CAPÍTULO II

Conceptos de Confiabilidad

CAPÍTULO II

CONCEPTOS DE CONFIABILIDAD

Una de las áreas de ingeniería de confiabilidad es la modelación de la misma, debido a que los procesos en general se comportan de manera probabilística. En estudios de confiabilidad podemos encontrar diversos modelos de distribuciones de probabilidad, de los cuales se debe elegir él que mejor se ajuste a los datos que se analizarán.

Los modelos teóricos utilizados para describir el tiempo de vida útil de los equipos son conocidos como "distribuciones de vida". Para determinar el tipo de distribución que siguen las fallas en un sistema es necesario restringir perfectamente el producto y el tiempo en estudio.

Para efecto de este trabajo, las funciones que se analizarán y se describirán serán la exponencial y la weibull, ya que estudios previamente realizados (Tobías, 1986) nos confirman que son las distribuciones que mejor se ajustan a los comportamientos de falla que se van presentando en las distintas etapas por las que atraviesa un sistema de este tipo, desde su arranque hasta su reemplazo.

2.1 Conceptos relacionados con fallas.

Cualquier sistema presenta fallas después de determinado tiempo de operación. Entiéndase por falla cualquier alteración por alguna causa provoque la interrupción de ejecución de una tarea determinada.

2.1.1 Función de Confiabilidad

La Distribución de Probabilidad Acumulativa (FDA), con lo que respecta al análisis de los riesgos, se refiere a la probabilidad de que una unidad de la población elegida aleatoriamente presente una falla después del tiempo t.

La Función de Confiabilidad o Resistencia (complemento de la FDA) nos proporciona la probabilidad de que una unidad o fracción de la población presente fallas hasta después el tiempo t (Tobías, 1986), es decir:

$$R(t) = 1 - F(t)$$

Si se aplica la técnica de multiplicación de probabilidades, enunciada en el Capítulo I, sección 1.1.2; la probabilidad de que n unidades idénticas no presenten fallas después del tiempo t es:

$$[R(t)]^n$$

Por otra parte, para calcular la probabilidad de que al menos una de las n unidades fallen (regla del complemento) es:

$$1 - [R(t)]^n = 1 - [1 - F(t)]^n$$

Para lograr entender de una mejor forma la diferencia entre F(t) y R(t) se puede decir que si n unidades bajo las mismas condiciones inician su operación al mismo tiempo; nF(t) es el número esperado de unidades que presentarán fallas hasta el tiempo t; y nR(t) es el número de unidades que después del tiempo t seguirán operando. A continuación se explica más detalladamente la función acumulativa de falla.

2.1.2 Tasa de falla

Esta función también es conocida como Tasa Instantánea de Falla o Tasa de Riesgo. Las unidades que la tasa de falla h(t) utiliza son "...número de entidades que fallan por unidad de tiempo" (Tobías, 1986). Es necesario aclarar que h(t) no es una probabilidad y puede tomar valores arriba de 1, aunque exceptuando valores negativos.

Para lograr explicar este concepto, es necesario hacer uso de la probabilidad condicional explicada en el Capítulo I, sección 1.1.2. Aplicándola a nuestro caso de estudio, la probabilidad de que un elemento falle en un intervalo de tiempo (t , t+Δt) dado que no presentó falla alguna hasta el tiempo t es:

$$P\left[t < T < t + \Delta t / T > t\right] = \frac{P\left[(t < T < t + \Delta t) \cap (T > t)\right]}{P\left[T > t\right]}$$

$$= \frac{P\left[t < T < t + \Delta t\right]}{P\left[T > t\right]}$$

$$= \frac{P\left[t < T < t + \Delta t\right]}{1 - P\left[T \leq t\right]}$$

$$= \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{1 - F(t)}$$

$$= \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{R(t)}$$

Donde: $F(t+\Delta t)$: Función de Probabilidad Acumulativa en el tiempo $t+\Delta t$.

$F(t)$: Función de Probabilidad Acumulativa en el tiempo t.

$R(t)$: Función de Confiabilidad.

