

CAPITULO II
DESCRIPCION TEORICA DEL MODULO DE RIGIDEZ E HISTÉRESIS
MECÁNICA

II.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE ESFUERZOS

ESFUERZO:

Cuando un elemento de materia esta sometido a corte puro, el equilibrio requiere que se desarrollen esfuerzos cortantes iguales en las cuatro caras del elemento, estos esfuerzos deben estar dirigidos hacia o desde las esquinas diagonalmente opuestas del elemento, además si el material es homogéneo e isotropico, entonces el esfuerzo cortante distorsionará al elemento de manera uniforme.

DEFINICIÓN DE TORSION:

Consideremos una barra sujeta rígidamente en un extremo y sometida en el otro a un par T ($T=Fd$) aplicado en un plano perpendicular el eje, como se muestra en la figura 2.1. Se dice que la barra esta sometida a torsión.

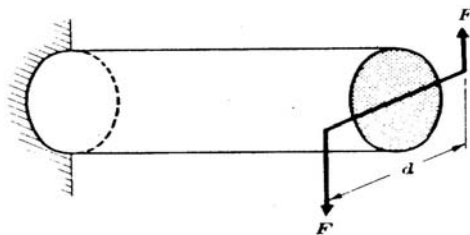


Figura 2.1 Barra sometida a torsión

MOMENTO TORSOR

A veces, a lo largo de un eje actúan una serie de pares. En este caso es conveniente introducir un nuevo concepto, el momento torsor, que se define para cada sección de la barra, como la suma algebraica de los momentos de los pares aplicados, situados a un lado de la sección considerada. Naturalmente, la elección de lado es arbitraria en cada caso.

MOMENTO POLAR DE INERCIA:

Para un árbol circulara hueco de diámetro exterior D_e con un agujero circular concéntrico de diámetro D_i , el momento polar de inercia de la sección representado generalmente por I_p esta dado por:

$$I_p = \frac{\pi}{32} (D_e^4 - D_i^4) \quad (2.1)$$

El momento polar de inercia de un árbol macizo se obtiene haciendo $D_i=0$

El numero I_p es simplemente una característica geométrica de la sección. No tiene significado físico, pero aparece en el estudio de las tensiones que se producen en un eje circular sometido a torsión.

TENSIÓN CORTANTE DE TORSIÓN:

Para un árbol circular, hueco o macizo, sometido a un momento de torsión T (figura2.2), la tensión cortante de torsión τ a una distancia ρ del centro del eje esta dada por :

$$\tau = \frac{T\rho}{I_p} \quad (2.2)$$

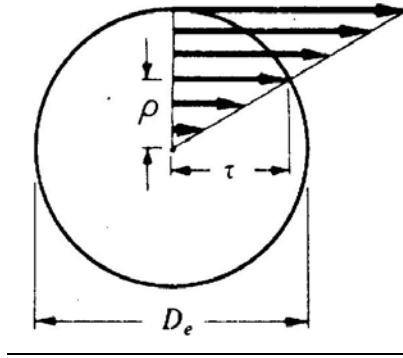


Figura 2.2 Tensión cortante de torsión

HIPÓTESIS:

Para deducir la fórmula $\tau = \frac{T\rho}{I_p}$ se supone que una sección del árbol normal a su

eje, plana antes de la carga, permanece plana después de aplicar el par y que un diámetro de la sección antes de la deformación sigue siendo un diámetro, o recta, de la sección después de la deformación. A causa de la simetría polar de un árbol circular, estas hipótesis parecen razonables; pero si la sección no es circular, ya no son ciertas; se sabe, por experiencias, que en este último caso, durante la aplicación de cargas exteriores, las secciones se alabean.

DEFORMACIÓN POR CORTANTE

Si se marca una generatriz a-b en la superficie de la barra sin carga, y luego se aplica el momento torsor T, esta recta se traslada a a-b', como se muestra en la figura 2.3. El ángulo γ medido en radianes, entre la posición inicial y final de la generatriz, se define como la deformación por cortante en la superficie de la barra. La misma definición sirve para cualquier punto interior de la misma.

