de rigidez para la solución de problemas de elasticidad en barras y vigas, entre otros elementos; con grandes logros y siguiendo los pasos de Turner, las Corporaciones MacNeal-Schwendler and Computer Sciences elaboraron en la NASA el primer código de importancia para el análisis de elementos finitos, llamado NASTRAN y fue usado en la industria aeroespacial, aunque también tuvo otras aplicaciones en áreas de la ingeniería civil, como el análisis de estructuras; pero no fue hasta 1960 cuando Clough, utilizó por primera vez el término de elemento finito y en 1967 fue publicado el primer libro de elemento finito por Zienkiewicz y Chung.

Fueron muchos los desarrollos, trabajos, investigaciones, experimentos, análisis e inversiones de tiempo y dinero para poder tener en el método de los elementos finitos, una

poderosa herramienta de trabajo, los avances fueron ascendiendo hasta poder tener resultados tangibles, tales como los realizados en el Apolo.

Como podemos ver, el método de los elementos finitos es una poderosa herramienta en la solución de problemas en el área de la ingeniería. Las aplicaciones de este método tienen un gran campo de trabajo, por ejemplo: en el análisis de esfuerzos y deformaciones de automóviles, aeronaves, edificios y estructuras, al igual que tiene campos de estudio en mecánica de fluidos, flujo magnético, pruebas en prototipos y todos ellos con el fin común de llevarlos a un análisis muy preciso y poder obtener soluciones analíticas, que nos brinde información específica y fidedigna.

Con los grandes avances tecnológicos que se han logrado en el área de la computación y sobre todo en los sistemas de diseño asistido por computadora, ahora es relativamente más fácil la modelación de prototipos, en los cuales podemos tener geometrías y superficies complicadas e irregulares, aplicaciones de cargas en forma específica para el estudio preciso de los esfuerzos internos y tener una modelación ajustada a los perfiles y estructuras que se emplean teniendo en consideración ciertas características como el cambio de secciones, estructuras huecas, con pared delgada y con características en secciones transversales muy específicas.

Para poder tener una solución aceptable tomando en consideración los aspectos antes mencionados, al igual que las características de los materiales, es necesario la aplicación de métodos numéricos capaces de dar soluciones a ecuaciones ordinarias o parciales, para poder establecer una ecuación analítica válida a lo largo de todo el elemento de estudio, y es por ello que para poder establecer parámetros específicos y precisos, se necesita de la aplicación del método de elementos finitos.

## 2.2 Fundamentos de los elementos finitos.

El método de los elementos finitos puede llegar a ser un método matemático muy complejo, ya que uno de sus fundamentos está basado en la discretización de los cuerpos de estudio, y debido a la existencia de muchas divisiones se debe realizar una o más ecuaciones para representar el comportamiento de cada división del cuerpo.

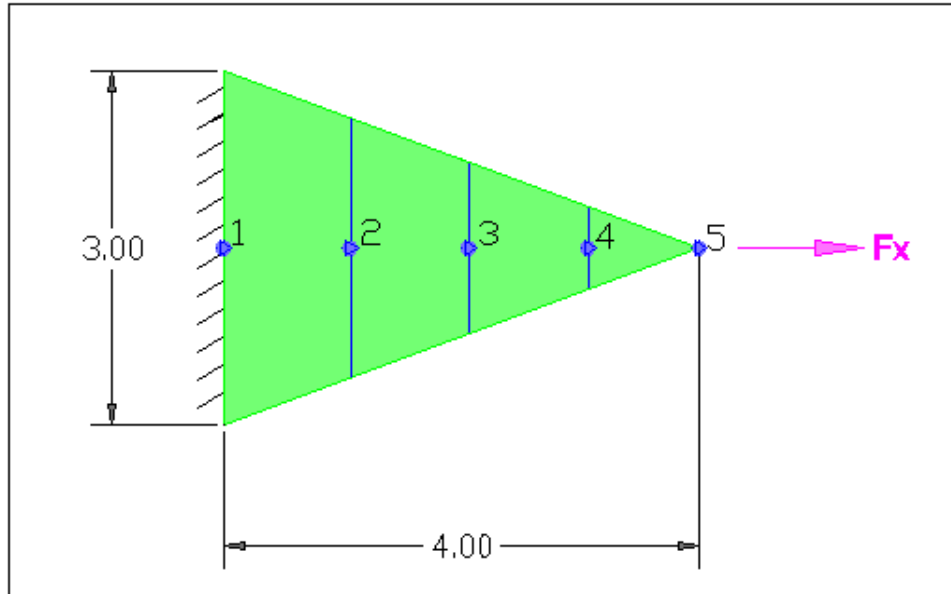
Para poder emplear este método debemos hacer ciertas asunciones, tales como:

1. Una función continua bajo un dominio global, puede aproximarse por una serie de funciones operando bajo un número finito de pequeños subdominios, éstas series de funciones son continuas y pueden aproximarse a la solución exacta, así como el número de subdominios se aproxima infinitamente a la pieza de estudio.
2. El dominio global del cuerpo está dividido es subdominios llamados *elementos*.
3. Los puntos que definen las uniones y conexiones entre los elementos son llamados *nodos o puntos nodales*.
4. Los elementos son especificados como uniones en sus nodos comunes, y son asumidos de esta manera para ser agrupaciones continuas a lo largo de sus fronteras, y cualquier función que represente el comportamiento de este nodo, es asumida para ser igualmente continua en las fronteras.
5. La función que existe bajo el dominio, es resuelta explícitamente para los puntos nodales. Se asume que el valor de la función en cualquier punto interno puede ser definido en términos de variables nodales del elemento de estudio.

6. Las variables nodales se refieren a los grados de libertad y estos son: 3 de desplazamiento y 3 rotaciones para el sistema de coordenadas cartesianas y éste término, es aplicado específicamente para el análisis de esfuerzo, en el cual, las variables nodales son deflexiones sufridas por la estructura en los puntos nodales.
7. La colección completa de elementos representa una aproximación a los dominios de la geometría, y con ello tener una gran exactitud de la pieza de estudio.
8. Los puntos nodales se refieren a puntos para una evaluación de la función, y no representan físicamente puntos de conexión en el dominio.