Para calcular la tasa de falla en un intervalo de tiempo es necesario calcular el riesgo de falla en periodos de tiempo iguales, razón por la cual dividiremos entre h, como a continuación se muestra:

$$h(t, t+\Delta t) = \frac{P[t < T < t + \Delta t / T > t]}{h}$$

$$= \frac{F(t + t\Delta) - F(t)}{h} \bullet \frac{1}{R(t)}$$

Si se requiere calcular la tasa de falla en un momento instantáneo t es necesario aproximar a cero el periodo de tiempo h (Tobías, 1986):

$$h(t) = \lim_{h \to 0} \frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{h} \bullet \frac{1}{\mathrm{R(t)}}$$

$$= \frac{F^{'}(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

2.1.3 Función Acumulativa de Falla

Esta función (H(t)) se calcula integrando la tasa de falla en el intervalo $0 \leq t < \infty$:

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx$$

La Función Acumulativa de Falla esta enunciada por la siguiente ecuación (Tobías, 1986):

$$H(t) = -\ln\_\ R(t) \qquad (2.1)$$

A continuación, se procedió a derivar la ecuación 2.1, para demostrar la igualdad establecida.

$$h(t) = \frac{d}{dt}\left[-\ln R(t)\right]$$

$$= -\frac{1}{R(t)}\frac{d}{dt}R(t)$$

$$= -\frac{1}{R(t)}\frac{d}{dt}\left[1 - F(t)\right]$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)}$$

$$= h(t)$$

En estudios de confiabilidad es común que se conozca o se aproxime suficientemente la tasa de falla de determinado sistema. A continuación se demuestra la manera en que dado H(t) es posible calcular F(t).

$$H(t) = \int_0^t h(x)dx$$

$$= \int_0^t \frac{d}{dt} - \ln R(t)dt$$

$$= -\ln R(t)$$

Si es despejada R(t) de la ecuación anterior se obtiene la siguiente ecuación:

$$R(t) = \exp\left(-H(t)\right)$$

De donde:

$$F(t) = 1 - \exp\left(-\int_0^t h(x)dx\right) \qquad (2.2)$$

Esta última ecuación establece la relación entre la función de riesgo y la función de distribución acumulativa.

2.1.4 Medición de las fallas

Otros parámetros de medición comúnmente utilizados para estudiar las fallas que se presentan en un sistema determinado son los siguientes:

- Tiempo promedio de falla (MTTF): Interpretado como la vida promedio que una unidad nueva tendrá hasta que falle.
- Mediana de falla: Describe el tiempo en que la mitad de los componentes habrán fallado, es decir, el punto donde la distribución de probabilidad acumulativa alcanza el valor de 0.5.

2.2 Distribución exponencial.

Un componente u objeto que sigue una distribución de vida exponencial tiene la particularidad de "no recordar" cuanto tiempo ha estado operando, es decir, existe la misma probabilidad de que el sistema falle independientemente del tiempo que lleve operando. A esto se le conoce comúnmente como Propiedad de Falta de Memoria (Tobías,1986). Esta propiedad la define la siguiente ecuación:

$$\text{P(fallar en la siguiente hora (t+h) / sobrevivió hasta t)} = \frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}$$

$$= F(h)$$

En palabras coloquiales esta propiedad enuncia que es equivalente tomar 3 unidades de muestra después de 40,000 horas de operación que tomar 40,000 unidades de muestra después de 3 horas de operación.

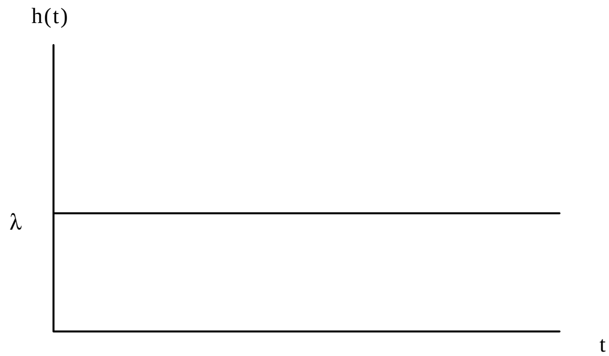
En la tabla 2.1 se muestran las fórmulas relacionadas con esta distribución que serán de utilidad para el desarrollo de esta tesis:

Tabla 2.1 Fórmulas de la distribución exponencial

Descripción	Fórmula
Función de Distribución de Probabilidad	$f(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$
Función de Distribución Acumulativa	$F(t) = 1 - \exp(-\lambda t)$
Función de Confiabilidad	$R(t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda t)$
Tasa de Falla	$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{\lambda \exp(-\lambda t)}{\exp(-\lambda t)} = \lambda$
Tiempo Promedio de Falla (MTTF)	$MTTF = \int_0^\infty t \lambda \exp(-\lambda) dt = \frac{1}{\lambda}$
Mediana de Falla	$F(T_{50}) = 0.5 = 1 - \exp(\lambda T_{50})$ Aplicando Logaritmos naturales: $T_{50} = \frac{0.693}{\lambda}$

(Tobías,1986).

Donde λ generalmente es un parámetro desconocido que define la Función de la Distribución Exponencial. Es de notarse que la Tasa de Falla en este tipo de distribución es una constante, no se encuentra en función del tiempo. En la gráfica 2.1 es posible observar el comportamiento de la Tasa de Falla de esta distribución.



Gráfica 2.1 Tasa de falla de la distribución exponencial .

2.2.1 Cálculo de estimadores

La distribución exponencial tiene una característica muy importante, la propiedad de cerradura. La propiedad de cerradura se define de la siguiente manera: si el sistema falla cuando el primer componente lo hace, y todos los componentes operan independientemente, la vida de distribución del sistema es, como sus componentes, exponencial (Tobías, 1986). Gracias a esta propiedad se puede decir que:

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Donde : λ_s : Parámetro del sistema.

λ_i : Parámetro de cada componente.

La estimación de λ en un lapso de tiempo determinado, independientemente que fallen o no las unidades analizadas, se realiza de la siguiente manera:

$$\hat{l} = \frac{\text{Número de fallas}}{\text{Unidades de tiempo en las que se tomó la muestra}}$$

Cuando se requiere la estimación de λ de una muestra completa, es decir, registrando el tiempo en que cada una de los elementos de la muestra fallan a través del tiempo, es necesario realizar el cálculo como a continuación se indica: (Tobías, 1986):

$$\hat{l} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)T}$$

Donde : r : No. De fallas.

n : Tamaño de la muestra.

T : Tiempo predeterminado de final de la evaluación..

t_i : Tiempo exacto de falla.

Cuando se estima λ de tal manera que la vida del sistema termina al presentarse la falla r, el cálculo se realiza de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\hat{l} = \frac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i + (n-r)t_r}$$

2.3 Distribución Weibull

Este tipo de distribución se aplica a variados fenómenos aleatorios, ya que proporciona una aproximación aceptable a la ley de probabilidades de muchas variables aleatorias. Es utilizada cuando la tasa de falla no es constante y sigue una clara tendencia creciente o decreciente (falla temprana y tardía). La Weibull se generó mediante la derivación de la distribución exponencial. La tabla 2.2 muestra las fórmulas que serán de utilidad para lograr alcanzar el objetivo planteado en la presente tesis.

Tabla 2.2 Fórmulas de la distribución Weibull

Descripción	Fórmula
Función de Distribución de Probabilidad	$f(x)\begin{cases} = \frac{m}{c}\left(\frac{t}{c}\right)^{m-1}\exp\left(-\left(\frac{t}{c}\right)^{m}\right) & \text{t} \geq 0 \\ = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$
Función de Distribución Acumulativa	$F(t) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{t}{c}\right)^{m}\right)$
Función de Confiabilidad	$R(t) = 1 - F(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{c}\right)^{m}\right)$
Tasa de Falla	$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} == \frac{m}{c}\left(\frac{t}{c}\right)^{m-1}$

Donde : m : Parámetro de forma; c : 1/λ (Característica de vida); t : tiempo.

(Tobías, 1986).