CAPÍTULO III

Distribución Tina de Baño

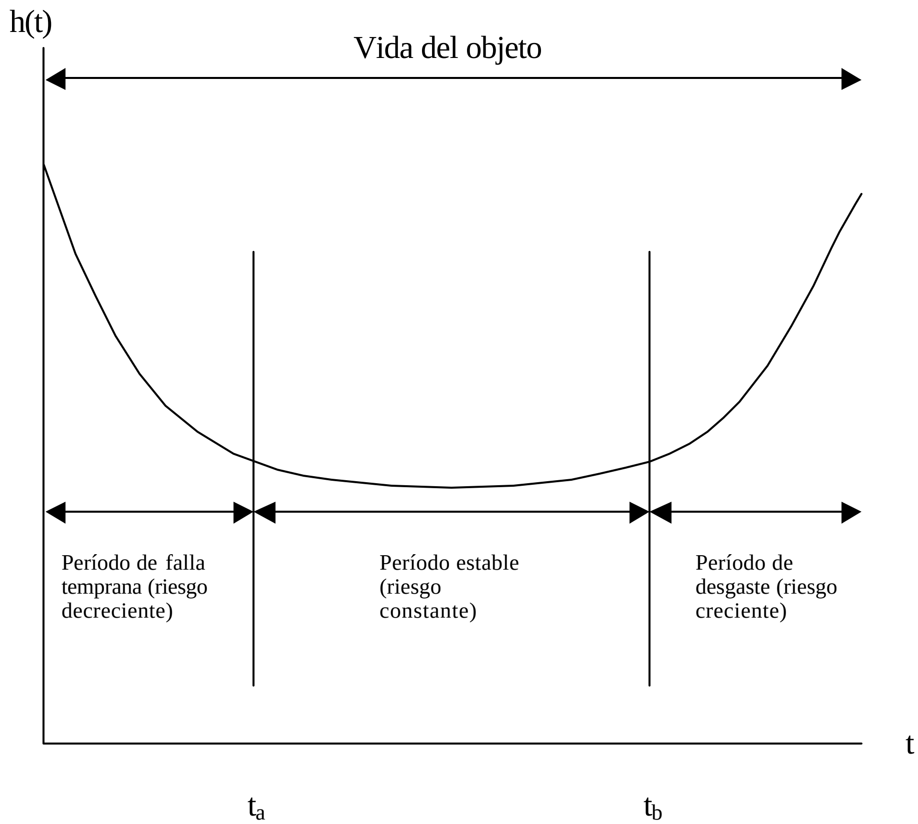
CAPÍTULO III

DISTRIBUCIÓN TINA DE BAÑO

Esta curva es la comúnmente utilizada para describir el comportamiento de fallas de la mayoría de los sistemas. En la curva "Tina de Baño" se observan 3 etapas básicas (Tobías, 1986):

- Período de falla temprana (distribución Weibull decreciente). En este periodo, se presentan las fallas debido a partes del sistema con defectos de fabricación e instalación.
- Período estable (distribución exponencial). En este periodo, las fallas se presentan de manera aleatoria.
- Período de falla por desgaste (distribución Weibull creciente). Las fallas se deben a la degradación natural de los productos.

En general, este tipo de comportamiento es común en maquinaría de tipo industrial, el crecimiento de un ser vivo,… etc.



Gráfica 3.1 Función de riesgo de falla de la distribución Tina de Baño.

Cada etapa de la curva "Tina de Baño" tiene un tipo de distribución diferente entre sí. Uno de los propósitos de esta tesis es encontrar una distribución que integre las 3 etapas principales de ésta curva para minimizar el error implícito en el cálculo de probabilidad de falla después de determinado tiempo.

3.1 Cálculo de funciones correspondientes a las distintas etapas de la distribución Tina de Baño

3.1.1 Para fallas tempranas

En esta etapa, el comportamiento de las fallas se caracterizar por tener una distribución Weibull con parámetros m_a $(0< m_a <1)$ y c_a. En el punto t_a la tasa de las fallas tempranas y la de aleatorias se igualan; por lo que, utilizando las fórmulas de tasa de falla desarrolladas en el Capítulo II, se puede escribir:

$$\frac{m_a t_a^{m_a-1}}{c_a^{m_a}} = \lambda$$

ó

$$\left(\frac{t_a}{c_a}\right)^{m_a} \frac{m_a}{t_a} = \lambda$$

Debido a que la expresión $\left(\frac{t_a}{c_a}\right)^{m_a}$ será de utilidad más adelante, se proseguirá a despejar como sigue:

$$\left(\frac{t_a}{c_a}\right)^{m_a} = \frac{\lambda t_a}{m_a} \qquad (3.1)$$

La Función Acumulativa de Falla (FDA), como se demostró en el Capítulo II, sección 2.1.3; es equivalente a la siguiente ecuación:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h(t)dt \right)$$

