

CAPITULO III

DISEÑO CONCEPTUAL Y ALTERNATIVAS DE SOLUCIÓN DEL BANCO DE MEDICIÓN PARA INVESTIGAR LAS PROPIEDADES ELÁSTICAS DE LOS MATERIALES

III.1 PENDULO TORSIONAL

La figura 3.1 muestra un disco que tiene un momento polar de inercia de masa de J_0 , montado en uno de los extremos de una flecha cilíndrica sólida que está fija en el otro extremo. Si la rotación angular del disco sobre el eje es θ (así como la torsión del eje), G es el módulo de cortante, l es el largo del eje y T es el torque que produce la torsión θ ; se tiene de la teoría de torsión de ejes circulares que:

$$T = \frac{GJ_0}{l} \theta \quad (3.1)$$

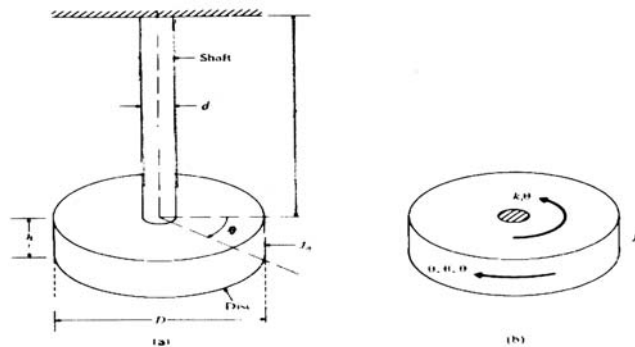


Figura 3.1 Péndulo Torsional

Donde:

$$I_o = \frac{\pi d^4}{32} \quad (3.2)$$

es el momento de inercia polar del corte transversal del eje y d su diámetro.

Cuando el disco rota θ grados desde su posición de equilibrio, el eje provee un torque de retorno de magnitud τ . De esta manera el eje actúa como un resorte torsional con una constante torsional de resorte de:

$$k_t = \frac{\tau}{\theta} = \frac{GI_o}{l} = \frac{\pi G d k^4}{32l} \quad (3.3)$$

Derivando la ecuación del movimiento angular del disco sobre su eje y usando la Segunda ley de movimiento de Newton se obtiene:

$$I_o \ddot{\theta} + k_t \theta = 0 \quad (3.4)$$

Si se reemplaza el momento polar de inercia de masa J_o , el desplazamiento angular θ , y la constante torsional de resorte k_t , por la masa m , el desplazamiento x , y la constante lineal de resorte k respectivamente, entonces se tiene que la frecuencia natural circular del sistema torsional es:

$$\omega_n = (K_t/I_o)^{1/2} \quad (3.5)$$

y el período y la frecuencia de vibración en ciclos por segundo son:

$$\tau_n = 2\pi \left(\frac{I_o}{K_t} \right)^{1/2} \quad (3.6)$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_t}{I_o} \right)^{1/2} \quad (3.7)$$

El momento polar de inercia de masa está dado por:

$$I_o = \frac{\rho h \pi D^4}{32} = \frac{W d^2}{8g} = \frac{m D^2}{8} \quad (3.8)$$

donde ρ es la densidad de la masa, h es el grosor, D es el diámetro, y $W=mg$ es el peso del disco.

MOMENTO DE INERCIA

Determinación del momento de inercia de una barra rectangular cuando gira con respecto a un eje perpendicular a su longitud que pasa por su centro de masas.

Se tiene un péndulo de torsión formado por un cable de acero de longitud L y diámetro d ($d \ll L$) dispuesto verticalmente, con el extremo superior fijo, y el extremo inferior unido al punto medio de un disco delgado de masa M y radio R (fig. 3.2).