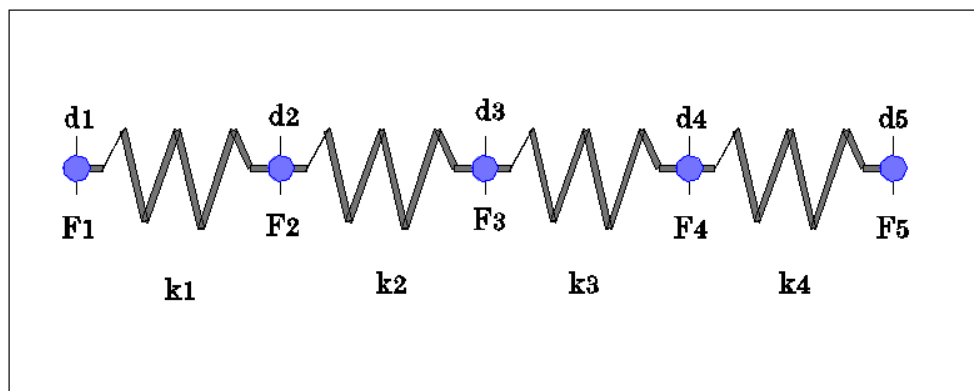
### **2.3 Ejemplo del método del elemento finito.**

Como se mencionó anteriormente, el método de los elementos finitos se basa en la discretización de cuerpos para un mejor análisis y estudio, como se muestra en la Figura 2.1, nuestra pieza de estudio que es una placa triangular, que está dividida en 4 elementos y 5 nodos; en las cuales el nodo 1 está empotrado en una pared y en el nodo 5 está aplicada una fuerza de tensión. El dominio de ésta pieza de estudio, es el plano bidimensional de la placa y la función a evaluar es el desplazamiento en la dirección axial de la placa.



**Figura 2. 1** Estudio de una Placa, utilizando el método de elementos finitos.

Para el estudio de ésta placa, cada sección en la que fue dividida será asumida como un resorte, por lo cual la pieza será un conjunto de resortes con una estrecha relación entre fuerza, rigidez y desplazamiento ver Figura 2.2.



**Figura 2. 2** Representación de la Placa en forma de un conjunto de resortes.

Las funciones de rigidez para cada uno de los  $n$  elementos pueden expresarse de la siguiente forma.

$$k = \frac{EA}{L} \quad (2.1)$$

Donde:

$k$  = Es la rigidez [lbf/in<sup>2</sup>.]

$E$  = Es el módulo de Young [psi].

$A$  = Es el área transversal del elemento [in<sup>2</sup>].

$L$  = Es la longitud del elemento [in].

Esta función de rigidez se basa en la ley de Hooke, desarrollada en 1678 por el matemático inglés Robert Hooke, la cual establece que un cuerpo elástico sufre una deformación cuando se le aplica una fuerza con la siguiente relación de acuerdo a la fuerza aplicada.

$$F = k * x \quad (2.2)$$

Donde:

$F$  = Es la fuerza.

$k$  = Es la constante de proporcionalidad o rigidez.

$x$  = Es el desplazamiento

De la ecuación 2.2 sabemos que:

$$k = \frac{F}{x} \quad \text{y como} \quad x = \Delta l = \frac{F * L}{A * E} \quad \text{entonces} \quad k = \frac{F * A * E}{F * L} = \frac{A * E}{L} \quad (2.3)$$

El valor mayor para el cual se puede utilizar la ley de Hooke es conocido como límite de proporcionalidad de ese material.

Teniendo los datos anteriores y sabiendo que los grados de libertad son los desplazamientos axiales de cada nodo, podemos obtener una ecuación para cada elemento que represente a nuestra placa de estudio:

$$\text{Ecuación 1} \quad k_1 (d_1 - d_2) = F_1 - F_2 \quad (2.4)$$

$$\text{Ecuación 2} \quad k_2 (d_2 - d_3) = F_2 - F_3$$

$$\text{Ecuación 3} \quad k_3 (d_3 - d_4) = F_3 - F_4$$

$$\text{Ecuación 4} \quad k_4 (d_4 - d_5) = F_4 - F_5$$

Escribiendo las ecuaciones anteriores en forma de matriz para cada uno de los elementos obtenemos:

Matriz para el elemento 1:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

Matriz para el elemento 2:

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Matriz para el elemento 3:

$$\begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3 \\ F_3 \end{Bmatrix}$$

Matriz para el elemento 4:

$$\begin{bmatrix} k_4 & -k_4 \\ -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix}$$

Escribiendo las matrices anteriores en conjunto para la representación de la placa obtenemos:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

Este grupo de matrices representa un sistema de ecuaciones, en el cual hay 5 ecuaciones y 5 incógnitas, las cuales pueden ser resueltas para obtener los resultados teóricos de los desplazamientos y fuerzas en cada nodo, debido a la fuerza axial aplicada en la placa.

Aunque este ejemplo ilustra el principio de los métodos numéricos aplicados a un cuerpo bidimensional en base a una matriz de rigidez, la formulación actual de este tipo de cuerpos es mucho más compleja, y por tanto, necesita de grandes recursos tecnológicos para su solución, es por ello que se realizan estudios enfocados a este tipo de análisis, aunque por el momento se han tenido grandes avances en el estudio de elementos sólidos tridimensionales que tienen 20 nodos y 60 grados de libertad por elemento y está representado por un sistema de ecuaciones de 60 x 60 para cada elemento.



## **2.4 Descripción y modelación de un sistema continuo.**

Un sistema dinámico es un sistema cuya configuración varía con respecto a una sola variable independiente que, por lo general es el tiempo. Algunos ejemplos de sistemas dinámicos son: dispositivos mecánicos, eléctricos, electrónicos, procesos geológicos así como movimientos telúricos, sistemas meteorológicos, biológicos, tales como el sistema cardiovascular etcétera. Todos ellos con menor o mayor exactitud, pueden ser simulados de alguna manera. Para los fines de estudio de ésta tesis simularemos y analizaremos el impacto frontal y lateral del auto del proyecto Minibaja.

La simulación de un sistema dinámico se refiere a la representación de su comportamiento por medio de un modelo. Dicho modelo puede ser físico, matemático o simulado por medio de algún software de CAD. El modelo matemático es, por lo general uno de los más económicos, pero casi siempre requiere de un gran número de operaciones aritméticas. Por dichas razones, la simulación se hace mediante computadoras. El modelo realizado por medio de algún software es en la actualidad, el más ocupado para la representación de algún sistema, proceso o evento; aun que para su realización se requiere de un software que permita generar un modelo los más fiel al físico, y sobre todo necesita de computadoras con capacidades mayores a las utilizadas en el modelo matemático.

El objeto de la simulación es, casi siempre la predicción del comportamiento o respuesta de un sistema a una cierta excitación, lo cual tiene un gran significado en el caso del diseño. Si se puede simular el comportamiento de un sistema cuyo diseño se propone, se puede entonces determinar si satisface o no los requisitos de su funcionamiento. En caso de que no los satisfaga, es fácil cambiar los parámetros del diseño en la simulación para ver

si con ello se alcanza la meta deseada. Si aún así no se consigue dicha meta, la simulación sirve para indicar un rediseño que, a su vez, probablemente también se podrá simular.

