CAPÍTULO III

3. Solución manual para ejemplificar el análisis matricial de armaduras por el método de las rigideces.

3.1 Introducción

En este capítulo se describe la secuela de cálculo para el análisis matricial de armaduras por el método de las rigideces y se aplica a la solución de tres ejemplos de distintos tipos de armadura.

Como se había mencionado en el capítulo I, es de gran importancia que el usuario del programa conozca el procedimiento manual para el análisis matricial de armaduras por el método de las rigidices ya que el paquete no puede ser utilizado por una persona que no cuenta con los conocimientos básicos.

Es recomendable que el usuario del programa analice cuidadosamente la secuela de cálculo, ya que ésta es la base del procedimiento del análisis de armaduras por el método de las rigideces, así como cada uno de los ejemplos que a continuación se presentan. Los ejemplos en este capítulo están realizados paso a paso, cuidando que el procedimiento sea entendible y sin dejar ningún paso de su realización.

Los ejemplos que aquí se consideran son cuatro distintos. El primero muestra una armadura plana triangular equilátera, la que es muy sencilla de realizar. El segundo, tercer y cuarto ejemplo son algo más complicados, para que así el usuario, al realizarlos, vaya apreciando el aumento del grado de dificultad en cada uno de ellos.

3.2 Análisis estructural de armaduras

3.2.1 Secuela de cálculo para el análisis matricial de armaduras

Para el análisis matricial de armaduras, la secuela de cálculo por el método de las rigideces es el que a continuación se presenta:

a) Descripción de la tipología de la armadura, esto es, posición de los nudos y orientación de las barras.

b) Compilación de las propiedades geométricas y físicas de cada barra (longitud, área de la sección transversal, módulo de elasticidad).

c) Determinación de la posición de cada barra con referencia al sistema global de coordenadas.

d) Cálculo de la matriz de rigidez en referencia global de cada barra $\left[k \right]_{(ij)}$.

e) Determinación de la matriz de rigidez estructural $\left[K \right]$.

f) Eliminación de los grados de libertad de cuerpo rígido $\left\{ D_d \right\}$ a partir de las condiciones de borde $\left\{ D_c \right\}$ para así obtener la matriz de rigidez estructural reducida $\left[K^* \right]$ que satisface la ecuación $\left\{ P_c \right\} = \left[K^* \right] \left\{ D_d \right\}$.

g) Obtención de los desplazamientos conocidos a partir de la relación entre componentes de carga conocidas con las de desplazamiento conocido, esto es: $\left\{ P_c \right\} = \left[K^* \right] \left\{ D_d \right\}$ de donde: $\left\{ D_d \right\} = \left[K^* \right]^{-1} \left\{ P_c \right\}$.

h) Cálculo de las componentes de reacción a partir de la relación siguiente:

$$\left\{ P_d \right\} = \left[K_{cd} \right] \left\{ D_d \right\}$$

i) Verificación del equilibrio externo.

j) Obtención de la fuerza axial actuante sobre cada barra en referencia local (ec. 49)

$$\overline{F}_{(ij)} = \frac{EA}{L}\left[\left(u_j - u_i\right) Cos\theta + \left(v_j - v_i\right) Sen\theta \right]$$

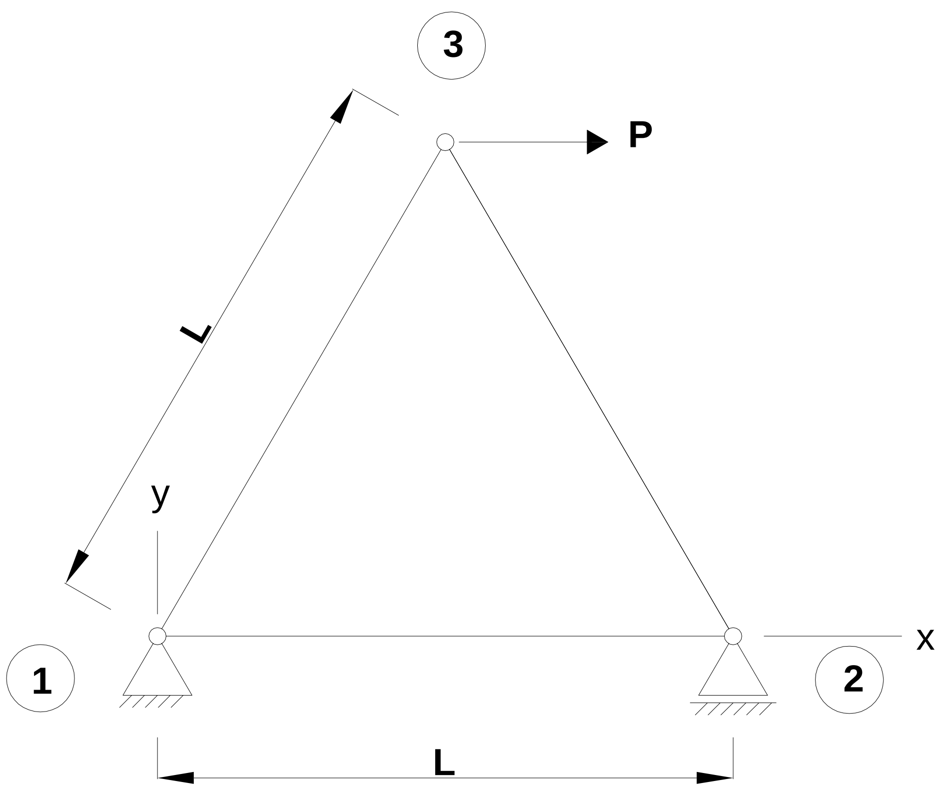
k) Verificación del equilibrio nodal interno.

3.2.2 Ejemplos de Aplicación

3.2.2.1 Ejemplo No. 1

Analizar la siguiente armadura plana triangular equilátera por el método de las rigideces:

Datos:



E, A, L constantes para todas las barras $\rightarrow$ $\dfrac{EA}{L} = cte.$

Solución:

Grado de hiperestaticidad:

$$\left.\begin{aligned} r &= 3 \\ b &= 3 \\ k &= 3 \end{aligned}\right\} \qquad n = (3+3) - 2x3 \equiv \underline{0} \qquad \therefore \text{ es una estructura isostática.}$$

La relación de rigidez para toda la armadura es:

$$\{\ P\ \} = [\ K\ ]\{\ D\ \}$$

donde $\{\ P\ \}$ es el vector de acciones nodales externas, $[\ K\ ]$ la matriz de rigidez estructural de la armadura y $\{\ D\ \}$ el vector de desplazamientos nodales. Para la armadura en cuestión son: $\{\ P\ \} = \{\ P^a\ \} + \{\ R\ \}$ siendo $\{\ P^a\ \}$ el vector de acciones nodales aplicadas, mientras que $\{\ R\ \}$ es el vector de reacciones, dados por:

$$\{\ P^a\ \} = \left\{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ P \\ 0 \end{matrix}\right\}; \qquad \{\ R\ \} = \left\{\begin{matrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \cdots \\ 0 \\ R_{2y} \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

con lo cual, el vector de acciones nodales $\{\ P\ \}$ es:

$$
\left\{ P \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ P \right\}_1 \\ \\ \cdots \\ \left\{ P \right\}_2 \\ \\ \cdots \\ \left\{ P \right\}_3 \\ \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} P_{1x} \\ P_{1y} \\ \cdots \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ \cdots \\ P_{3x} \\ P_{3y} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \cdots \\ 0 \\ R_{2y} \\ \cdots \\ P \\ 0 \end{array} \right\}
$$

mientras que el vector de desplazamientos nodales $\left\{ D \right\}$ es:

$$
\left\{ D \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ D \right\}_1 \\ \\ \cdots \\ \left\{ D \right\}_2 \\ \\ \cdots \\ \left\{ D \right\}_3 \\ \\ \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ u_2 \\ 0 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \right\}
$$