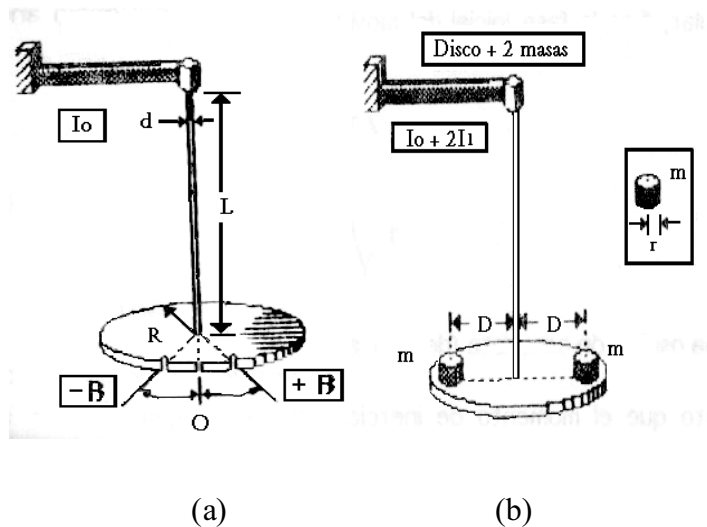


Figura 3.2 Péndulo Torsional

Si se aplica un torque que haga rotar el disco un ángulo β (en la figura $\beta = _$) con relación a su posición de equilibrio, se producirá en el alambre, debido a su elasticidad, un torque τ en sentido contrario a la rotación, que tenderá a restablecer la posición inicial.

Dentro de los límites de validez de la Ley de Hooke, este torque restaurador, es

proporcional al ángulo θ y se puede expresar como:

$$\tau = -k\theta \quad (3.9)$$

Donde k es la constante de torsión del alambre, que depende del material y de la geometría del mismo. Si se conoce k , se puede calcular el módulo de torsión G del material, el cual no depende de la muestra que se use. El módulo de torsión, para un alambre es igual a:

$$G = \frac{32Lk}{\pi d^4} \quad (3.10)$$

Una vez que se libera el disco, después de haberlo girado un ángulo θ , el torque restaurador, produce oscilaciones armónicas simples en torno a la posición de equilibrio, entre $-\theta$ y $+\theta$ (fig. 3.2).

De la segunda ley de Newton se tiene:

$$\tau = I\alpha \quad (3.11)$$

donde I es el momento de inercia del disco respecto al eje de rotación, y la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (3.12)$$

Igualando (3.12) con (3.11)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I_0}\theta \quad (3.13)$$

Que es la ecuación diferencial de un movimiento oscilatorio armónico simple, una de cuyas soluciones es:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad (3.14)$$

Con θ_0 la amplitud angular de oscilación, ϕ la constante de fase inicial del

movimiento y ω la frecuencia angular, la cual se puede expresar en función del período T como:

$\omega = \frac{2\pi}{T}$. Si en la ecuación diferencial (3.13) se sustituye β por la expresión (3.14), se encuentra que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{I}}, \quad (c) \quad \text{y, en consecuencia: } T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} \quad (3.15)$$

Si se mide el período de oscilación, la relación (3.15) permite calcular I si se conoce k , y viceversa. Pero; si se quiere calcular ambos, se necesita otra ecuación que relacione las dos incógnitas. Esto se logra modificando el momento de inercia, y volviendo a medir el período de oscilación, para el nuevo momento de inercia.

Para modificar el momento de inercia, se agrega al disco dos cuerpos cilíndricos iguales de masa m y radio r , simétricamente colocados a una distancia D del eje de rotación (fig. 3.1 b). Si denotamos con I_0 al momento de inercia inicial, y con I_1 al momento de inercia de cada uno de los cuerpos, respecto del mismo eje de rotación, el nuevo momento de inercia I total, es:

$$I = I_0 + 2I_1 \quad \text{con} \quad I_1 = m\left(\frac{1}{2}r^2 + D^2\right) \quad (3.16)$$

Los períodos de oscilación para cada momento de inercia son:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{k}} \quad \text{y} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + 2I_1}{k}} \quad (3.17)$$

