

## CAPÍTULO 2.

### El problema de la $p$ -mediana

#### 2.1 Descripción del problema de la $p$ -mediana.

El problema de la  $p$ -mediana considera una situación como la siguiente. Se requiere particionar un conjunto de clientes en exactamente  $p$  grupos. Cada grupo estará definido no sólo por el conjunto de clientes que lo forman, sino también por la ubicación de su mediana (i.e. la instalación que le proporciona el servicio). Las medianas a su vez determinan el costo del grupo. No se especifican restricciones de capacidad para las instalaciones y por tanto, cada cliente puede ser asignado a la mediana más cercana. Se puede utilizar una representación espacial discreta o de red. Se asume que los costos fijos para el emplazamiento de las instalaciones son idénticos y por lo tanto no son tomados en cuenta en la formulación del problema. El objetivo consiste en encontrar una partición de costo mínimo del conjunto de clientes.

Uno de los resultados más remarcables en el estudio del problema de la  $p$ -mediana se debe a Hakimi [2]. Establece que la búsqueda del conjunto óptimo de las  $p$  medianas se puede limitar a los nodos o vértices de la red. Este importante resultado hace posible que se pueda estudiar el problema de una manera discreta. Lo cual nos lleva a la siguiente formulación del problema.

#### 2.2 Formulación matemática para el problema de la $p$ -mediana

Sea  $N = \{1, \dots, n\}$  el conjunto de índices para los clientes y  $J = \{1, \dots, m\}$  el conjunto de índices para las localizaciones potenciales de las medianas. Típicamente

$N=J$ . Para cada  $(i, j), i \in N, j \in J$  sea  $C_{ij}$  el costo de asignación del cliente  $i$  a la mediana ubicada en la localización  $j$  [1]. Se definen las siguientes variables de decisión:

$$Y_j = \begin{cases} 1 & \text{Si se ubica la mediana en la localización } j \in J; \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el cliente } i \in N \text{ se asigna a la median ubicada en la localización } j \in J; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El problema de la  $p$ -mediana puede formularse de la siguiente manera.

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in J} C_{ij} X_{ij} \quad (1)$$

Sujeto a:

$$\sum_{j \in J} X_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j \in J} Y_j = p \quad (3)$$

$$X_{ij} \leq Y_j \quad \forall i \in N, j \in J \quad (4)$$

$$X_{ij} \in \{0,1\}, Y_j \in \{0,1\} \forall i \in N, j \in J \quad (5)$$

Las restricciones (2) aseguran que cada cliente es asignado a una mediana. La restricción (3) garantiza que se seleccionen exactamente  $p$  localizaciones para las medianas. Las restricciones (4) aseguran que los clientes se asignen a una mediana sólo si

ésta ha sido seleccionada. Finalmente, el conjunto de restricciones (5) especifica que todas las variables de decisión son binarias.

El problema de la  $p$ -mediana se formuló en su versión clásica en el año de 1960 como una extensión a los problemas simples de localización de instalaciones propuestos por Weber [1].

Para el problema de la  $p$ -mediana no se conoce un algoritmo de orden polinomial que lo resuelva, por lo tanto se le considera como un problema  $NP$ -Duro [7]. Para poder resolver el problema de la  $p$ -median, en este trabajo se utiliza la metodología GRASP, la cual se explica en el siguiente capítulo.