CAPÍTULO 4

GRASP Aplicado al problema de la *p*-mediana.

A continuación se describen las características principales del algoritmo propuesto para encontrar soluciones factibles para el problema de la *p*-mediana.

Sea $N = \{1, ...n\}$ el conjunto de índices para los clientes y $J = \{1, ...m\}$ el conjunto de índices para las localizaciones potenciales de las medianas. Para cada par del conjunto $\{(i, j), i \in N, j \in J\}$ sea C_{ij} el costo de asignación del cliente i a la mediana ubicada en la localización j. Se definen los siguientes conjuntos de variables de decisión:

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se ubica la mediana en la localización } j \in J; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el cliente } i \in N \text{ se asigna a la median ubicada en la localización } j \in J; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El objetivo es encontrar un conjunto de medianas que minimice la siguiente función, $\sum_{i \in N} \sum_{j \in J} C_{ij} X_{ij}$. Las soluciones pueden ser representadas mediante pares de la forma $s = (S,a)$, donde $S \subset J$ denota el conjunto de medianas seleccionadas y $a : N \to S$ es una aplicación del conjunto N en el conjunto S, tal que $a(i) = r \in S$, si el cliente i está asignado a la mediana r.

4.2 Algoritmo GRASP

El heurístico GRASP consta de una fase constructiva y otra de mejora. En cada iteración de la fase constructiva se añade un nuevo elemento a la solución. Dada una solución parcial, (S, a), con $|S| < p$. Cada elemento del conjunto de medianas aún no seleccionadas, $j \in J \backslash S$ es evaluado de acuerdo con una función de beneficio. Dicha función estima la variación en el valor de la función objetivo en el caso de que la mediana *j* fuera seleccionada y añadida a la solución. Para calcular $\Delta_j(S)$ los clientes son considerados uno a uno. Durante este proceso, δ_i mide el cambio en la función objetivo al reasignar el cliente *i* dentro del conjunto de medianas $S \cup \{j\}$. δ_i representa el ahorro por reasignar dicho cliente a la mediana *j*.

$$\delta_i = \begin{cases} \min\{C_{ij} - C_{i,a(i)}, 0\} & \text{si } C_{ij} \leq C_{i,a(i)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función de beneficio para cada mediana $j \in J \backslash S$ está dada por $\Delta_j(\mathrm{S}) = \sum_{i \in N} \delta_i$ .En la fase constructiva del algoritmo GRASP se selecciona una nueva mediana aleatoriamente de entre los elementos de una lista restringida de candidatos (*RCL*), que contiene los índices de las medianas cuyo valor correspondiente $\Delta_j(S)$ es menor o igual a un valor umbral que se calcula de la siguiente manera. Sea $\Delta_{mín} = mín_{j \in J \backslash S} \{\Delta_j\}$ y $\Delta_{máx} = máx_{j \in J \backslash S} \{\Delta_j\}$. Entonces $RCL = \{j \in J \backslash S : \Delta_j(S) \leq \Delta_{mín} + \alpha(\Delta_{máx} - \Delta_{\min}\}$. El valor del parámetro α define cómo de voraz o de aleatoria es la fase de construcción.

En la fase de mejora se utiliza un procedimiento de búsqueda local. Se utiliza una estructura de vecindad en donde el conjunto de soluciones vecinas son todas aquellas en las que se reemplaza una mediana seleccionada $k \in S$ por una mediana no seleccionada $j \in J \backslash S$, y los clientes son reasignados de manera tal que cada uno de ellos esté asignado a su mejor mediana, es decir, $a(i) = jmín(i)$ donde $jmín(i) = \arg\text{mín}_{j \in S \backslash \{k\} \cup \{j\}} \{c_{ij}\}$. Sea $s = (S, a)$ la solución factible actual y sea $j \in J \backslash S$ el índice de la mediana que va a sustituir a la mediana $k \in S$. Se define entonces el siguiente entorno.

$$N_{med}(s) = \{s' = (S', a') : S' = S \backslash \{k\} \cup \{j\}, \forall i \in N, a'(i) = jmín(i) : jmín(i) = \arg\text{mín}_{j \in S \backslash \{k\} \cup \{j\}} \{c_{ij}\}\}$$

Para poder mostrar la métodolgia GRASP aplicada al problema de la *p*-mediana se muestra un ejemplo práctico, en el cual solamente se toman los primeros cinco vértices del archivo *pmed*1 de la librería de J. E. Beasley. La matriz de costos se muestra en la figura 4.1. Para este ejemplo se define un valor de p =3. El objetivo es mostrar el proceso que se llevo acabo al desarrollar el algoritmo propuesto en este trabajo.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 36 & 76 & 77 & 105 \\ 36 & 0 & 46 & 47 & 75 \\ 76 & 46 & 0 & 1 & 29 \\ 77 & 47 & 1 & 0 & 28 \\ 105 & 75 & 29 & 28 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4.1

Procedimiento voraz.

La selección de la primera mediana se realiza tomando en cuenta los costos de asignación. Sea k el índice de la mediana a seleccionar, donde $k = \arg\min_{j=1,\cdots,n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} C_{ij} \right\}$.

Dado que $\sum_{i=1}^{5} C_{i1} = 294, \sum_{i=1}^{5} C_{i2} = 204, \sum_{i=1}^{5} C_{i3} = 152, \sum_{i=1}^{5} C_{i4} = 153$ y $\sum_{i=1}^{5} C_{i5} = 237$, la primera localización seleccionada es k=3 con un costo inicial = 152. Dado que el problema es no capacitado todos los clientes se asignan a la mediana k=3.