Con estas dos ecuaciones y sustituyendo I_1 por su valor, se tiene la relación:

$$I_0 = \left(\frac{T_0^2}{T^2 - T_0^2} \right) (r^2 + 2D^2) m \quad (3.18)$$

que permite conocer I_0 , en función de los períodos de oscilación, correspondientes a cada momento de inercia. Con la relación (e), se encuentra para el error relativo del momento de inercia I_0 :

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{2\Delta T_0}{T_0} + \frac{2T \Delta T}{(T^2 - T_0^2)} + \frac{2T_0 \Delta T_0}{(T^2 - T_0^2)} + \frac{2r\Delta r}{(r^2 + 2D^2)} + \frac{4D\Delta D}{(r^2 + 2D^2)} + \frac{\Delta m}{m} \quad (3.19)$$

De la ecuación (6) obtenemos para la constante de torsión del alambre:

$$k = 4\pi^2 \frac{I_0}{T_0^2} \quad \text{con un error relativo: } \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta I_0}{I_0} + 2 \frac{\Delta T_0}{T_0} \quad (3.20)$$

y de la ecuación (2), se deduce para el error relativo del módulo de torsión:

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta k}{k} + 4 \frac{\Delta d}{d}$$

(3.21)

III.2 BANCO CON PÉNDULO DE TORSIÓN SOSTENIDO EN DOS EXTREMOS

Para determinar el modulo de rigidez (G) en un banco con un péndulo de torsión que somete a una torsión la barra o probeta del material que se investiga, se deberá fijar un extremo de la barra o probeta a un lado fijo superior, y el otro extremo se deberá fijar a una masa de inercia, entonces se hará girar la masa con respecto a la vertical obteniéndose un periodo (figura 3.3).

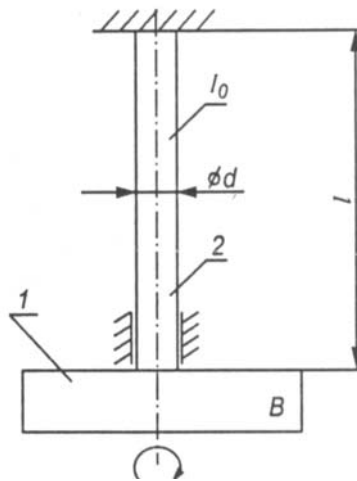


Figura 3.3 Péndulo torsional.

Pero podemos ver en la figura 3.3 que si no se tiene una sujeción en la parte de la masa de inercia se provoca un movimiento de flexión de la barra o probeta así que se usa un banco con un rodamiento en la parte inferior, donde esta la masa de inercia (figura 3.4).

Para medir el periodo de vibraciones se usa un frecuenciómetro, primero es necesario medir el periodo para masa inercial 1 y después para la masa inercial 2, obteniéndose 2 periodos. La masa inercial tiene un cambio de posición de un ángulo de $3^\circ \pm 5^\circ$, después del cambio de ángulo queda vibrando libremente.

Y se obtiene el periodo con la siguiente fórmula:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{Bl}{GI_o}} \quad (3.22)$$

Y para el periodo de vibración sin discos:

$$T_o^2 = 4\pi^2 \frac{B_o l}{GI_o} \quad (3.23)$$

Donde: T_o : Periodo inicial con masa inercial sin discos

B_o : Masa de Inercia, momento de inercia #1

l : Longitud de prueba de la probeta

I_o : Fórmula de inercia $I = \frac{\pi d_o^4}{32}$

d_o : Diámetro de prueba de la probeta

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(B_o + B)l}{GI_o} \quad (3.24)$$