La distribución de densidad que presentan las fallas en el período de fallas tempranas, $0 < t < t_a$, es Weibull. La Tasa de Falla, como se enunció en la tabla 2.2, correspondiente a esta distribución es:

$$h(t) = \frac{m_a}{c_a}\left(\frac{t}{c_a} \right)^{m_a - 1}$$

Por lo tanto, la FDA para el período en el que se presentan fallas tempranas es equivalente a:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t \frac{m_a t^{m_a - 1}}{c_a^{m_a}} dt \right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{m_a t^{m_a}}{c_a^{m_a} m_a} \right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{c_a} \right)^{m_a} \right)$$

La función de densidad, f(t), es necesaria para maximizar la función de máxima verosimilitud. A continuación se derivará la función acumulativa de falla F(t) para obtener la f(t) correspondiente.

$$f(t) = \frac{d}{dt}F(t)$$

Por lo tanto:

$$f(t) = \frac{d}{dt}\left[1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{c_a}\right)^{m_a}\right)\right]$$

$$= \frac{m_a t^{m_a - 1}}{c_a^{m_a}} \exp\left(-\left[\left(\frac{t}{c_a}\right)^{m_a}\right]\right)$$

3.1.2 Para fallas aleatorias:

Las fallas en este período tienen que encontrarse entre t_a y t_b. La FDA debe considerar el período comprendido entre 0 y t_a, más el tiempo transcurrido desde t_a hasta que se presente la falla en el tiempo t.

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\int_0^{t_a} h(t)dt + \int_{t_a}^{t} h(t)dt\right)\right)$$

Para la función exponencial, la tasa de falla, h(t), es constante. A continuación se presentan las tasas de fallas que se utilizarán para calcular la FDA correspondiente a este periodo:

$$h(t)\begin{cases} = \dfrac{m_a}{c_a}\left(\dfrac{t}{c}\right)^{m_a - 1} & 0 < t < t_a \\ = l & t_a < t < t_b \end{cases}$$

Se procedió a sustituir las tasas de falla en la FDA.

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left[\int_0^{t_a} \frac{m_a t^{m_a - 1}}{c_a^{m_a}} dt + \int_{t_a}^{t} l\,dt\right]\right) \qquad t_a < t < t_b$$

$$= 1 - \exp\left(-\left[\frac{m_a t^{m_a}}{c_a^{m_a} m_a} + l(t - t_a)\right]\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\left[\left(\frac{t_a}{c_a}\right)^{m_a} + l(t - t_a)\right]\right)$$

Posteriormente, se sustituyó la igualdad establecida previamente en la ecuación 3.1.

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left[\frac{l\, t_a}{m_a} + l\, t \; - l\, t_a \right] \right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\, l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t \right] \right)$$

Para calcular la función de densidad de este periodo de falla, se procederá a derivar F(t):

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(t) = \frac{d}{dt}\left[1 - \exp\left(-\, l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t \right] \right) \right]$$

$$= l \exp\left(-\, l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t \right] \right)$$

3.1.3 Fallas tardías o por desgaste:

En esta etapa las fallas se caracterizan por tener una distribución Weibull con parámetros m_b ($m_b > 1$) y c_b. Al igual que ocurre en t_a, en el punto t_b la tasa de las fallas tardías y la de aleatorias se igualan, por lo que se puede establecer:

$$l = \frac{m_b\, t_b^{m_b - 1}}{c_b^{m_b}}$$

$$= \left(\frac{t_b}{c_b} \right)^{m_b} \frac{m_b}{t_b}$$

Debido a que la expresión $\left(\frac{t_b}{c_b}\right)^{m_b}$ será útil más adelante se procederá a despejar de la siguiente forma:

$$\left(\frac{t_b}{c_b}\right)^{m_b} = \frac{l\, t_b}{m_b} \qquad (3.2)$$

Las tasas de falla que se utilizarán para calcular la FDA es este periodo de falla son:

$$h(t)\begin{cases} = \dfrac{m_a}{c_a}\left(\dfrac{t}{c}\right)^{m_a-1} & 0 < t < t_a \\ = l & t_a < t < t_b \\ = \dfrac{m_b}{c_b}\left(\dfrac{t}{c_b}\right)^{m_b-1} & t_b < t \end{cases}$$

Para calcular la FDA es necesario sustituir las tasas de falla correspondientes a cada período de falla en la ecuación 2.1 desarrollada en el Capítulo II, sección 2.1.3.