Cabe señalar que, si bien la simulación es un arma muy poderosa, no resuelve el problema inicial de conceptualización, ni el de implementación del sistema, mismos problemas que cuya solución dependen de la imaginación, conocimientos y experiencia del diseñador, ingeniero y así como de los técnicos que intervendrán en la realización del proyecto. [10]

#### **2.4.1 Modelación en forma matemática.**

Los fenómenos o sistemas dinámicos se pueden representar frecuentemente por medio de ecuaciones diferenciales ordinarias y, en muchos casos, con gran fidelidad. El miembro izquierdo de la ecuación de la ecuación diferencial en su forma normal, representa el mecanismo de respuesta del sistema. El miembro derecho se refiere a la entrada o excitación del sistema. Nos referimos a sistemas continuos pero cuyas entradas pueden ser continuas o discontinuas.

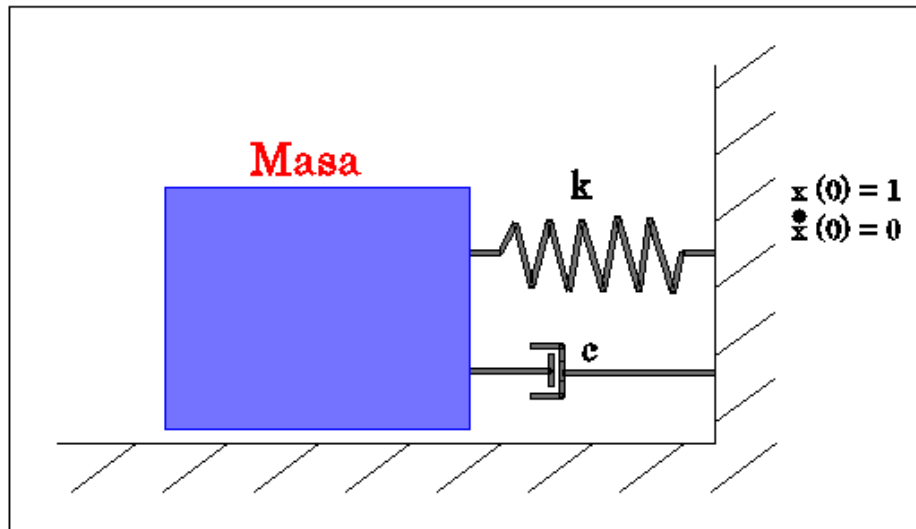
El mecanismo de respuesta del sistema se representa mediante una relación de las coordenadas y sus derivadas. Para simplificar la formulación conviene utilizar en la misma el mínimo número de coordenadas, es decir, el correspondiente a los grados de libertad. El conjunto de dichas coordenadas y sus derivadas, excepto las de más alto orden constituyen las variables de estado.

En el problema de simulación se conoce además la configuración inicial del sistema, es decir el valor inicial de las variables. Para accionar un sistema dinámico se requiere violar su estado de equilibrio [10]

Se distinguen dos maneras de implementar dicha violación:

1. Mediante una configuración inicial que satisfaga las condiciones de equilibrio. En tal caso, el sistema actuará para restablecerlo.
2. Mediante la aplicación de un agente externo cuyas características son función del tiempo y que, por lo tanto, alteran el equilibrio durante el transcurso del proceso dinámico. La aplicación de dicho agente constituye la excitación del sistema.

Un sistema sin excitación se denomina libre, mientras que un sistema con excitación se denomina forzado. El mecanismo de respuesta del sistema tiene ciertas características constantes que se denominan parámetros.

**Ejemplo 1:**

**Figura 2. 3** Ejemplo 1. Sistema masa-resorte-amortiguador.

Para establecer el modelo matemático del sistema masa-resorte-amortiguador que se presenta en la Figura 2.3 debemos tener en consideración la coordenada referente al único grado de libertad que es  $x$ , el desplazamiento de la masa. El mecanismo de respuesta se puede describir de acuerdo a la segunda ley de Newton que liga las fuerzas actuando sobre el sistema a las aceleraciones resultantes. Por lo tanto, la más alta de las derivadas que aparecen en la ecuación diferencial o modelo será la aceleración o  $\ddot{x}$ .

Recurriendo al diagrama de cuerpo libre para establecer el modelo del mecanismo de respuesta se tiene:

$$\begin{aligned}
 \sum F_x &= m a_x \\
 -c\dot{x} - kx &= m\ddot{x} \\
 \therefore m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

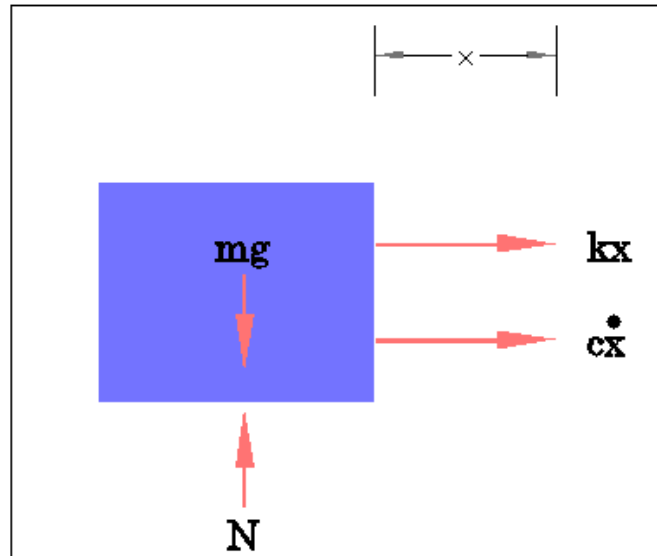


Figura 2. 4 Ejemplo 1. Diagrama de cuerpo libre.

Este es un sistema libre puesto que el miembro derecho es nulo y tiene un desplazamiento inicial

$$x(0) = 1$$

por lo que el sistema accionará para volver eventualmente a su posición de equilibrio

$$x = 0$$

Así pues el modelo matemático completo está dado por la ecuación diferencial de movimiento

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (2.8)$$

los parámetros del sistema son:

$m$  = masa en movimiento.

$c$  = constante del amortiguador.

$k$  = constante del resorte.

Y las condiciones iniciales

$$x(0) = 1$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

### Ejemplo 2:

Consideremos ahora que el sistema está sujeto a una fuerza externa que esta en función del tiempo  $f(t) = F \sin \omega t$  (ver Figura 2.5) y que las condiciones iniciales son  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ .

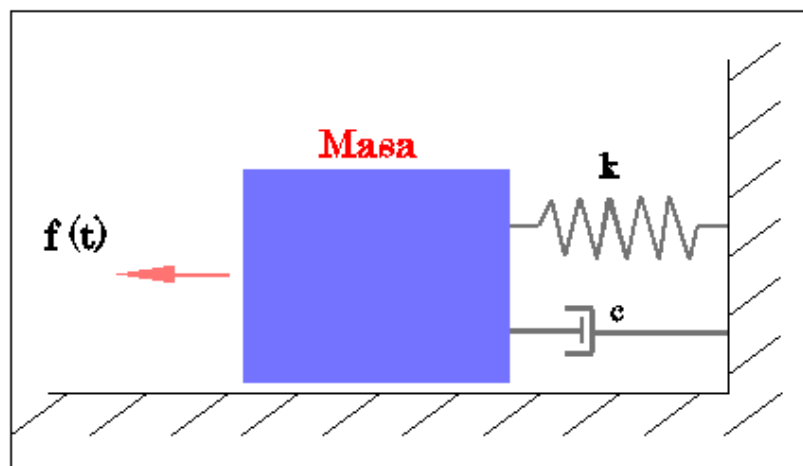


Figura 2. 5 Ejemplo 2. Sistema forzado.