Matriz de rigidez global para cada barra:

$$
\left[k \right]_{(ij)} = \left[\begin{array}{cc} \left[k_{ii} \right] & \left[k_{ij} \right] \\ \left[k_{ji} \right] & \left[k_{jj} \right] \end{array} \right]
$$

donde

$$
\left[k_{ii} \right] = \left[k_{jj} \right] = -\left[k_{ij} \right] = -\left[k_{ji} \right] = \frac{EA}{L} \left[\begin{array}{cc} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{array} \right]
$$

para lo que se conforma la siguiente tabla:

Barra	θ	Cos θ	Sen θ	$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$
1-2	0º	1	0	$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1-3	60º	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix}$
2-3	120º	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 3/4 \end{bmatrix}$

Por lo tanto:

$$\left[\ k_{11}\ \right]_{(12)} = \left[\ k_{22}\ \right]_{(12)} = -\left[\ k_{12}\ \right]_{(12)} = -\left[\ k_{21}\ \right]_{(12)} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ k_{22}\ \right]_{(23)} = \left[\ k_{33}\ \right]_{(23)} = -\left[\ k_{23}\ \right]_{(23)} = -\left[\ k_{32}\ \right]_{(23)} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ k_{11}\ \right]_{(13)} = \left[\ k_{33}\ \right]_{(13)} = -\left[\ k_{13}\ \right]_{(13)} = -\left[\ k_{31}\ \right]_{(13)} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez estructural

$$\left[\ K\ \right] = \begin{bmatrix} \left[\ K_{11}\right] & \left[\ K_{12}\right] & \left[\ K_{13}\right] \\ \left[\ K_{21}\right] & \left[\ K_{22}\right] & \left[\ K_{23}\right] \\ \left[\ K_{31}\right] & \left[\ K_{32}\right] & \left[\ K_{33}\right] \end{bmatrix}$$

con

$$\left[\ K_{11}\ \right] = \left[\ k_{11}\ \right]_{(12)} + \left[\ k_{11}\ \right]_{(13)}$$

$$\left[\ K_{22}\ \right] = \left[\ k_{22}\ \right]$$

$$\left[\ K_{33}\ \right] = \left[\ k_{33}\ \right]_{(13)} + \left[\ k_{33}\ \right]_{(23)}$$

Matriz de rigidez estructural:

$$\left[\ K\ \right] = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 4+1 & \vdots & 0+\sqrt{3} & \vdots & -4 & \vdots & 0 & \vdots & -1 & \vdots & -\sqrt{3} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0+\sqrt{3} & \vdots & 0+3 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -\sqrt{3} & \vdots & -3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -4 & \vdots & 0 & \vdots & 4+1 & \vdots & 0-\sqrt{3} & \vdots & -1 & \vdots & \sqrt{3} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & 0-\sqrt{3} & \vdots & 0+3 & \vdots & \sqrt{3} & \vdots & -3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -1 & \vdots & -\sqrt{3} & \vdots & -1 & \vdots & \sqrt{3} & \vdots & 1+1 & \vdots & -\sqrt{3}+\sqrt{3} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -\sqrt{3} & \vdots & -3 & \vdots & \sqrt{3} & \vdots & -3 & \vdots & -\sqrt{3}+\sqrt{3} & \vdots & 3+3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K\ \right] = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} 5 & \vdots & \sqrt{3} & \vdots & -4 & \vdots & 0 & \vdots & -1 & \vdots & -\sqrt{3} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \sqrt{3} & \vdots & 3 & \vdots & 0 & \vdots & 0 & \vdots & -\sqrt{3} & \vdots & -3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -4 & \vdots & 0 & \vdots & 5 & \vdots & -\sqrt{3} & \vdots & -1 & \vdots & \sqrt{3} \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 & \vdots & -\sqrt{3} & \vdots & 3 & \vdots & \sqrt{3} & \vdots & -3 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -1 & \vdots & -\sqrt{3} & \vdots & -1 & \vdots & \sqrt{3} & \vdots & 2 & \vdots & 0 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ -\sqrt{3} & \vdots & -3 & \vdots & \sqrt{3} & \vdots & -3 & \vdots & 0 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

Relación de rigidez estructural:

$$\left\{\ P\ \right\} = \left[\ K\ \right]\left\{\ D\ \right\}$$

$$\begin{bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \cdots \\ 0 \\ R_{2y} \\ \cdots \\ P \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{3} & -4 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -4 & 0 & 5 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ u_2 \\ 0 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Esta relación contiene un conjunto de seis ecuaciones con seis incógnitas:

$R_{1x},\ R_{1y},\ R_{2y} \rightarrow$ reacciones

$u_2,\ u_3,\ v_3 \rightarrow$ desplazamientos

Cálculo de los desplazamientos nodales $\{ D_d \}$:

$$\{ P_c \} = \lfloor K^* \rfloor \{ D_d \} \qquad \therefore \qquad \{ D_d \} = \left[K^* \right]^{-1} \{ P_c \}$$

$$\{ P_c \} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L} \begin{bmatrix} 5 & -1 & \sqrt{3} \\ -1 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

por lo tanto, los desplazamientos son:

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{4L}{EA} \begin{bmatrix} P/8 \\ 9P/16 \\ -\sqrt{3}P/48 \end{bmatrix} = \frac{4PL}{EA} \begin{bmatrix} 1/8 \\ 9/16 \\ -\sqrt{3}/48 \end{bmatrix} = \frac{PL}{EA} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 9/4 \\ -\sqrt{3}/12 \end{bmatrix}}$$

Conocidos los desplazamientos pueden calcularse las reacciones en los apoyos $R_{1x},\ R_{1y},\ R_{2y}$:

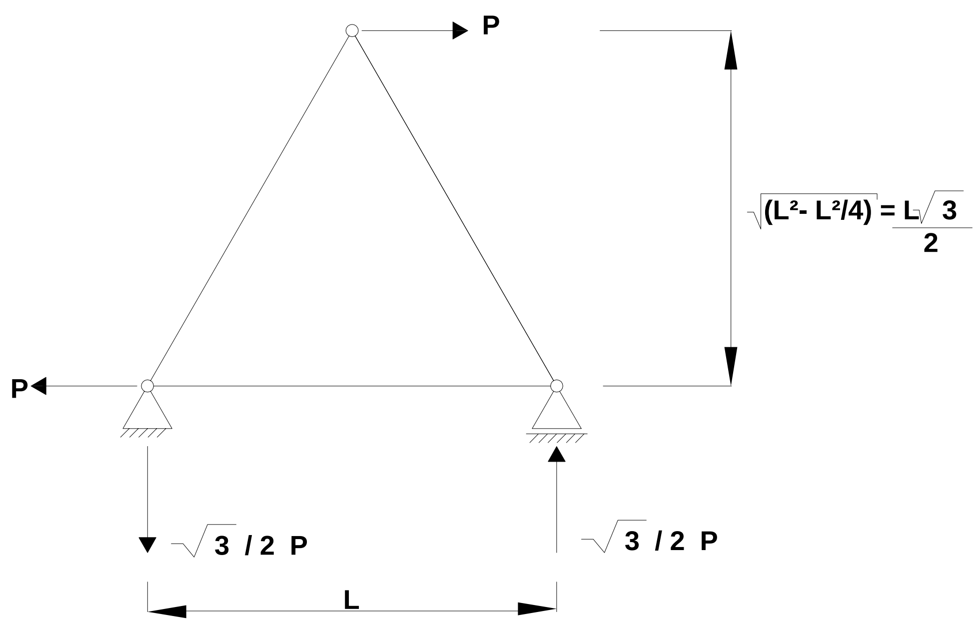
Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\{P_d\} = \{R\} = [K_{cd}]\{D_d\}$$

$$\{P_d\} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{4L}\begin{bmatrix} -4 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & -3 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix} \frac{4PL}{EA}\begin{Bmatrix} 1/8 \\ 9/16 \\ -\sqrt{3}/48 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ R_{2y} \end{Bmatrix} = P\begin{Bmatrix} -1 \\ -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{Bmatrix}}$$

Verificación del equilibrio externo:



$$\sum F_x = 0 = (-P + P) \equiv 0 \quad \text{(correcto)}$$

$$\sum F_y = 0 = \frac{-\sqrt{3}}{2}P + \frac{\sqrt{3}}{2}P \equiv 0 \quad \text{(correcto)}$$

$$\sum M_1 = 0 = \frac{-\sqrt{3}}{2} PL + \frac{\sqrt{3}}{2} PL \equiv 0 \text{ (correcto)}$$

Fuerzas internas de cada barra

$$\overline{F}_{(ij)} = \frac{EA}{L} \left[\left(u_j - u_i\right) Cos\theta + \left(v_j - v_i\right) Sen\theta \right]$$

Barra 1-2

$$\overline{F}_{(12)} = \frac{EA}{L} \left[\left(u_2 - u_1\right) Cos\theta + \left(v_2 - v_1\right) Sen\theta \right]$$

$$\overline{F}_{(12)} = \frac{EA}{L} \left[\frac{PL}{2EA} \right]$$

$$\boxed{\overline{F}_{(12)} = \frac{P}{2}}$$ (Tracción)

Barra 1-3

$$\overline{F}_{(13)} = \frac{EA}{L} \left[\left(u_3 - u_1\right) Cos\theta + \left(v_3 - v_1\right) Sen\theta \right]$$

$$\overline{F}_{(13)} = \frac{EA}{L} \frac{PL}{EA} \left[\left(\frac{9}{4} - 0 \right) \frac{1}{2} + \left(\frac{-\sqrt{3}}{12} - 0 \right) \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

$$\boxed{\overline{F}_{(13)} = P}$$ (Tracción)

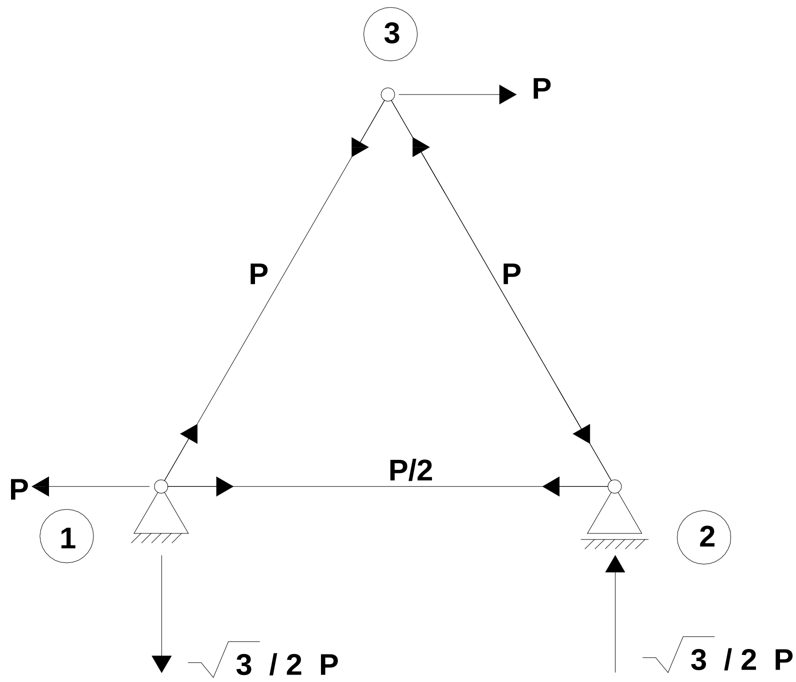
Barra 2-3

$$\overline{F}_{(23)} = \frac{EA}{L} \left[\left(u_3 - u_2\right) Cos\theta + \left(v_3 - v_2\right) Sen\theta \right]$$

$$\overline{F}_{(23)} = \frac{EA}{L} \frac{PL}{EA} \left[\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{-1}{2} \right) + \left(\frac{-\sqrt{3}}{12} - 0 \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]$$

$$\boxed{\overline{F}_{(23)} = -P}$$ (Compresión)

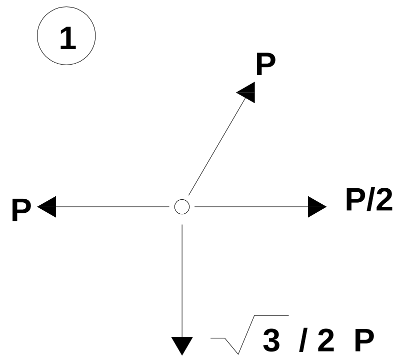
Verificación del equilibrio interno



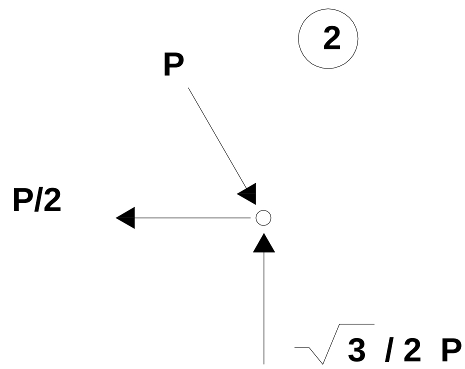
Nudo 1

$$\sum F_x = -P + \frac{P}{2} + \frac{P}{2} \equiv 0$$

$$\sum F_y = P\frac{\sqrt{3}}{2} - P\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv 0$$