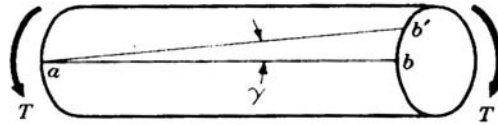


Figura 2.3 Deformación por cortante

MÓDULO DE ELASTICIDAD EN CORTANTE:

La relación entre la tensión cortante τ y su deformación γ se llama módulo de elasticidad en cortante y está dado por:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (2.3)$$

Como allí, las unidades de G son las mismas que las de la tensión cortante, pues la deformación no tiene dimensión.

ÁNGULO DE TORSIÓN:

Si un árbol de longitud L está sometido a un momento de torsión constante T en toda su longitud, el ángulo θ (figura 2.4) que un extremo de la barra gira respecto del otro es:

$$\theta = \frac{TL}{GI_p} \quad (2.4)$$

Donde I_p representa el momento polar de inercia de la sección.

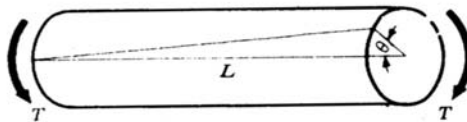


Figura 2.4 Ángulo de torsión

MODULO DE ROTURA:

Es la tensión cortante ficticia que se obtiene sustituyendo en la ecuación $\tau = T\rho/I_p$ el par máximo T que soporta un árbol cuando se ensaya a rotura. En este caso, se toma para valor de ρ el radio exterior de la barra. Indudablemente, no está justificado el uso de esta fórmula en el punto de rotura porque se deduce sólo, para utilizarla dentro de la zona de comportamiento lineal del material. La tensión obtenida utilizando esta fórmula en este caso no es una verdadera tensión, pero a veces es útil para comparaciones.

ENDURECIMIENTO POR DEFORMACION:

Si una probeta de material dúctil, como el acero, es cargada dentro de la zona plástica y luego descargada, la deformación elástica se recupera cuando el material retorna a su estado de equilibrio. Sin embargo, la deformación plástica permanece y como resultado, el material quedará sometido a una deformación permanente.

EFFECTOS POR TORSION:

Los efectos de la aplicación de una carga de torsión a una barra son:

- Producir un desplazamiento angular de la sección de un extremo respecto a otro.
- Originar tensiones cortantes en cualquier sección de la barra perpendicular a su eje.

II.2 MODULO DE RIGIDEZ

La deformación elástica de los sólidos es limitada. La deformación producida en un sólido al aplicarle un esfuerzo desaparece totalmente cuando este esfuerzo se elimina. La relación entre esfuerzo y deformación (lineal en algunos materiales, pero muy lejos de serlo en otros) puede relacionarse cualitativamente con la estructura y tipo de enlace atómico presentes. Esta relación de esfuerzo y deformación depende también de la temperatura, y en el caso de monocristales o materiales que han sido deformados previamente, en la dirección cristalográfica.

Todos los materiales cambian su forma, volumen o ambos, bajo la influencia de un esfuerzo o un cambio de temperatura. Decimos que la deformación es elástica si el cambio en forma o volumen producido por el esfuerzo o la temperatura se recupera totalmente cuando se permite al material regresar a su temperatura o sistema de esfuerzos originales. En sustancias cristalinas la relación entre esfuerzo y deformación en la región es lineal, donde la figura 2.5a es para la porción lineal de la curva de esfuerzo contra deformación en tensión, mientras que los materiales no cristalinos con moléculas de cadenas largas exhiben generalmente comportamiento elástico no lineal (figura 2.5b).

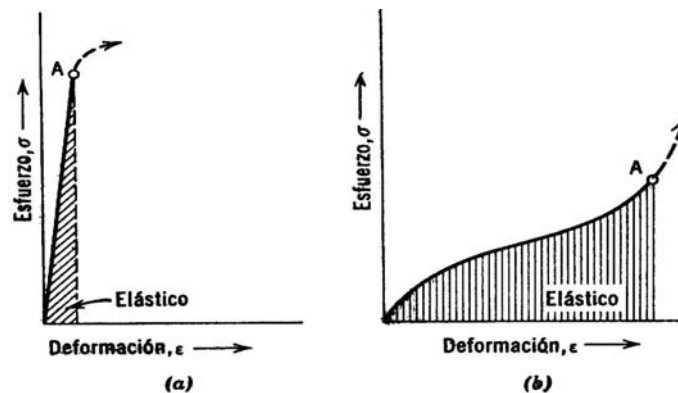


Figura 2.5 Diagrama Esfuerzo-Deformación

La simple teoría matemática de elasticidad lineal se anticipa considerablemente a cualquier conocimiento detallado sobre las bases atómicas de las observaciones experimentales, y trata simplemente con la proporcionalidad entre esfuerzo y deformación en una escala macroscópica, utilizando constantes elásticas que puedan determinarse por medio de pruebas mecánicas.