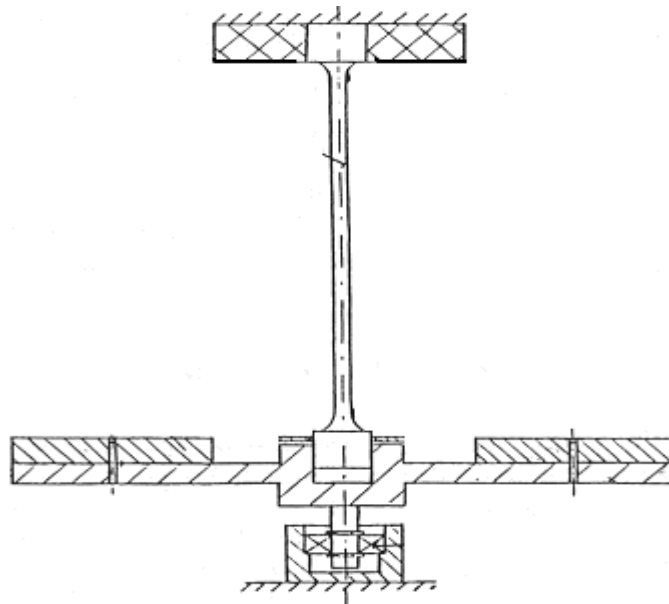


Figura 3.4 Esquema de banco para determinar G

Para sacar los momentos de inercia de los dos discos la fórmula es:

$$B = 2m \left[a^2 + \frac{d^2 + D^2}{8} \right] \quad (3.25)$$

Donde: M: masa del disco de inercia (son 2)

a: distancia del centro del disco al centro de la masa de inercia

d: diámetro de agujero de sujeción

D: diámetro del disco

La siguiente fórmula es para la base de las masas inerciales:

$$B_o = \frac{T_o^2 G I_o}{4\pi^2 l} \quad (3.26)$$

Y despejando G (modulo de rigidez) para una masa de inercia se tiene que:

$$G = \frac{4\pi^2 l B}{I_o (T^2 - T_o^2)} = \frac{128\pi l B}{d_o^4 (T^2 - T_o^2)} \quad (3.27)$$

Para cuando se usan las dos masas de Inercia la fórmula es:

$$G = \frac{128\pi l (B_2 - B_1)}{d_o^4 (T^2 - T_o^2)} \quad (3.28)$$

III.3 BANCOS COMERCIALES PARA ANÁLISIS DE TORSIÓN DE GUNT®

III.3.1.-APARATO PARA MEDIR TORSION DE BARRAS



Figura 3.5 Aparato para medir torsión de barras

Descripción:

Este banco es un juego de prácticas es un accesorio suplementario a la serie de ensayos SE 110 / SE 111. Con él se pueden examinar los principios básicos del esfuerzo por torsión. El juego de ensayo contiene para ello varias barras de prueba de latón con diferentes formas de corte transversal. Con un hilo de tracción sobre un rodillo estos se cargan con pesas con momentos. Con ayuda de dos escalas desplazables puede leerse el ángulo de torsión en cualquier punto a lo largo de la vara. Dos mandriles de sujeción permiten cambiar rápida y sencillamente las barras de prueba. La construcción robusta del juego de prácticas permite el uso en ensayo de alumnos. Por sus medidas el aparato también puede aplicarse para fines de demostración.

Ensayos:

- Torsión de barras con diferente rigidez de torsión
- barra redonda con corte macizo
- tubo redondo
- tubo redondo, ranurado longitudinalmente
- tubo cuadrado

Especificaciones:

Barra redonda, barra de tubo,

tubo ranurado Ø6mm, Grosor de pared: 1mm

Tubo cuadrado: 6mm, Grosor de pared: 1mm

Arandela radio de eficacia: 110mm

Escala de ángulo: $\pm 90^\circ$, Graduación: 1°

LxAnxAI: 1250 x 220 x 900 mm.

Peso: aprox. 10 Kg.