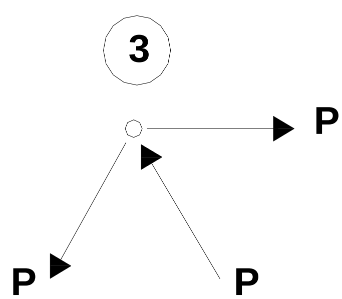
Nudo 2



$$\sum F_x = -\frac{P}{2} + \frac{P}{2} \equiv 0$$

$$\sum F_y = P\frac{\sqrt{3}}{2} - P\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv 0$$

Nudo 3



$$\sum F_x = -\frac{P}{2} - \frac{P}{2} + P \equiv 0$$

$$\sum F_y = P\frac{\sqrt{3}}{2} - P\frac{\sqrt{3}}{2} \equiv 0$$

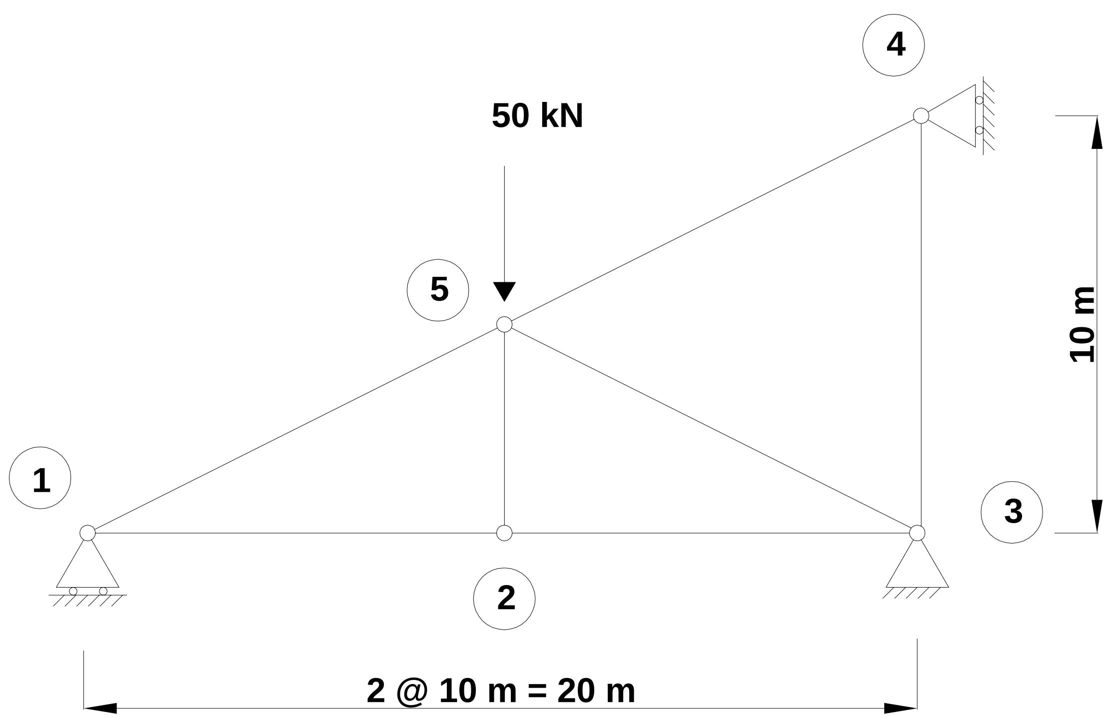
3.2.2.2 Ejemplo No. 2

Para la armadura de la figura, para la que $EA = cte$, para todas las barras, obtener por el método matricial de las rigideces lo siguiente:

a) Los desplazamientos de los nudos;

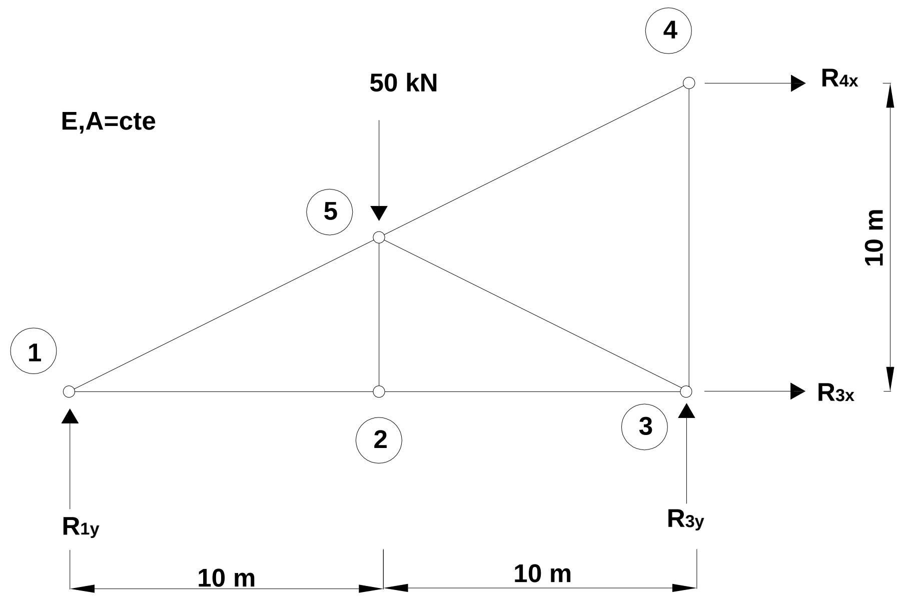
b) Las reacciones en los apoyos;

c) Las fuerzas axiales de todas las barras.



Solución:

Diagrama de cuerpo libre:



Vectores de acciones externas y desplazamientos nodales:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_{1y} \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ \cdots \\ R_{4x} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix}; \qquad \{D\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ v_4 \\ \cdots \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

Rigideces de las barras en referencia global:

$$[\,k\,]_{(ij)} = \begin{bmatrix} [\,k_{ii}\,] & [\,k_{ij}\,] \\ [\,k_{ji}\,] & [\,k_{jj}\,] \end{bmatrix}$$

donde

$$[\,k_{ii}\,] = [\,k_{jj}\,] = -[\,k_{ij}\,] = -[\,k_{ji}\,] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$

para lo que se conforma la siguiente tabla:

Barra	L (m)	θ	Cos θ	Sen θ	$\frac{EA}{L}$	$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$	
1-2	10	0º	1	0	$\frac{EA}{10}$	$\frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
2-3	10	0º	1	0	$\frac{EA}{10}$	$\frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
3-4	10	90º	0	1	$\frac{EA}{10}$	$\frac{EA}{10}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$
3-5	$5\sqrt{5}$		$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{EA}{5\sqrt{5}}$	$\frac{EA}{5\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4/5 & -2/5 \\ -2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1.6 & -0.8 \\ -0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$
2-5	5	90º	0	1	$\frac{EA}{5}$	$\frac{EA}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$
1-5	$5\sqrt{5}$		$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{EA}{5\sqrt{5}}$	$\frac{EA}{5\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$
5-4	$5\sqrt{5}$		$\frac{2\sqrt{5}}{5}$	$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{EA}{5\sqrt{5}}$	$\frac{EA}{5\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$