Si se sustituyen la tasa de falla correspondiente a cada período de falla que conforma la Función de Distribución Tina de Baño, se obtiene la siguiente expresión:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left[\int_0^{t_a} \frac{m_a t^{m_a - 1}}{c_a^{m_a}} dt + \int_{t_a}^{t_b} l\, dt + \int_{t_b}^{t} \frac{m_b t^{m_b - 1}}{c_b^{m_b}} dt \right] \right) \qquad t_b < t$$

$$= 1 - \exp\left(-\left[\left(\frac{t_a}{c_a} \right)^{m_a} + l\left(t_b - t_a\right) + \left(\frac{t}{c_b} \right)^{m_b} - \left(\frac{t_b}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right)$$

A continuación se sustituirán las expresiones 3.1 y 3.2 desarrolladas con anterioridad en las secciones 3.1.1 y 3.1.3 respectivamente:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\left[\frac{l\, t_a}{m_a} + l\, t_b - l\, t_a + \left(\frac{t}{c_b} \right)^{m_b} - \frac{l\, t_b}{m_b} \right] \right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\left[l\left(t_a\left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_b\left(\frac{m_b - 1}{m_b} \right) \right) + \left(\frac{t}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right)$$

Se derivó la FDA para obtener la f(t) correspondiente:

$$\frac{d}{dt} F(t) = f(t) = \frac{d}{dt}\left[1 - \exp\left(-\left[l\left(t_a\left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_b\left(\frac{m_b - 1}{m_b} \right) \right) + \left(\frac{t}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right) \right]$$

$$= \frac{m_b t^{m_b - 1}}{c_b^{m_b}} \exp\left(-\left[l\left[t_a\left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_b\left(\frac{m_b - 1}{m_b} \right) \right] + \left(\frac{t}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right)$$

3.2 Función de Máxima Verosimilitud para la distribución Tina de Baño

Como se había mencionado anteriormente, la optimización de la Función de Máxima Verosimilitud (L) permite calcular los estimadores que posteriormente se utilizarán. Esta función es el resultado del producto de las funciones de densidad involucradas en el comportamiento del sistema, como se mostró en la ecuación 1.1:

Las funciones de densidad, utilizadas para la elaboración de la presente investigación, correspondientes a cada etapa de la distribución Tina de Baño son las siguientes:

$$f(t)\begin{cases} = \dfrac{m_a t^{m_a - 1}}{c_a^{m_a}} \exp\left(- \left[\left(\dfrac{t}{c_a} \right)^{m_a} \right] \right) & 0 < t < t_a \\[2ex] = l \exp\left(- l \left[t_a \left(\dfrac{1 - m_a}{m_a} \right) + t \right] \right) & t_a < t < t_b \\[2ex] = \dfrac{m_b t^{m_b - 1}}{c_b^{m_b}} \exp\left(- \left[l \left[t_a \left(\dfrac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_b \left(\dfrac{m_b - 1}{m_b} \right) \right] + \left(\dfrac{t}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right) & t_b < t \end{cases}$$

A continuación se sustituyen las f(t) en la función de máxima verosimilitud, obteniéndose la siguiente expresión:

$$L = \prod_{\{t_i / 0 < t_i < t_a\}} \frac{m_a t_i^{m_a - 1}}{c_a^{m_a}} \exp\left(- \left[\left(\frac{t_i}{c_a} \right)^{m_a} \right] \right) \prod_{\{t_j / t_a < t_j < t_b\}} l \exp\left(- l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_j \right] \right)$$
$$\prod_{\{t_k / t_b < t_k\}} \frac{m_b t_k^{m_b - 1}}{c_b^{m_b}} \exp\left(- \left[l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_b \left(\frac{m_b - 1}{m_b} \right) \right] + \left(\frac{t_k}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right)$$

Ya que la función logaritmo es creciente, se le puede utilizar para simplificar el cálculo de la expresión anterior, por lo que tomando logaritmo y operando algebraicamente la expresión se obtiene que:

$$l = \ln(L)$$

$$= \sum_{\{t_i / 0 < t_i < t_a\}} \left[\ln \frac{m_a t_i^{m_a - 1}}{c_a^{m_a}} - \left[\left(\frac{t_i}{c_a} \right)^{m_a} \right] \right] + \sum_{\{t_j / t_a < t_j < t_b\}} \left[\ln\ l - l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_j \right] \right] +$$

$$\sum_{\{t_k / t_b < t_k\}} \left[\ln \frac{m_b t_k^{m_b - 1}}{c_b^{m_b}} - \left[l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_b \left(\frac{m_b - 1}{m_b} \right) \right] + \left(\frac{t_k}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right]$$

$$= \sum_{\{t_i / 0 < t_i < t_a\}} \left[\ln\ m_a + (m_a - 1) \ln\ t_i - m_a \ln\ c_a - \left[\left(\frac{t_i}{c_a} \right)^{m_a} \right] \right] + \sum_{\{t_j / t_a < t_j < t_b\}} \left[\ln\ \ l - l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_j \right] \right] +$$

$$\sum_{\{t_k / t_b < t_k\}} \left[\ln\ m_b + (m_b - 1) t_k - m_b \ln\ c_b - \left[l \left[t_a \left(\frac{1 - m_a}{m_a} \right) + t_b \left(\frac{m_b - 1}{m_b} \right) \right] + \left(\frac{t_k}{c_b} \right)^{m_b} \right] \right] \qquad (3.3)$$

Para lograr estimar los parámetros de la distribución Tina de Baño, fue necesario optimizar la ecuación 3.3, ya que fue considerada la más conveniente para tal propósito.