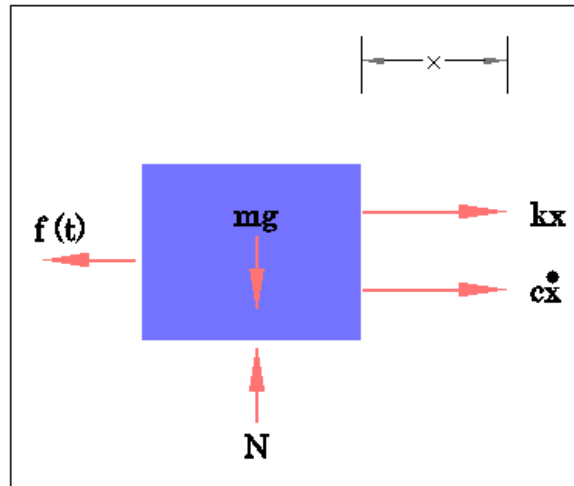


Figura 2. 6 Ejemplo 1. Diagrama de cuerpo libre.

Aplicando la segunda ley de Newton de acuerdo al diagrama de cuerpo libre de la Figura 2.6, se tiene:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m\ddot{x} \\ -cx - kx + f(t) &= m\ddot{x} \end{aligned} \quad (2.9)$$

que en su forma normal es:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (2.10)$$

por lo que ahora se tiene en el lado izquierdo la representación del mecanismo de respuesta y en el derecho la excitación.

El modelo matemático completo está constituido por:

1. Ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \text{sen } \omega t \quad (2.11)$$

2. Los parámetros del mecanismo de respuesta:

$m, c, k$  que ya se definieron.

3. Los parámetros de excitación:

$F =$  Amplitud de la fuerza de excitación.

$\dot{u} =$  frecuencia circular de la fuerza de excitación.

4. Las condiciones iniciales:

$$x(0) = 0$$

$$\dot{x}(0) = 0$$

Nótese que, gracias a la excitación, el sistema actuará a pesar de comenzar en la posición de equilibrio. La respuesta de un sistema dinámico depende de su mecanismo de respuesta así como de la forma en que es impulsado, es decir las condiciones iniciales a que está sujeto y a su excitación. La respuesta referente a las condiciones iniciales se llama transitoria porque para un sistema libre con amortiguamiento, dicha respuesta cesa al reestablecerse el equilibrio. La respuesta estabilizada a una excitación periódica se llama de estado permanente porque, en general, se considera que dicha excitación se mantiene durante un tiempo suficientemente largo para establecer un régimen en la respuesta después de que hayan desaparecido los efectos de las condiciones iniciales.

Se distinguen dos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, a saber: lineales y no lineales. Una ecuación diferencial es lineal si su miembro izquierdo está compuesto por términos cada uno de los cuales es o bien una variable dependiente o una derivada elevada al primer grado multiplicada por un coeficiente que puede ser constante, o bien función variable independiente. [10]



### **2.4.2 Modelación por medio de simuladores.**

Como ya se mencionó, los dos elementos: mecanismos de respuesta y excitación se representan en el modelo matemático mediante una ecuación diferencial. La respuesta o solución se obtiene de la integración de dicha ecuación. Así pues, la simulación matemática de los fenómenos dinámicos consiste esencialmente de una o varias integraciones. La integración frecuentemente se puede efectuar analíticamente y, si esto se logra sin grandes dificultades, que naturalmente es de preferirse. Sin embargo, en un gran número de casos de importancia práctica no existe la solución analítica o es muy difícil de obtener, por lo que hay que recurrir a algún tipo de simulación de sistemas que se representan por ecuaciones diferenciales no lineales.

Es por ello para la realización de ésta tesis se hará uso del software Algor, que permitirá la solución de forma confiable, y sobre todo fidedigna. [10]

### **2.5 Progreso y evolución del método y análisis del elemento finito.**

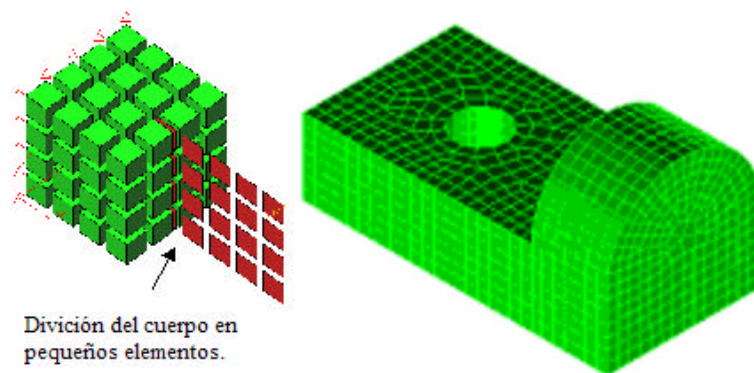
Como se mencionó anteriormente, para realizar el análisis de una pieza de interés, por medio del método de los elementos finitos, se necesita de complejos métodos para tener un resultado apegado a la realidad, mismo que consiste en la división del cuerpo, generar ecuaciones que representen el comportamiento de dicho cuerpo, al mismo tiempo que resolver de forma simultánea las ecuaciones para poder obtener información del comportamiento del cuerpo, y sobre todo poder predecir de alguna forma lo que sucederá.

Todo ello requirió de un gran esfuerzo para poder resolver este tipo de problemas, y conforme se desee un resultado más apegado a la realidad, mayor será el grado de complejidad en la solución del problema, es por ello que con el avance de la tecnología se desarrollaron poderosas herramientas para ayudarnos a resolver éste tipo de problemas, claro que el problema requirió de personas que tuvieran gran conocimiento en programación y elementos finitos para poder ser capaces de representar nuestro problema ahora en forma de códigos y no de ecuaciones, para poder introducir los datos a las computadoras y con ellas poder resolver el gran número matrices generadas para la solución de un problema, algunos de los programas encargados de resolver este tipo de problemas son: ARIES, NASTRAN, PATRAN, ALGOR, MECHANICAL DESKTOP, entre otros; gracias a estos programas podemos analizar diferentes eventos y así poder obtener grandes avances en las diferentes ramas de la ingeniería.

Uno de los avances más notables que existió dentro de análisis de los elementos finitos, es que por medio de las computadoras y del sistema de coordenadas cartesianas se podemos dividir nuestro problema de tal forma que podamos generar un sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas en lugar de las ecuaciones diferenciales [3]. Es decir, en lugar de resolver el problema para todo el sistema, en una sola operación, formulamos ecuaciones para cada uno de los elementos en los cuales fue descompuesto y los combinamos para obtener la solución de todo el cuerpo.