Matriz de rigidez estructural:

$$\left[\ K\ \right]=\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] & [K_{15}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] & [K_{25}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] & [K_{35}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] & [K_{45}] \\ [K_{51}] & [K_{52}] & [K_{53}] & [K_{54}] & [K_{55}] \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{ii}\ \right]=\sum_{(i)}\left[\ k_{ii}\ \right]_{(ij)} \quad ; \quad \left[\ K_{ij}\ \right]=\left[\ k_{ij}\ \right]_{(ij)}$$

$$\left[\ K_{11}\ \right]=\left[\ k_{11}\ \right]_{(12)}+\left[\ k_{11}\ \right]_{(15)}=\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1.6+\sqrt{5} & 0.8 \\ 0.8 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{22}\ \right]=\left[\ k_{22}\ \right]_{(12)}+\left[\ k_{22}\ \right]_{(23)}+\left[\ k_{22}\ \right]_{(25)}=\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{33}\ \right]=\left[\ k_{33}\ \right]_{(23)}+\left[\ k_{33}\ \right]_{(35)}+\left[\ k_{33}\ \right]_{(34)}=\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1.6+\sqrt{5} & -0.8 \\ -0.8 & 0.4+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{44}\ \right]=\left[\ k_{44}\ \right]_{(34)}+\left[\ k_{44}\ \right]_{(54)}=\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1.6 & 0.8 \\ 0.8 & 0.4+\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{55}\ \right]=\left[\ k_{55}\ \right]_{(15)}+\left[\ k_{55}\ \right]_{(25)}+\left[\ k_{55}\ \right]_{(35)}+\left[\ k_{55}\ \right]_{(54)}=\frac{EA}{10\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 4.8 & 0.8 \\ 0.8 & 1.2+2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Relación de rigidez estructural:

$$\left\{\ P\ \right\}=\left[\ K\ \right]\left\{\ D\ \right\}$$

$$
\begin{Bmatrix} 0 \\ R_{1y} \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ \cdots \\ R_{4x} \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix}
= \frac{EA}{10\sqrt{5}}
\begin{bmatrix}
1.6+\sqrt{5} & 0.8 & \vdots & -\sqrt{5} & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -1.6 & -0.8 \\
0.8 & 0.4 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -0.8 & -0.4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\sqrt{5} & 0 & \vdots & 2\sqrt{5} & 0 & \vdots & -\sqrt{5} & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 2\sqrt{5} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -2\sqrt{5} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & -\sqrt{5} & 0 & \vdots & 1.6+\sqrt{5} & -0.8 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -1.6 & 0.8 \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -0.8 & 0.4+\sqrt{5} & \vdots & 0 & -\sqrt{5} & \vdots & 0.8 & -0.4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 1.6 & 0.8 & \vdots & -1.6 & -0.8 \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -\sqrt{5} & \vdots & 0.8 & 0.4+\sqrt{5} & \vdots & -0.8 & -0.4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-1.6 & -0.8 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -1.6 & 0.8 & \vdots & -1.6 & -0.8 & \vdots & 4.8 & 0.8 \\
-0.8 & -0.4 & \vdots & 0 & -2\sqrt{5} & \vdots & 0.8 & -0.4 & \vdots & -0.8 & -0.4 & \vdots & 0.8 & 1.2+2\sqrt{5}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ 0 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ v_4 \\ \cdots \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}
$$

Cálculo de los desplazamientos nodales:

$$\{ P_c \} = [K^*] \{ D_d \} \qquad \therefore \qquad \{ D_d \} = [K^*]^{-1} \{ P_c \}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -50 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{10\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1.6+\sqrt{5} & -\sqrt{5} & 0 & 0 & -1.6 & -0.8 \\ -\sqrt{5} & 2\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{5} & 0 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0.4+\sqrt{5} & -0.8 & -0.4 \\ -1.6 & 0 & 0 & -0.8 & 4.8 & 0.8 \\ -0.8 & 0 & -2\sqrt{5} & -0.4 & 0.8 & 1.2+2\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} -326.56 \\ -163.28 \\ -1253.53 \\ -168.36 \\ 72.04 \\ -1253.53 \end{Bmatrix}}$$

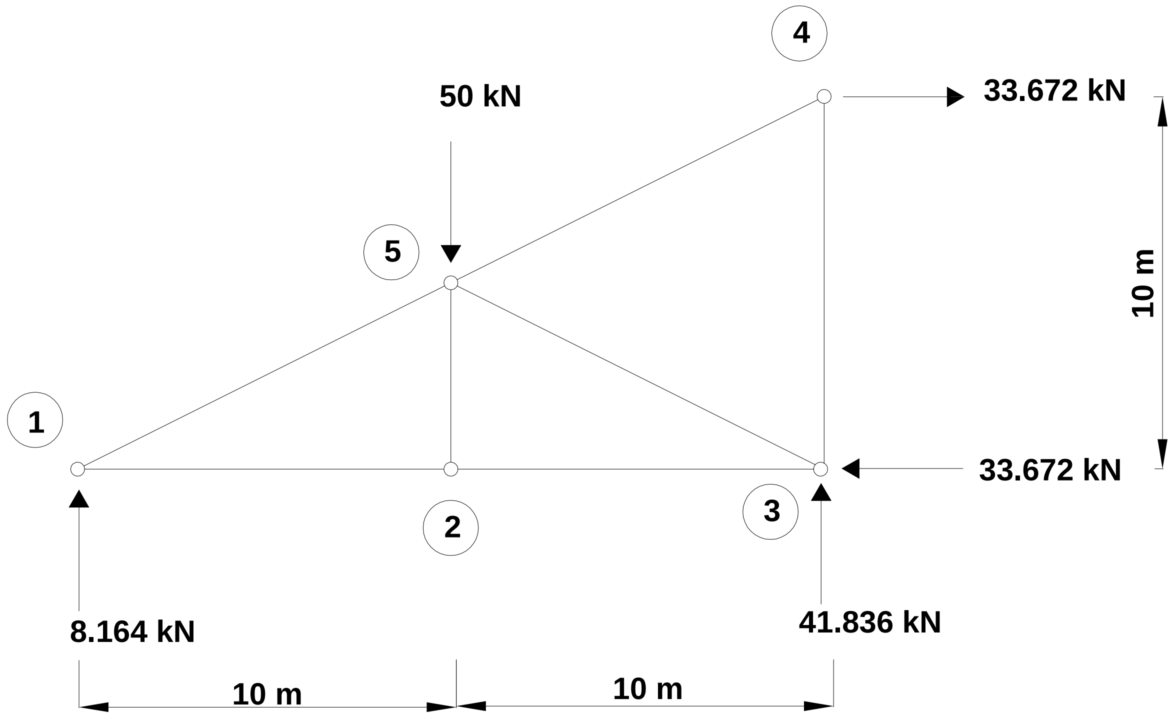
Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\{ P_d \} = \{ R \} = [K_{cd}] \{ D_d \}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{10\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & 0 & 0 & -0.8 & -0.4 \\ 0 & -\sqrt{5} & 0 & 0 & -1.6 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5} & 0.8 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & -1.6 & -0.8 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} -326.56 \\ -163.28 \\ -1253.53 \\ -168.36 \\ 72.04 \\ -1253.53 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} R_{1y} \\ R_{3x} \\ R_{3y} \\ R_{4x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8.164 \\ -33.672 \\ 41.836 \\ 33.672 \end{Bmatrix} kN}$$