Para elegir la segunda mediana, cada elemento del conjunto de medianas aún no seleccionados $j \in J \setminus S$, es evaluado con respecto a la de función beneficio $\Delta_j(S)$. Se debe de medir el cambio en la función objetivo considerando la mejor asignación para los clientes en el conjunto de medianas extendido $S \cup \{j\}$. El valor δ_i representa el ahorro por reasignar al cliente i a su mejor mediana en el conjunto $S \cup \{j\}$. (ver figura 4.2)

		Medianas Candidato			
		Mediana 1	Mediana 2	Mediana 4	Mediana 5
δ_1	=	-76	-40	0	0
δ_2	=	-10	-46	0	0
δ_3	=	0	0	0	0
δ_4	=	0	0	-1	0
δ_5	=	0	0	-1	-29

Figura 4.2

En este caso:

$\Delta_1\ (S) = -86$

$\Delta_2\ (S) = -86$

$\Delta_4\ (S) = -2$

$\Delta_5\ (S) = -29$

Rompiendo arbitrariamente el empate, se selecciona la localización 1 para la ubicación de la segunda mediana, ya que es la que proporciona el mejor valor con respecto al cambio en la función objetivo.

Debido a que es un proceso iterativo la selección de la tercera mediana se efectúa de la misma manera. Como se muestra en las figura 4.3.

		Medianas Candidato		
		Mediana 2	Mediana 4	Mediana 5
δ_1	=	0	0	0
δ_2	=	-36	0	0
δ_3	=	0	0	0
δ_4	=	0	-1	0
δ_5	=	0	-1	-29

Figura 4.3

Por tanto,

$\Delta_2\ (S) = -36$

$\Delta_4\ (S)$ = -2

$\Delta_5\ (S)$ = -29

Se elige la localización 2 para la ubicación de la tercera mediana, proporcionando una solución factible con un costo total de 30 unidades.

Procedimiento Voraz Aleatorizado.

La selección de la primera mediana procediendo de una forma similar a la utilizada en el procedimiento voraz. En este caso se elige un elemento de una lista restringida de candidatos

$$\text{RCL} = \left\{ j{:}C_j = \sum_{i \in N} C_{ij} \le C_{mín} + \alpha\left(C_{mín} - C_{mín}\right)\right\}$$

donde $C_{mín} = \text{mín}_{\text{j}=1,\cdots,\text{n}} \left\{\sum_{i \in N} C_{ij}\right\}$ y $C_{máx} = \text{máx}_{\text{j}=1,\cdots,\text{n}} \left\{\sum_{i \in N} C_{ij}\right\}$.

En este caso, $C_{mín} = 152, C_{máx} = 294$ para un $\alpha = 0.1$ se obtiene un valor umbral de $152 + 0.1(294 - 152) = 156.2$, por tanto $RCL = \{3,4\}$, de donde se selecciona aleatoriamente la localización 4 para la ubicación de la primera mediana.

En la selección del resto de medianas se realizan los mismos cálculos del proceso voraz. Como se muestra en la figura 4.4, y 4.5

		Medianas Candidato			
		Mediana 1	Mediana 2	Mediana 3	Mediana 5
δ_1	=	-77	-41	-1	0
δ_2	=	-11	-47	-1	0
δ_3	=	0	0	-1	0
δ_4	=	0	0	0	0
δ_5	=	0	0	0	-28

Figura 4.4

Se tiene que,

$\Delta_1 (S)$ =-88

$\Delta_2 (S)$ = -88

$\Delta_3 (S)$ =- 3

$\Delta_5 (S)$ =-28

Aquí $\Delta_{mín}$= - 88 y $\Delta_{máx}$=-3, por lo tanto, para $\alpha = 0.1$, se obtiene un valor umbral $\Delta_{mín} + \alpha(\Delta_{máx} - \Delta_{mín}) = -88 + (0.1)(-3 + 88) = -79.5$ y por tanto $RCL = \{1,2\}$. Suponer que se selecciona de manera aleatoria la localización 1 para ubicar la segunda mediana.

Finalmente, se tiene que

		Medianas Candidato		
		Mediana 2	Mediana 3	Mediana 5
δ_1	=	0	0	0
δ_2	=	-36	0	0
δ_3	=	0	-1	0
δ_4	=	0	0	0
δ_5	=	0	0	-28

$\Delta_2\ (S) = -36$

$\Delta_3\ (S) =- 1$

$\Delta_5\ (S) =-28$

Aquí $\Delta_{mín}= - 36$ y $\Delta_{máx}=-1$, por lo tanto, para $\alpha = 0.1$, se obtiene un valor umbral $\Delta_{mín} + \alpha(\Delta_{máx} - \Delta_{mín}) = -36 + (0.1)(-1+36) = -32.5$ y por tanto $RCL = \{2\}$. En este caso solo hay un elemento en RCL y por tanto se selecciona la localización 2 para la ubicación de la tercera mediana.

Fase de Mejora.

A continuación se ejemplifica el proceso de búsqueda local aplicado a la solución obtenida en el ejemplo anterior.

En esta fase se intenta mejorar la solución obtenida durante la fase de construcción de GRASP. Se aplica un proceso de búsqueda local en el cual se busca reemplazar una mediana abierta por una cerrada, siempre y cuando se obtenga una reducción el en valor de la función objetivo. A partir del ejemplo anterior, como se observa en la figura 4.6, se puede concluir que la solución obtenida durante la fase constructiva es un óptimo local, ya que en el entorno definido no se encuentra ninguna solución que mejore el valor de la solución actual.

Movimientos Candidatos en N_{med}		
Abrir	Cerrar	Cambio en Costo
3	1	+35
3	2	+35
3	4	+1
5	1	+8
5	2	+8
5	4	+28

Figura 4.6