## 2.6 Como trabaja el método de los elementos finitos.

Para poder entender de forma clara como es el estudio del método de los elementos finitos, podemos representarlo por medio de un cuerpo que se analiza como un ensamble de bloques discretos o elementos. La aplicación de dicho método consiste principalmente en realizar las divisiones en un número y forma que permitan un análisis óptimo.



**Figura 2. 7** Discretización de cuerpos para un mejor análisis. La figura de la derecha muestra las fronteras de los nodos, y la figura de la derecha muestra la discretización de un cuerpo.

Cada bloque es analizado independiente de los demás y se unen únicamente por medio de los nodos formando una malla como se muestra en la Figura 2.7. El número de elementos que componen nuestra malla está determinado principalmente por la capacidad de la computadora con la cual se esté realizando el análisis del problema y el grado de exactitud que se deseemos obtener.

Para poder dar una explicación en la solución de problemas de tipo estructural, podemos decir que este tipo de soluciones se basan en poder determinar los desplazamientos en cada nodo, al igual que los esfuerzos generados entre cada elemento para conformar toda la estructura sujeta a las diferentes fuerzas aplicadas, pero cabe mencionar que si los problemas a analizar nos son de tipo estructural, las variables nodales pueden ser otras, tales como: la temperatura, presión u otras características de cada problema.

En la actualidad todo éste tipo de problemas es realizado por diferentes programas de computadoras, por lo que ya no es una limitante no tener un amplio conocimiento en la solución de métodos numéricos, sin embargo, es conveniente tener la base de los conocimientos para poder tener una noción, de cómo se resuelven este tipo de problemas y sobre todo poder tomar decisiones prudentes con respecto los resultados de dichos problemas.

Debido a que en el mercado existen gran cantidad de paquetes que permiten la utilización de los elementos finitos para la solución de problemas, lo que debemos tener muy en claro es que antes de iniciar el análisis debemos: entender el comportamiento básico de nuestro cuerpo a modelar, los datos que el paquete requiera para poder llevar a cabo su procesamiento, al igual que comprender y entender las técnicas de modelado para que así podemos tener una gran aproximación a nuestro cuerpo de estudio; pero sin importar el paquete que utilicemos debemos seguir pasos similares para ingresar los datos, y así poder obtener resultados confiables y coherentes.

## **2.7 Pasos de procesamiento.**

El método de los elementos finitos tiene tres niveles de actividad: [2]

1. Pre procesamiento.
2. Análisis.
3. Post procesamiento.

### **2.7.1 Pre-procesamiento.**

Este nivel del procesamiento incluye todas las actividades de modelado del problema e ingreso de datos, tales como: coordenadas de los nodos, conexión entre los nodos, condiciones de frontera, cargas aplicadas, propiedades de material y de los elementos, entre otros. Si bien este paso podemos realizarlo dentro del mismo paquete de análisis, generalmente se utiliza un paquete de CAD para generar la estructura o cuerpo de estudio, ya que ofrece mejores herramientas en el dibujo y modelado del mismo, claro que el uso adecuado de estas herramientas dependerá de la destreza y experiencia del usuario para determinar cada una de las simplificaciones que deben de introducirse para representar el cuerpo de interés, también es muy importante elegir el tipo y tamaño de los elementos que componen nuestro mallado. El resultado final de éste paso es un archivo de datos en el cual se le especifica al programa lo que debe de realizar y con que debe trabajar. [3]

### **2.7.2 Procesamiento.**

En este nivel se realiza una evaluación del modelo para verificar que no haya ningún error en el archivo generado en el nivel anterior y después dentro de éste nivel se realizan la generación de las ecuaciones necesarias para la solución del problema, de las que sobre sale la matriz de rigidez, su modificación y solución se obtiene mediante la evaluación de las variables nodales.

También aquí se generan las cantidades de derivadas, así como los gradientes y esfuerzos; pero no son presentados sino hasta la siguiente etapa. Este nivel es completamente transparente y restringido para el usuario de programas de análisis de elementos finitos, a menos que se realice de forma manual.

### **2.7.3 Post-procesamiento.**

En éste nivel se incluye la presentación de los datos generados en los niveles anteriores, tales como, las deformaciones, distribuciones de esfuerzos, temperaturas, etc. Generalmente los resultados son tabulares y enriquecidos con una simbología de colores, la cual nos permite apreciar los valores máximos y mínimos de nuestro cuerpo.

El pre-procesamiento y el post-procesamiento deben realizarse con mucho cuidado, ya que llegan a ser un poco tediosos y por tal motivo pueden surgir errores tipográficos casi imperceptibles para nosotros pero muy graves en el resultado de nuestro problema, ya que un pequeño error puede significar un problema totalmente diferente al que deseamos analizar. Una vez que se han concluido los pasos anteriores llega el momento más

importante que es: de la interpretación de los resultados obtenidos; y es donde aplicamos todos los conocimientos de ingeniería adquiridos en nuestra preparación y sobre todo la experiencia adquirida hasta ese momento. Debemos entender que este paso es verdaderamente importante, ya que debemos hacer un análisis muy profundo de los resultados obtenidos, para poder determinar si son lógicos y congruentes, y de no ser así, podemos asumir que la modelación realizada no fue totalmente adecuada, y debemos tratar de realizar una nueva valoración del problema, para con ello poder tener una modelación adecuada.

## **2.8 Requerimientos del modelado.**

Todos los programas de métodos finitos requieren por lo menos algunos de los siguientes aspectos: [1]

Una definición completa de la geometría, así como el tipo de elemento que va a componer nuestra malla.

- Especificación de las propiedades de frontera.
- Especificación de las condiciones y restricciones de desplazamiento.
- Especificación de las fuerzas y momentos a las que este sometido.

Estos datos son propios de un análisis de esfuerzos de tipo lineal. En caso de tratarse de un análisis diferente, como puede ser: térmico, de fluidos u otro; se tendrá que definir los parámetros adecuados y equivalentes al problema a analizar.

### **2.8.1 Definición de la geometría.**

Para describir la geometría, ésta debe estar en términos de nodos y elementos. Los nodos están definidos en términos de coordenadas ya sean cartesianas, cilíndricas, polares u otras; y los elementos están definidos por medio de los nodos que los unen.