Verificación del equilibrio externo:



$$\sum F_x = 0 = -33.672 + 33.672 \equiv 0$$

$$\sum F_y = 0 = 8.164 + 41.836 - 50 \equiv 0$$

$$\sum M_3 = 0 = (-8.164 \;\; x \;\; 20) \;\; + \;\; (-33.672 \;\; x \;\; 10) \;\; + \;\; (50 \;\; x \;\; 10) \equiv 0$$

Fuerzas internas en las barras:

$$\overline{F}_{(ij)} = \frac{EA}{L} \left[\left(u_j - u_i\right) Cos\theta + \left(v_j - v_i\right) Sen\theta \right]$$

$$\overline{F}_{(12)} = \frac{EA}{10} \left[-163.28 - \left(-326.56\right) \right] \left(1 \right) \cdot \frac{1}{EA} = \;\; +16.32 \;\; kN \quad \text{(tensión)}$$

$$\overline{F}_{(15)} = \frac{EA}{5\sqrt{5}} \left\{ \left[\left(72.01 - (-326.56)\right) \right] \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + \left[-1253.53 - 0 \right] \frac{\sqrt{5}}{5} \right\} \frac{1}{EA} = -18.26 \ kN$$

(compresión)

$$\overline{F}_{(23)} = \frac{EA}{10} \left\{ \left[\left(0 - (-163.28)\right) \right] \left(1 \right) \right\} \cdot \frac{1}{EA} = +16.32 \ kN \quad \text{(tensión)}$$

$$\overline{F}_{(25)} = \frac{EA}{5} \left\{ [1253.53] - 1253.53 \left(1 \right) \right\} \cdot \frac{1}{EA} = 0 \ kN$$

$$\overline{F}_{(34)} = \frac{EA}{10} \left\{ [-168.36] \left(1 \right) \right\} \cdot \frac{1}{EA} = -16.84 \ kN \ \text{(compresión)}$$

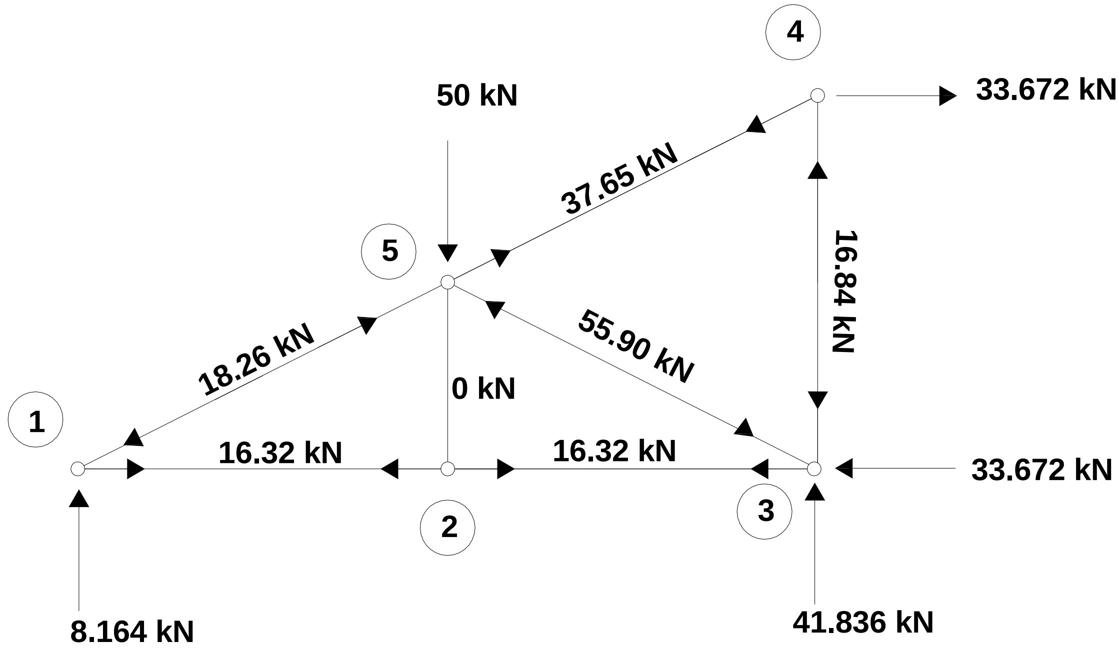
$$\overline{F}_{(35)} = \frac{EA}{5\sqrt{5}} \left\{ \left[72.01 - 0 \right] \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + \left(-1253.53 \right) \frac{\sqrt{5}}{5} \right\} \cdot \frac{1}{EA} = -55.90 \ kN \ \text{(compresión)}$$

$$\overline{F}_{(54)} = \frac{EA}{5\sqrt{5}} \left\{ \left[0 - 72.01 \right] \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right) + \left(-168.36 \right) \left(-1253.53 \right) \frac{\sqrt{5}}{5} \right\} \cdot \frac{1}{EA} =$$

$+37.65 \ kN$ (tensión)

Resumen:

$$\boxed{\begin{aligned}
\overline{F}_{(12)} &= +16.32 \ kN \ (\textit{tensión}) \\
\overline{F}_{(15)} &= -18.26 \ kN \ (\textit{compresión}) \\
\overline{F}_{(23)} &= +16.32 \ kN \ (\textit{tensión}) \\
\overline{F}_{(25)} &= 0 \ kN \\
\overline{F}_{(34)} &= -16.84 \ kN \ (\textit{compresión}) \\
\overline{F}_{(35)} &= -55.90 \ kN \ (\textit{compresión}) \\
\overline{F}_{(54)} &= +37.65 \ kN \ (\textit{tensión})
\end{aligned}}$$



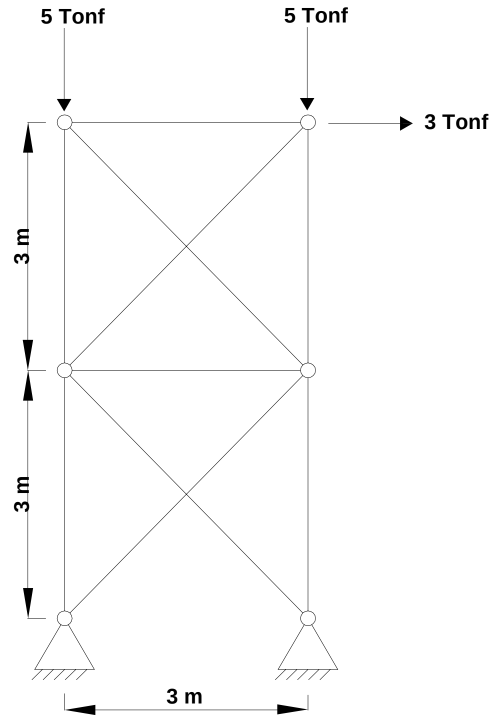
Verificación del equilibrio interno para el nudo 4:

$$\sum F_{x(4)} = 0 = \left(37.65 \ \ x \ \ \frac{-2\sqrt{5}}{5}\right) + 33.672 \equiv 0$$

$$\sum F_{y(4)} = 0 = \left(37.65 \ \ x \ \ \frac{-\sqrt{5}}{5}\right) + 16.84 \equiv 0$$