Las fórmulas comunes de elasticidad son:

$$\text{Módulo de Young} \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (2.5)$$

$$\text{Módulo de Rigidez} \quad G = \frac{\tau}{\gamma} \quad (2.6)$$

En las ecuaciones citadas:

σ : es el esfuerzo uniaxial de tensión o compresión.

ε : es la deformación normal.

τ : es el esfuerzo de corte.

γ : es la deformación a corte.

El módulo de elasticidad es una de las propiedades mecánicas más importantes usadas en el desarrollo de las ecuaciones de las propiedades mecánicas de los materiales. Por tanto, deberá siempre recordarse que E puede usarse sólo si un material tiene un comportamiento elástico lineal. También, si el esfuerzo en el material es mayor que el límite proporcional, el diagrama de esfuerzo-deformación deja de ser una línea recta y la ecuación $\sigma = E\varepsilon$ ya no es válida.

II.3 HISTERESIS MECÁNICA

El movimiento migratorio de átomos, defectos y energía térmica son procesos en función del tiempo. Como resultado, se puede producir un retardo entre la deformación y el esfuerzo. La dependencia de la deformación elástica del tiempo, y del esfuerzo, se conoce como el efecto inelástico. En materiales sujetos a esfuerzos cíclicos el efecto inelástico da origen al amortiguamiento interno: una declinación en la amplitud de vibración, y por lo tanto una disipación de energía. De esta manera la energía vibracional en estructuras reales se amortigua internamente, mientras que externamente el amortiguamiento se efectúa por fricción en las juntas, resistencia al viento y otros efectos similares. Por lo general, los efectos de estos últimos factores son de mayor preponderancia que los del primer mecanismo.

En la discusión de propiedades elásticas estaba implícita la suposición de que la deformación es solamente una función de simple valuación del esfuerzo. Sin embargo, esto no es siempre cierto: la consecución de la deformación en el esfuerzo y en el tiempo. Con el nombre de efecto *elástico posterior*, se denomina al acercamiento asintótico de la deformación elástica a su valor de equilibrio, con el transcurso del tiempo, después de haberse aplicado la carga. En estructuras sujetas a cargas cíclicas o vibraciones, el retraso de la deformación con respecto al esfuerzo causa una disipación de energía o amortiguamiento. También se puede disipar energía durante la aplicación de una carga isotérmica monótona o por medio de deformación plástica no recuperable. Este fenómeno es conocido como fluencia. Aquí se van a discutir las deformaciones macroscópicas que son totalmente recuperables con el transcurso del tiempo después de eliminar la carga aplicada.

Se va a considerar primero, en forma breve, varios mecanismos por medio de los cuales se origina el retraso de la deformación con respecto al esfuerzo, y luego se examinarán las manifestaciones experimentales del efecto elástico posterior y del amortiguamiento.

EFFECTO TERMOELÁSTICO

Puede demostrarse en vía experimental y justificarse teóricamente que existe una interrelación entre el trabajo mecánico realizado en un material en la región elástica, y los cambios en sus propiedades termodinámicas. Esto es, existen relaciones entre esfuerzo y deformación por una parte, y temperatura y entropía por la otra. Esta relación se conoce como el efecto termoplástico. Suponga que un esfuerzo elástico se aplica a una barra tan rápidamente, que el esfuerzo máximo se alcanza antes de que esta pueda cambiar energía térmica con sus alrededores. El calor transferido desde la barra, o hacia la barra, es cero, así que el cambio en energía interna lo causa solamente el trabajo mecánico efectuado en el material y la deformación es isentrópica (esto es, se produce a entropía constante y es reversible).