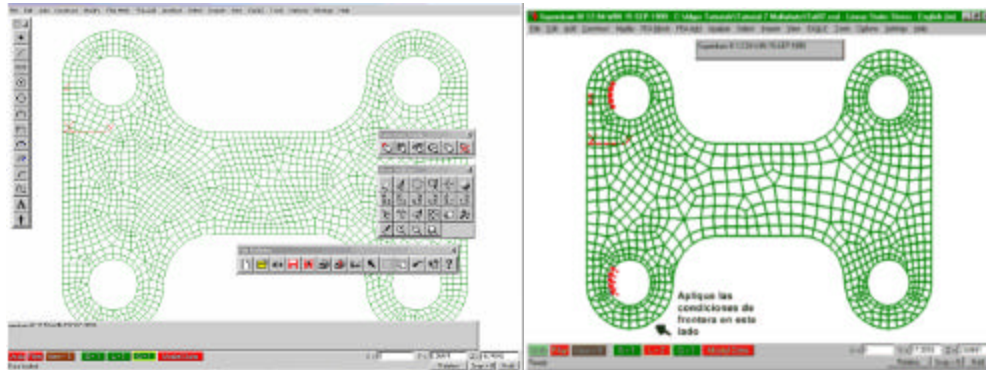
Para obtener mejores resultados es preferible que el programa realice una división automática de los cuerpos a analizar, así como emplear un mayor número de nodos en las zonas más importantes y donde las fuerzas son aplicadas para obtener un mejor análisis y evitar que nuestro modelo quede incompleto o con huecos en la malla, por la omisión de algún elemento o la falta de nodos.

El método de los elementos finitos no tiene ningún tipo de unidades de medición predefinido, por lo tanto, es responsabilidad del cada usuario considerar la consistencia de las mismas, adoptar un sistema de unidades en particular y mantenerlo por el resto del análisis. Es conveniente adoptar un sistema como el internacional o el inglés sin mezclar uno con otro.

El número de nodos y su distribución depende del tipo de elemento, pero es importante recalcar que entre más nodos tengamos, los resultados serán más exactos, pero también requeriremos de mayores recursos de nuestros sistemas de cálculo, además una mala organización o modelación de los elementos y nodos puede resultar en una



deformación sustancial de nuestro modelo, y por ende, un análisis poco confiables, ver Figura 2.8.



**Figura 2. 8** Para poder obtener buenos resultados en nuestro análisis, debemos realizar una buena discretización y mallado de nuestros cuerpos. Como se muestra en la figura de la izquierda tiene una malla más densa, en comparación de la figura de la derecha.

### 2.8.2 Definición de las propiedades del material.

Independientemente del tipo de análisis que realicemos es muy importante especificar las propiedades del material, en el análisis de deformaciones, se requiere de datos como el módulo de Young y de la razón de Poisson para calcular las deformaciones y la rigidez. Además en los casos dinámicos se necesita también de la densidad del material para poder evaluar la inercia y centro de gravedad. En cuerpos como barras, vigas y placas no solo necesitamos datos como los anteriores, sino que necesitaremos de datos más específicos tales como especificar: la sección transversal, áreas y momentos de inercia, para poder modelar muy reales y así obtener resultados congruentes, pero algo en lo que debemos ser muy cuidadosos es en la consistencia de unidades para poder llegar a datos congruentes.

Generalmente los programas cuentan con su propia biblioteca de materiales disponibles, pero hay que verificar que el material se encuentre dentro de la misma, o de lo contrario en la mayoría de los programas existe la posibilidad de introducir los datos y valores necesarios, por lo cual es una gran ventaja trabajar con un programa de métodos de los elementos finitos.

### **2.8.3 Restricciones de desplazamiento y condiciones de frontera.**

Los cuerpos a modelar deben estar restringidos en su movimiento en al menos un punto para prevenir un movimiento de cuerpo rígido. No es recomendable un equilibrio de fuerzas, ya que es muy difícil lograrlo una vez que las deformaciones tomen lugar o puede haber un error de redondeo o truncado por parte de la computadora que genere una fuerza no equilibrada, a menos que el resultado del movimiento sea uno de los datos a buscar como en el caso de simulación de eventos.

Sin embargo ahí entran otras consideraciones que explicaré con mayor detalle más adelante. Asimismo debemos tener mucho cuidado de no restringir en exceso el problema, ya que puede distorsionarlo con la presencia de esfuerzos locales muy grandes e incluso llegar a ser irreales.

Las restricciones en los nodos pueden ser de uno a seis grados de libertad, considerando los tres posibles movimientos de desplazamiento y rotaciones en el espacio. La restricción de los seis grados de libertad representa un empotramiento, mientras que restringir sólo un grado de libertad representa que esta sobre ruedas. En caso de que solo los desplazamientos estén restringidos, representa una sujeción por afianzadores.

Existen una gran variedad de restricciones de movimiento, con lo que podemos tener también una gran variedad de problemas y resultados diferentes, es por eso que debemos representar la realidad del problema que tenemos y procurar el mínimo de restricciones de movimiento posibles.

#### **2.8.4 Fuerzas aplicadas.**

Sin importar cómo introducimos las fuerzas al modelo de malla, éstas son descompuestas y aplicadas en los puntos nodales correspondientes. Podemos tener diversos tipos de cargas, por ejemplo: las fuerzas aplicadas directamente en los nodos, fuerzas distribuidas (presión) y fuerzas de contacto. Las fuerzas pueden descomponerse en sus componentes de dirección y ser afectadas en su sentido por el signo del vector.

Para el caso de fuerzas distribuidas y de contacto se recomienda emplear una discretización con elementos pequeños en las zonas de las fuerzas para tener resultados más fidedignos. Además de esto, se debe escoger el tipo de elementos con los que se planteará el problema. Los diferentes elementos se describen a continuación.

#### **2.9 Tipos de elementos.**

En los paquetes de aplicación del FEM así como en los análisis prácticos se debe optar por algún tipo de elemento dependiendo de las restricciones de frontera, el tipo de carga y el

elemento original a analizar. Para ello se describen a continuación los más usuales dentro de la ingeniería.

### **2.9.1 Barra tipo armazón.**

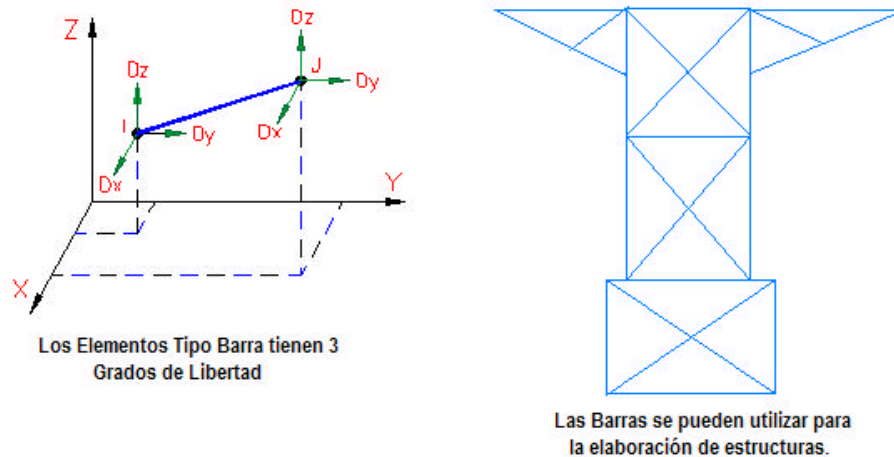
Las barras son elementos de dos nodos que se pueden orientar arbitrariamente en el plano  $x$ ,  $y$ , o  $z$ . Estos transmiten únicamente fuerza axial y en general tienen tres grados de libertad (tres componentes de traslación globales). Por definición, no tienen grados de libertad de rotación. Las barras se emplean para modelar estructuras como torres, puentes y edificios ver Figura 2.9.