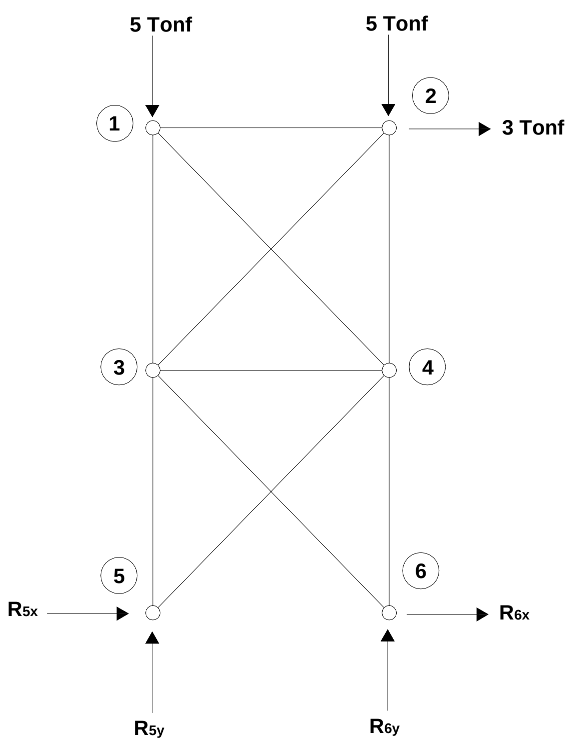
3.2.2.3 Ejemplo No. 3

Obtener los desplazamientos de los nudos 1 a 4 y las fuerzas axiales de las barras de la siguiente armadura mediante el método de las rigideces:



Solución:

Diagrama de cuerpo libre:



Vectores de acciones y desplazamientos nodales:

$$\left\{ P \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ P \right\}_1 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ P \right\}_2 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ P \right\}_3 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ P \right\}_4 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ P \right\}_5 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ P \right\}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ \cdots \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ \cdots \\ P_{3x} \\ P_{3y} \\ \cdots \\ P_{4x} \\ P_{4y} \\ \cdots \\ P_{5x} \\ P_{5y} \\ \cdots \\ P_{6x} \\ P_{6y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ \cdots \\ 3 \\ -5 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ R_{5x} \\ R_{5y} \\ \cdots \\ R_{6x} \\ R_{6y} \end{Bmatrix}; \qquad \left\{ D \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ D \right\}_1 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ D \right\}_2 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ D \right\}_3 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ D \right\}_4 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ D \right\}_5 \\ \ldots\ldots \\ \left\{ D \right\}_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ \cdots \\ u_4 \\ v_4 \\ \cdots \\ u_5 \\ v_5 \\ \cdots \\ u_6 \\ v_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ \cdots \\ u_4 \\ v_4 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Matriz de rigidez global para las barras:

$$\left[k \right]_{(ij)} = \begin{bmatrix} \left[k_{ii} \right] & \left[k_{ij} \right] \\ \left[k_{ji} \right] & \left[k_{jj} \right] \end{bmatrix}$$

donde

$$\left[k_{ii} \right] = \left[k_{jj} \right] = -\left[k_{ij} \right] = -\left[k_{ji} \right] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$

para lo que se conforma la siguiente tabla:

Barra	L (m)	θ	Cos θ	Sen θ	$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$	
1-2	3	0º	1	0	$\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
3-4	3	0º	1	0	$\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
1-3	3	270º	0	-1	$\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
2-4	3	270º	0	-1	$\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
3-5	3	270º	0	-1	$\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
4-6	3	270º	0	-1	$\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
1-4	$3\sqrt{2}$	315º	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\frac{EA}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
3-6	$3\sqrt{2}$	315º	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\frac{EA}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
2-3	$3\sqrt{2}$	225º	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\frac{EA}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$
4-5	$3\sqrt{2}$	225º	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\frac{EA}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$	$\frac{EA}{12}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$\left[k_{11} \right]_{(12)} = \left[k_{22} \right]_{(12)} = -\left[k_{12} \right]_{(12)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{33} \right]_{(34)} = \left[k_{44} \right]_{(34)} = -\left[k_{34} \right]_{(34)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{11} \right]_{(13)} = \left[k_{33} \right]_{(13)} = -\left[k_{13} \right]_{(13)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{22} \right]_{(24)} = \left[k_{44} \right]_{(24)} = -\left[k_{24} \right]_{(24)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{33} \right]_{(35)} = \left[k_{55} \right]_{(35)} = -\left[k_{35} \right]_{(35)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{44} \right]_{(46)} = \left[k_{66} \right]_{(46)} = -\left[k_{46} \right]_{(46)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{11} \right]_{(14)} = \left[k_{44} \right]_{(14)} = -\left[k_{14} \right]_{(14)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{33} \right]_{(36)} = \left[k_{66} \right]_{(36)} = -\left[k_{36} \right]_{(36)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{22} \right]_{(23)} = \left[k_{33} \right]_{(23)} = -\left[k_{23} \right]_{(23)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\left[k_{44} \right]_{(45)} = \left[k_{55} \right]_{(45)} = -\left[k_{45} \right]_{(45)} = \frac{EA}{12} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez estructural:

$$[K]=\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] & [K_{15}] & [K_{16}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] & [K_{25}] & [K_{26}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] & [K_{35}] & [K_{36}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] & [K_{45}] & [K_{46}] \\ [K_{51}] & [K_{52}] & [K_{53}] & [K_{54}] & [K_{55}] & [K_{56}] \\ [K_{61}] & [K_{62}] & [K_{63}] & [K_{64}] & [K_{65}] & [K_{66}] \end{bmatrix}$$

$$[K_{ii}] = \sum_{(i)} [k_{ii}]_{(ij)} \quad ; \quad [K_{ij}] = [k_{ij}]_{(ij)}$$