Puede demostrarse que para el caso de deformación uniaxial adiabática:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right|_s = - \frac{V_m \alpha E T}{C V} \quad (2.7)$$

En donde:

$\left. \frac{\partial T}{\partial \epsilon} \right|_s$ representa la variación de temperatura con la deformación a entropía constante

V_m : es el volumen molar del material

E : es el módulo de Young isotérmico

α : es el coeficiente lineal de expansión térmica

T : es la temperatura absoluta

C_v : es el calor específico a volumen constante

Prácticamente todos los materiales manifiestan una expansión volumétrica al calentarse. Por lo tanto, ya que α es casi siempre positivo, lo mismo que V , T , E y C puede deducirse que una tensión elástica adiabática disminuye la temperatura del material y una compresión elástica adiabática aumenta. Sin embargo, este cambio en temperatura es generalmente pequeño.

El comportamiento del hule al estirarse proporciona un contraste interesante con el comportamiento discutido debido a que α , el coeficiente de lineal de expansión térmica, es negativo; por lo tanto el hule se calienta al alargarlo rápidamente y se enfría al comprimirlo rápidamente.

La razón para el signo diferente de α reside en el hecho de que con un aumento en temperatura la vibración y flexión de las cadenas moleculares, que componen el hule aumenta de forma tal que la longitud promedio de esta cadena disminuye, esto es, el hule se contrae. De igual manera, una deformación elástica relativamente elevada, producida isotérmicamente en una pieza de hule, disminuye la entropía debido al enderezamiento y compactación de las cadenas moleculares), en grado mayor al aumento que produce en energía interna.

Como ya se ha observado, un material cristalino tiende a reducir ligeramente su temperatura cuando se estira. Sin embargo, si una probeta se alarga a una velocidad extremadamente baja, absorbe energía térmica del medio ambiente y su temperatura permanece constante.

El proceso de deformación es entonces isotérmico. Suponga una probeta que

exhibe una relación lineal perfecta entre el esfuerzo y deformación sujeta a deformación isotérmica en la región elástica; el segmento $O \rightarrow X$ de la curva de esfuerzo contra deformación en las figuras 2.6 a y b. Si la probeta se carga hasta el esfuerzo σ_1 tan lentamente que el proceso es isotérmico, la trayectoria de carga es $O \rightarrow I$. Si la probeta se descarga isotérmicamente la trayectoria de descarga es $I \rightarrow O$. Si en vez de esto la probeta se carga hasta σ_1 tan rápidamente que no hay tiempo suficiente para que absorba energía térmica del medio ambiente, el proceso es adiabático, y la temperatura de la probeta disminuye a un valor inferior al de la temperatura ambiente para cuando se alcanza el valor de σ_1 . Bajo estas circunstancias la probeta sigue la trayectoria de carga adiabática $O \rightarrow A$ y acumulará sólo la deformación ϵ_A , en contraposición a la deformación mayor que se acumuló durante el proceso isotérmico. Si la probeta deformada se mantiene al nivel de esfuerzos σ_1 , se calentará con el transcurso del tiempo, y sufrirá una deformación adicional por expansión térmica, siguiendo la trayectoria $A \rightarrow I$.

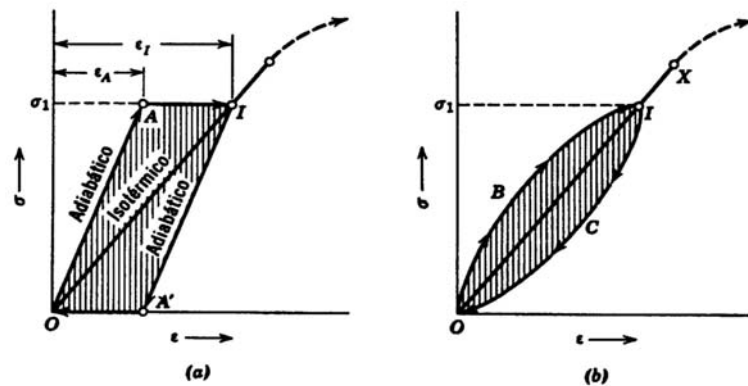


Figura 2.6 (a) Deformación adiabática e isotérmica;

(b) Circuito de Histéresis elástica

Ahora, si la carga se elimina subitamente, la probeta sigue la trayectoria de

descarga adiabática $I \rightarrow A'$ y se calentara durante el proceso. Con el transcurso del tiempo, la probeta transfiere energía térmica al medio ambiente (mas frío) y la deformación disminuye por contracción térmica siguiendo la trayectoria $A' \rightarrow O$.