Los elementos tridimensionales del tipo de las barras son modelados con área constante y se pueden ser emplear en análisis de tipo elástico, no linear y de grandes desplazamientos geométricos.

El comportamiento elástico de tipo lineal está definido por el módulo de Young.

Los elementos de tipo barra pueden también ser empleados como condición de frontera si se les asigna un valor de rigidez muy elevado.

- La longitud del elemento es mucho mayor que su ancho entre 8 y 10 veces.
- Está conectado al resto del modelo con uniones que no transmiten momentos.
- Las fuerzas externas son aplicadas únicamente en los nodos o en las articulaciones.



**Figura 2.9** Elemento tipo barra.

### 2.9.2 Elementos de viga.

Las vigas son elementos que ofrecen resistencia tanto a fuerzas como a momentos. Las vigas son empleadas en torres de transmisión eléctrica, puentes y marcos.

La diferencia principal entre una barra y una viga, es que ésta última soporta momentos, tanto torzor como flexor.

Estos elementos son formulados en espacio tridimensional y tiene tres nodos. El nodo extra (nodo k) se usa arbitrariamente para orientar cada viga en el espacio. Tiene un máximo de tres grados de libertad de traslación y tres de rotación. Para cada elemento se calculan dos fuerzas cortantes y una axial, así como un momento de torsión y dos de deflexión. También se calculan opcionalmente los esfuerzos obtenidos debido a la combinación de carga axial y momentos de flexión.

Los elementos básicos de las vigas son las fuerzas de inercia uniformes en sus tres componentes, los empotramientos y las cargas intermedias. Casi todas las vigas tienen un

eje fuerte y uno más débil para resistir los momentos, por lo que es necesario el nodo  $k$ , para especificar correctamente de que caso se trata ver Figura 2.10.

Para emplear correctamente las vigas, a continuación hay una guía:

- La longitud del elemento es mucho mayor que su ancho.
- El elemento es constante en su sección y en sus propiedades.
- El elemento debe ser capaz de transferir momentos.
- El elemento debe ser capaz de manejar cargas distribuidas en su longitud.

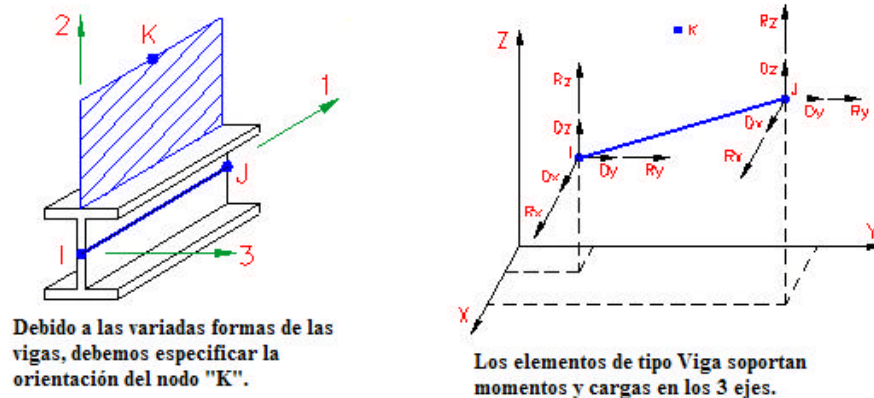
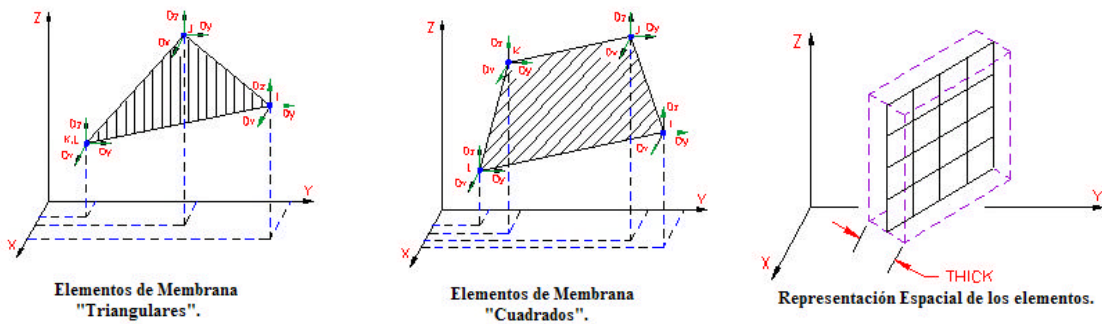


Figura 2. 10 Elemento tipo viga.

### 2.9.3 Elementos de membrana.

Los elementos de membrana son elementos formados por tres o cuatro nodos en tres dimensiones. Estos elementos se emplean para modelar objetos como redes o tejidos ver Figura 2.11.

Estos elementos simulan sólidos de un grosor específico que no muestra esfuerzos normales al contrario. Las membranas por definición no tienen grados de libertad de rotación pero tiene todos los grados de traslación necesarios. Como únicamente se formula la rigidez del plano, solo se admiten cargas en el mismo plano que la membrana [6].



**Figura 2. 11** Elementos tipo membrana.

Las membranas se emplean cuando:

- El grosor del elemento es muy pequeño comparado con su longitud o su ancho.
- El elemento so tendrá ningún esfuerzo normal al grosor.

### 2.9.4 Elementos elásticos de dos dimensiones.

Estos elementos son formados por tres o cuatro nodos. Se emplean para analizar objetos como rodamientos y empaques o estructuras como presas. Estos elementos sólo tienen dos grados de libertad de traslación y no tienen ningún grado de libertad de rotación. Estos elementos deben estar siempre paralelos al plano YZ, ver Figura 2.12 y 2.13. [6]

Se emplean estos elementos cuando:

- Se desea modelar una sección transversal de un componente.
- Se puede dibujar el modelo en el plano YZ.
- No hay deformaciones en el componente X, en dirección del ancho aunque puede haber esfuerzos en esa dirección, por ejemplo en una prensa.