Torsión de Barras

1 juego de prácticas completo, 4 barras de

prueba, 1 instrucciones de ensayo

III.3.2.- APARATO PARA MEDIR VIBRACIONES POR TORSIÓN

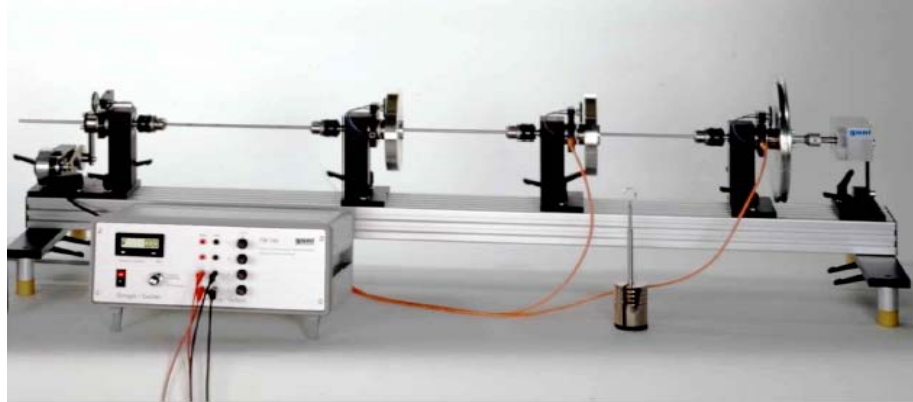


Figura 3.6 Aparato para medir vibraciones por torsión

Descripción:

Este equipo de mesa tiene la finalidad de hacer entender mediante experimentos sugestivos la torsión y vibraciones de torsión. También se han previsto igualmente ensayos demostrativos y prácticos. Elemento central del ensayo es una barra de torsión. En la misma pueden fijarse con ayuda de mandriles de sujeción discos de masa con diferentes valores de inercia. De esta forma es posible construir un sistema de vibraciones por torsión de hasta tres masas. Con una unidad excitadora eléctricamente alimentada desde la unidad de mando pueden forzarse vibraciones sobre las mismas. Un amortiguador regulable permite influir sobre éstas. Generadores de ángulos de giro en los mandriles de sujeción suministran como señal eléctrica la amplitud de las vibraciones. La unidad de mando procesa estas señales y las pone a disposición a fines de indicación; p. ej., con un osciloscopio bicanal.

Ensayos:

- Determinación de la resistencia a la torsión de una barra de acero.
- Determinación de los pares de inercia de masas

- Comportamiento de la extinción de la oscilación de vibraciones por torsión
- Determinación de la amortiguación en vibraciones por torsión
- Vibraciones por torsión forzadas, resonancia
- Sistema de vibraciones por torsión con varias masas, vibrador por torsión de dos masas, vibrador por torsión de tres masas
- Variado experimento de mesa sobre la resistencia a la torsión y vibraciones por torsión
- Estudio de vibraciones por torsión libre y forzada, resonancia y amortiguación
- Comportamiento de vibradores de dos y tres masas

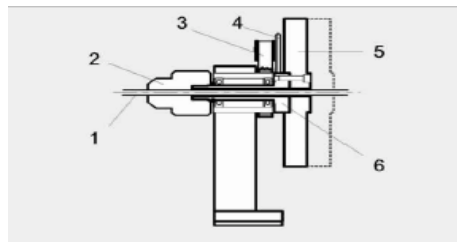
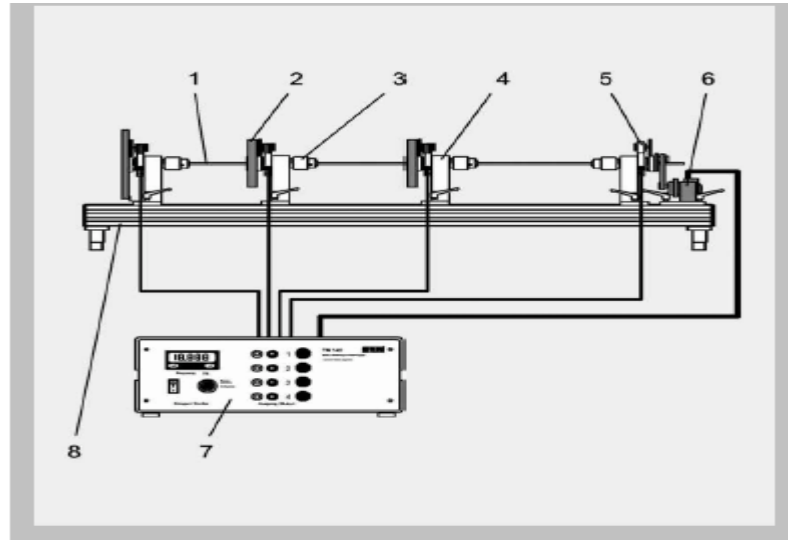