La curva de esfuerzo y deformación de una muestra cargada y descargada en un ciclo continuo seria semejante al circuito OBICO mostrado en la figura 2.6b, en vez de parecerse al paralelogramo OAIA' de la figura 2.6a El área sombreada en la figura 2.6b denominada circuito de *histéresis elásticas*, representa la energía disipada por ciclo. La energía elástica almacenada durante el ciclo de carga se representa por el área bajo la curva OBI en la figura 2.7a (área = $\int \sigma d\epsilon$ y tiene unidades de $\text{lb/pulg}^2 * \text{pulg/pulg} = \text{pulg-lb/pulg}^3$, o sea energía por unidad de volumen), mientras que la energía elástica recuperada durante el ciclo de descarga se representa por el área bajo la curva ICO en la figura 2.7b. La diferencia entre el trabajo elástico efectuado y la energía elástica recuperada, es igual a la energía disipada, la cual se representa por el área circundada por el circuito de histéresis, que si bien en muchos materiales encierra solo un área muy pequeña, el efecto de histéresis elásticas es importante, cuando el material esta sujeto a vibración rápida, ya que la energía total disipada en un periodo determinado es el producto del área por ciclo y numero de estos.

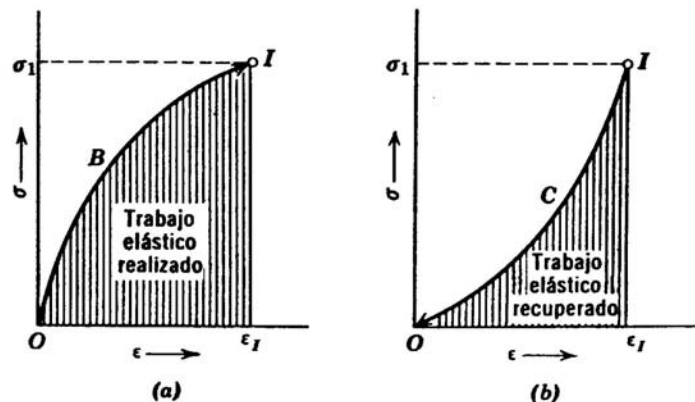


Figura 2.7 Curvas Esfuerzo contra Deformación

El área del circuito de histéresis es una función de la frecuencia de carga y descarga: si la frecuencia es muy baja el ciclo es casi totalmente isotérmico. En este caso el área circundada por el circuito de histéresis es extremadamente pequeña. Si la frecuencia de carga y descarga es muy alta, a las trayectorias de carga y descarga pueden ser totalmente adiabáticas y de nuevo el área circundada por el circuito de histéresis es muy pequeña. Sin embargo, en alguna frecuencia intermedia el área circundada por el circuito alcanza su máximo (ver figura 2.8)

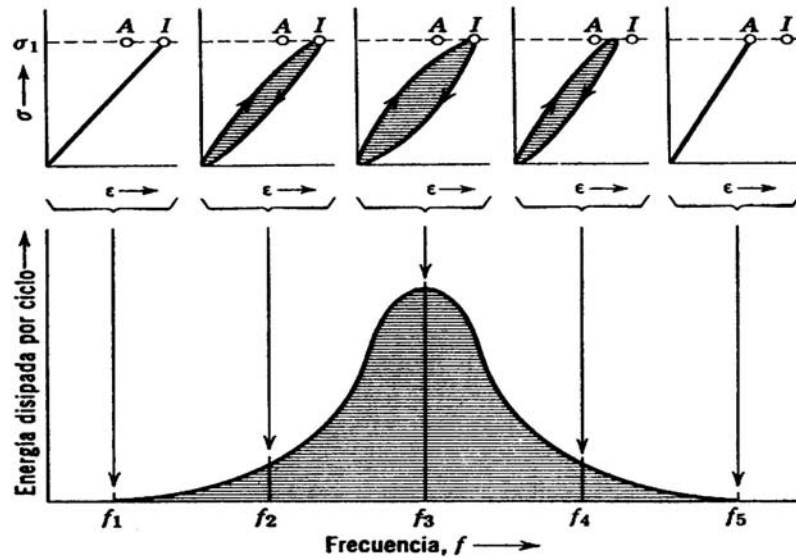


figura 2.8 Disipación de energía por ciclo como una función de frecuencia.