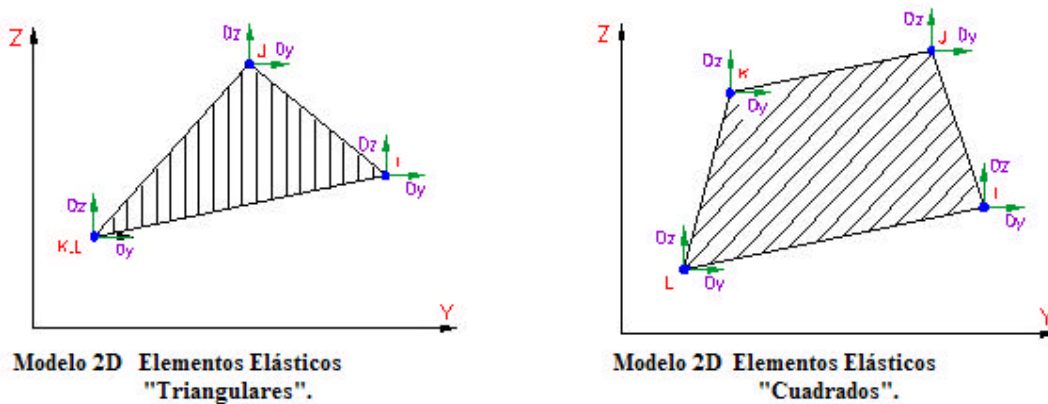
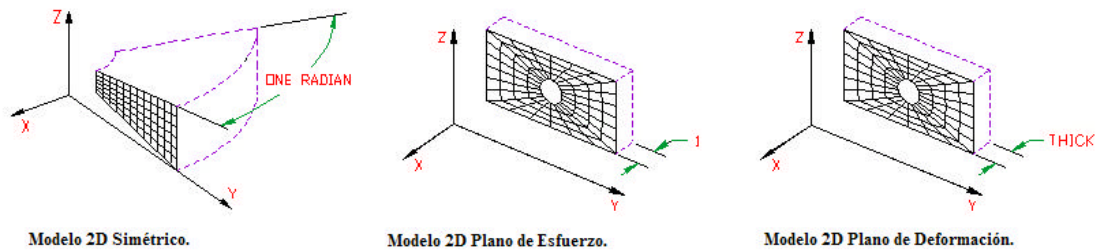


Figura 2. 12 Diferentes formas de los elementos elásticos.





**Figura 2.13** Elementos elásticos de 2 dimensiones.

### 2.9.5 Elementos de tipo bloque o ladrillo.

Los elementos de tipo bloque tienen seis u ocho nodos que forman caras en tres dimensiones. Para los bloques básicos sólo se emplean materiales isotrópicos. Los bloques se emplean para modelar objetos como ruedas y aspas de turbina. También hay bloques reforzados con la habilidad de incorporar nodos intermedios y una gama más amplia de materiales [6].

Los bloques por definición no tienen ningún grado de libertad de rotación, y emplean los tres de traslación. Se han desprendido varias versiones de estos bloques con 4, 5, 6, 7 u 8 nodos, para facilitar el análisis de esfuerzos y vibraciones ver Figura 2.14.

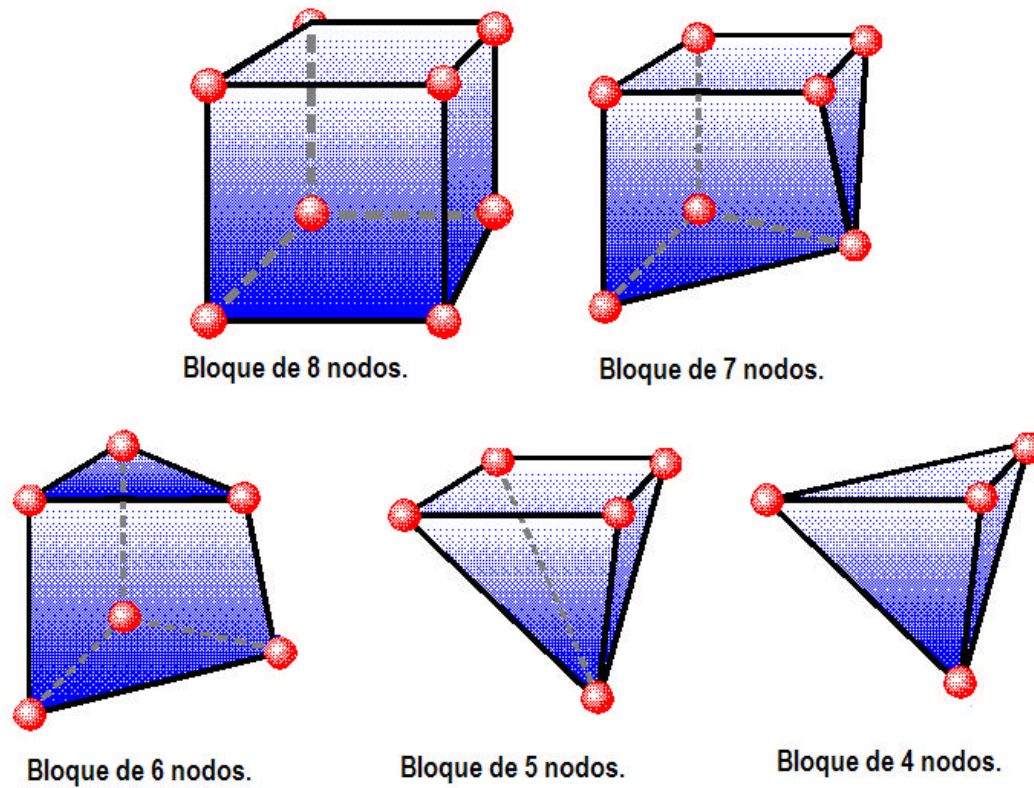


Figura 2. 14 Elementos tipo ladrillo o bloque.

Los bloques se emplean cuando:

- Se desea conocer el resultado de esfuerzos alineados al grosor.
- Solo hay fuerzas aplicadas en el modelo y no hay momentos.
- El modelo tiene una fuerza hidrostática aplicada.

### 2.9.6 Elementos tipo placa.

Este tipo de elementos sirven para modelar placas como automotrices o contenedores de pared delgada. Son elementos de 3 o 4 nodos en 3 dimensiones. Los elementos tipo placa tienen por definición grados de libertad de rotación normales a las restricciones. Se pueden emplear tantos grados de libertad de rotación y desplazamiento como sean necesarios. Soporta también fuerzas nodales, momentos, presión normal a la superficie, gravedad y fuerzas centrífugas, entre otras.

Las placas se emplean cuando:

- El ancho del elemento guarda una relación con el largo de aproximada de  $1/10$ .
- El desplazamiento es pequeño.
- El elemento permanece plano.
- La distribución de esfuerzos es lineal.
- No hay rotación en la dirección normal al elemento,

Además de estos elementos básicos, existen otros elementos diferentes con funciones de elementos guía o de contacto, elementos de transición para cambiar de uno a otro como los tetraedros de 4 y 10 nodos y muchos otros.

Es importante recalcar que la decisión de modelado, colocación de fuerzas, tipo de elemento y además detalles en los que se basa el método de los elementos finitos es responsabilidad el usuario, y una mala decisión del mismo sólo llevara a resultados

infructuosos y erróneos. La selección adecuada de los tipos de elementos y el método de resolución puede incrementar o simplificar el tiempo de proceso de resolución y generar resultados claros y confiables.