Figura 3.7 Mandril de sujeción

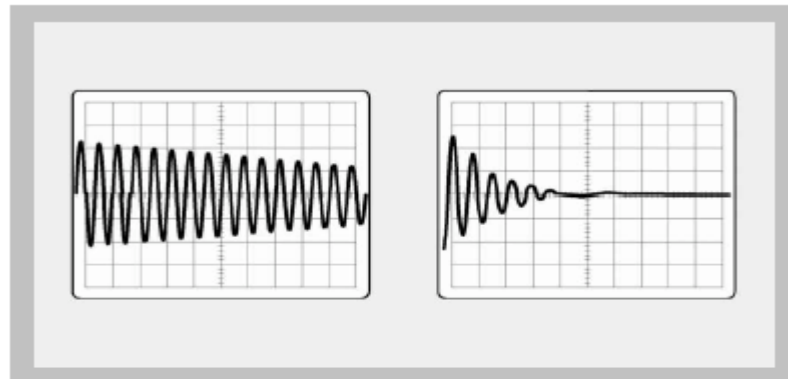
1 mandril de sujeción, 2 barra de torsión, 3 generador del ángulo de giro, 4 rueda de fricción, 5 volante de masa, 6 brida tres orificios sobre arrastrador con cojinete de bolas



1 barra de torsión, 2 disco de masa, 3 mandril de sujeción, 4 unidad de rodamiento, 5 registrador del ángulo de giro, 6 unidad de excitador, 7 unidad de mando, 8 bastidor básico

Figura 3.8 Diagrama de conexión

Ejemplo de una medición en el oscilador de torsión



La ilustración muestra a la izquierda el oscilograma de las vibraciones por torsión de una barra de torsión con disco de masa, ligeramente amortiguada. A la derecha se representa el oscilograma de la misma vibración con amortiguación más intensa.

Figura 3.9 Ejemplo de medición en el oscilador

Características:

- [1] Equipo para estudio de las vibraciones por torsión y resistencia a la torsión para ensayos demostrativos y prácticos
- [2] Bastidor básico de perfil de aluminio con pies de goma
- [3] Barra de torsión de acero, inoxidable, 1300mm, $\Delta 6$ mm
- [4] Discos de masas $\Delta 150$ mm y $\Delta 228$ mm

[5] Cuatro unidades de rodamiento sobre cojinetes de bolas, de libre disposición, con mandril de sujeción y brida de tres orificios

[6] Amortiguador de aceite cerrado 0,25...3.5Nm/rueda/s

[7] Excitador con manivela de accionamiento, amplitudes de excitación 1,4°; 1,8°; 2,4°; frecuencia 1...20Hz

[8] Cuatro registradores eléctricos del ángulo de giro, 0.03V/°

[9] Unidad de mando electrónica del excitador con indicador digital de la frecuencia, potenciómetro de 10 pasos y alimentación para el generador de ángulo de giro, 230V/50Hz

[10] LxAxAI 1400x410x400mm

La ilustración (fig. 3.9) muestra a la izquierda el oscilograma de las vibraciones por torsión de una barra de torsión con disco de masa, ligeramente amortiguada.

A la derecha se representa el oscilograma de la misma vibración con amortiguación más intensa.

Barra de torsión: 1300mm, Δ 6mm, acero inoxidable

Rigidez: aprox. 1,0Nm/rueda/m

Discos de masa:

Δ 150mm, aprox. 2,7kg

Δ 228mm, aprox. 4,8kg

Frecuencia de excitador: 1...20Hz

Coefficiente de amortiguador: 0,25...3,5 Nm/rueda/s

230V , ~50Hz

1 bastidor base, 4 unidades de rodamiento,
1 barra de torsión, 3 discos de masa,
1 excitador, 1 amortiguador de vibraciones,
1 unidad de mando, 1 instrucciones de ensayo

[1] Juego adicional al sistema de mesa

SE110/SE111, torsión de barras

[2] cuatro barras de prueba de latón,
barra redonda con sección transversal completa,
tubo, tubo ranurado, tubo cuadrado

[3]Radio de eficacia disco de torsión: $\varnothing 110\text{mm}$

[4]Esfuerzo con juego de pesas

[5]Escala de ángulo $\pm 90^\circ$, Graduación 1°

- Barras de torsión de latón con distintos cortes transversales
- Ángulo de torsión determinable en cualquier posición de barra

III.3.3.- APARATO PARA MEDIR OSCILACIONES DE TORSIÓN

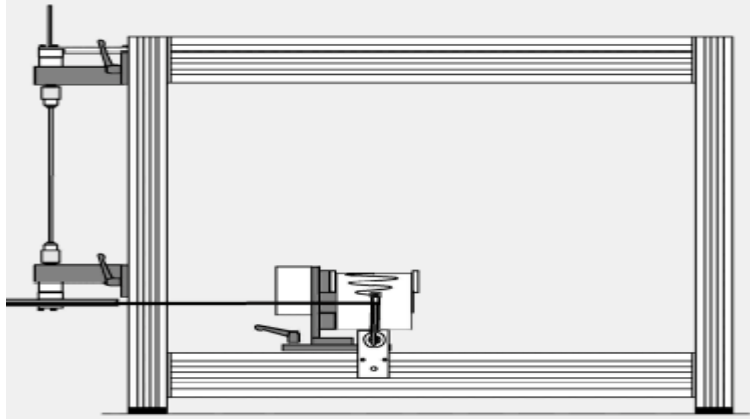


Figura 3.10 Aparato para medir oscilación de torsión

Descripción:

Como complemento al sistema de enseñanza sobre oscilaciones TM 150, este suplemento permite el tratamiento experimental de vibraciones por torsión. El equipo contiene tres varas de torsión de acero inoxidable de diferente rigidez. Con ellos pueden combinarse dos discos de masas de diferente peso. Mandriles rodados sobre cojinetes de bolas alojan cada uno en una brida una vara de torsión y un disco de masas. Un recipiente amortiguador cargado de aceite permite el ajuste de diferentes índices de amortiguación. Las desviaciones oscilantes de los discos de masas pueden registrarse con el rotulador del TM 150. Todos los componentes pueden montarse rápida y fiablemente en los perfiles ranurados del bastidor TM 150 con los elementos de fijación adjuntos.

Ensayos:

- Ensayo de oscilación la vibración por torsión para determinación de la frecuencia propia.
- Influencia de diferentes varas de torsión y masas giratorias sobre la frecuencia propia.
- Ensayos de oscilaciones con diferente intensidad de amortiguación.

Especificaciones:

[1] Ensayo complementario vibraciones por torsión al sistema de enseñanza sobre oscilaciones TM 150

[2] Varas de torsión Ø3mm, Ø5mm, Ø6mm, largo 900mm, acero inoxidable

[3] Discos de masa: Ø150mm, Ø228mm

[4] Mandril con cojinete de bolas Ø0.5...8.0mm

[5] Amortiguador abierto cargado de aceite

[6] Estructura LxAnxAI aprox. 250x250x1100mm

· Efecto de masa giratoria, resistencia a la torsión y medida de amortiguación sobre un vibrador por torsión

Varas de torsión: Ø3mm, Ø5mm, Ø6mm,

Largo 900mm, acero inoxidable

Discos de masa: pequeño Ø150mm con aprox.

2,7kg; grande Ø228mm con aprox. 4,8kg

Mandril: Ø0.5...8.0mm

Estructura del ensayo ensamblada

LxAnxAI: aprox. 250 x 250 x 1100mm

3 varas, 2 discos, 1 unidad rodamiento, 1 dispositivo de fijación, 1 amortiguador, instrucciones