Submatrices de la diagonal principal de la matriz de rigidez estructural:

$$[K_{11}] = [k_{11}]_{(12)} + [k_{11}]_{(13)} + [k_{11}]_{(14)} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[K_{22}] = [k_{22}]_{(12)} + [k_{22}]_{(24)} + [k_{22}]_{(23)} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[K_{33}] = [k_{33}]_{(13)} + [k_{33}]_{(34)} + [k_{33}]_{(23)} [k_{33}]_{(36)} + [k_{33}]_{(35)} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 2(2+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 2(4+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$[K_{44}] = [k_{44}]_{(24)} + [k_{44}]_{(34)} + [k_{44}]_{(46)} [k_{44}]_{(14)} + [k_{44}]_{(45)} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 2(2+\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & 2(4+\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

$$[K_{55}] = [k_{55}]_{(35)} + [k_{55}]_{(45)} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[K_{66}] = [k_{66}]_{(36)} + [k_{66}]_{(46)} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Relación de rigidez:

$$
\begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ \cdots \\ 3 \\ -5 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ R_{5x} \\ R_{5y} \\ \cdots \\ R_{6x} \\ R_{6x} \end{Bmatrix}
= \frac{EA}{12}
\left[\begin{array}{ccccccccccccccccc}
4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & -4 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
-\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -4 & \vdots & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-4 & 0 & \vdots & 4+\sqrt{2} & \sqrt{2} & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & \sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & -4 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 2(2+\sqrt{2}) & 0 & \vdots & -4 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\
0 & -4 & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & 2(4+\sqrt{2}) & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -4 & \vdots & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-\sqrt{2} & \sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -4 & 0 & \vdots & 2(2+\sqrt{2}) & 0 & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 \\
\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & -4 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 2(4+\sqrt{2}) & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & -4 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & -4 & \vdots & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & \sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\
0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \vdots & 0 & -4 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2}
\end{array}\right]
\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ \cdots \\ u_4 \\ v_4 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

Cálculo de desplazamientos nodales:

$$\{P_c\} = [K^*]\{D_d\} \qquad \therefore \qquad \{D_d\} = [K^*]^{-1}\{P_c\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -4 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & -4 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -4 & 0 & 4+\sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 4+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2(2+\sqrt{2}) & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 2(4+\sqrt{2}) & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 & -4 & 0 & 2(2+\sqrt{2}) & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 2(4+\sqrt{2}) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{12}{EA}\begin{Bmatrix} 5.587 \\ -0.541 \\ 6.155 \\ -3.541 \\ 1.956 \\ 0.142 \\ 2.415 \\ -2.108 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{Bmatrix} 67.041 \\ -6.495 \\ 73.863 \\ -42.492 \\ 23.471 \\ 1.699 \\ 28.984 \\ -25.298 \end{Bmatrix}}$$

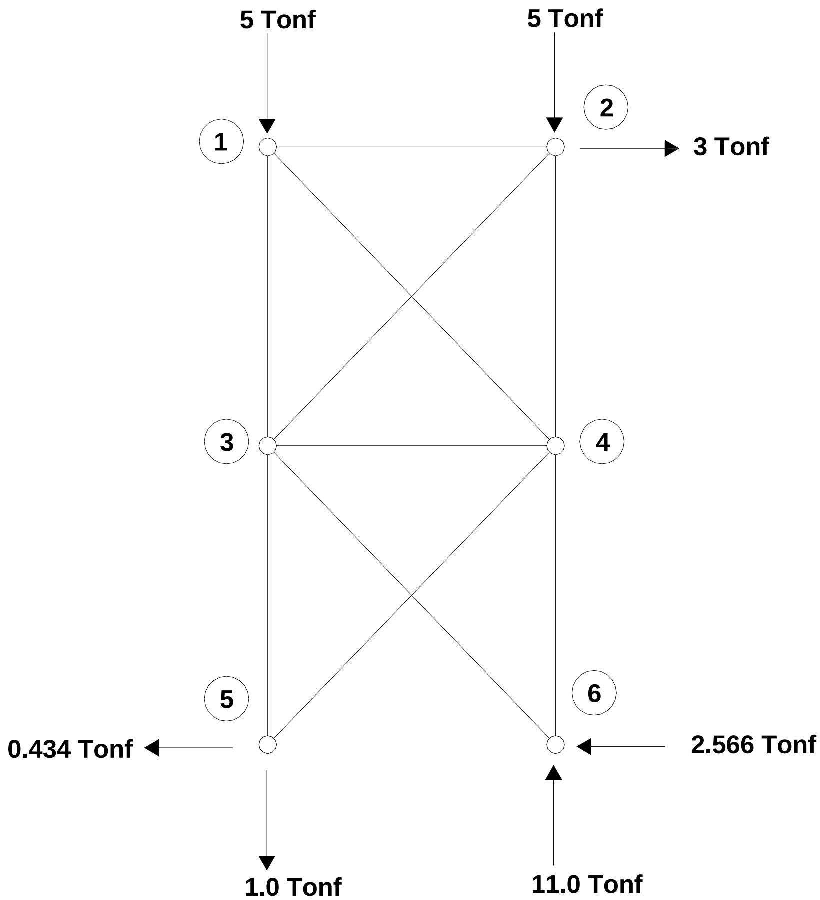
Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\{P_d\} = \{R\} = [K_{cd}]\{D_d\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{5x} \\ R_{5y} \\ R_{6x} \\ R_{6y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{12}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & -4 \end{bmatrix} \cdot \frac{12}{EA}\begin{Bmatrix} 5.587 \\ -0.541 \\ 6.155 \\ -3.541 \\ 1.956 \\ 0.142 \\ 2.415 \\ -2.108 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{5x} \\ R_{5y} \\ R_{6x} \\ R_{6y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.434 \\ -1.000 \\ -2.566 \\ 11.000 \end{Bmatrix} Tonf$$

Verificación del equilibrio externo:



$$\sum F_x = 0 = 3 - 2.566 - 0.434 \equiv 0$$

$$\sum F_y = 0 = -5 - 5 - 1 + 11 \equiv 0$$

$$M_6 = 0 = (1 \ \ x \ \ 3) + (-3 \ \ x \ \ 6) + (5 \ \ x \ \ 3) \equiv 0$$

Cálculo de las fuerzas internas de las barras:

$$\overline{F}_{(12)} = \frac{EA}{3} \cdot \frac{1}{EA} \left[(73.863 - 67.041) \right] = +2.274 \ Tonf \qquad \text{(tensión)}$$

$$\overline{F}_{(34)} = \frac{EA}{3} \cdot \frac{1}{EA} \left[(28.984 - 23.471) \right] = +1.834 \ Tonf \qquad \text{(tensión)}$$

$$\overline{F}_{(13)} = \frac{EA}{3} \cdot \frac{1}{EA} \left[(1.699 + 6.495) \ (-1) \right] = -2.731 \ Tonf \qquad \text{(compresión)}$$

$$\overline{F}_{(24)} = \frac{EA}{3} \cdot \frac{1}{EA} \left[(-25.298 + 42.492) \ (-1) \right] = -5.731 \ Tonf \qquad \text{(compresión)}$$

$$\overline{F}_{(35)} = \frac{EA}{3} \cdot \frac{1}{EA} \left[(0 - 1.699) \ (-1) \right] = +0.566 \ Tonf \qquad \text{(tensión)}$$

$$\overline{F}_{(46)} = \frac{EA}{3} \cdot \frac{1}{EA} \left[(0 + 25.298) \ (-1) \right] = -8.433 \ Tonf \qquad \text{(compresión)}$$

$$\overline{F}_{(14)} = \frac{EA}{6} \cdot \frac{1}{EA} \left[(28.894 - 67.041) \ - \ (-25.298 + 6.495) \right] = -3.209 \ Tonf \quad \text{(compresión)}$$

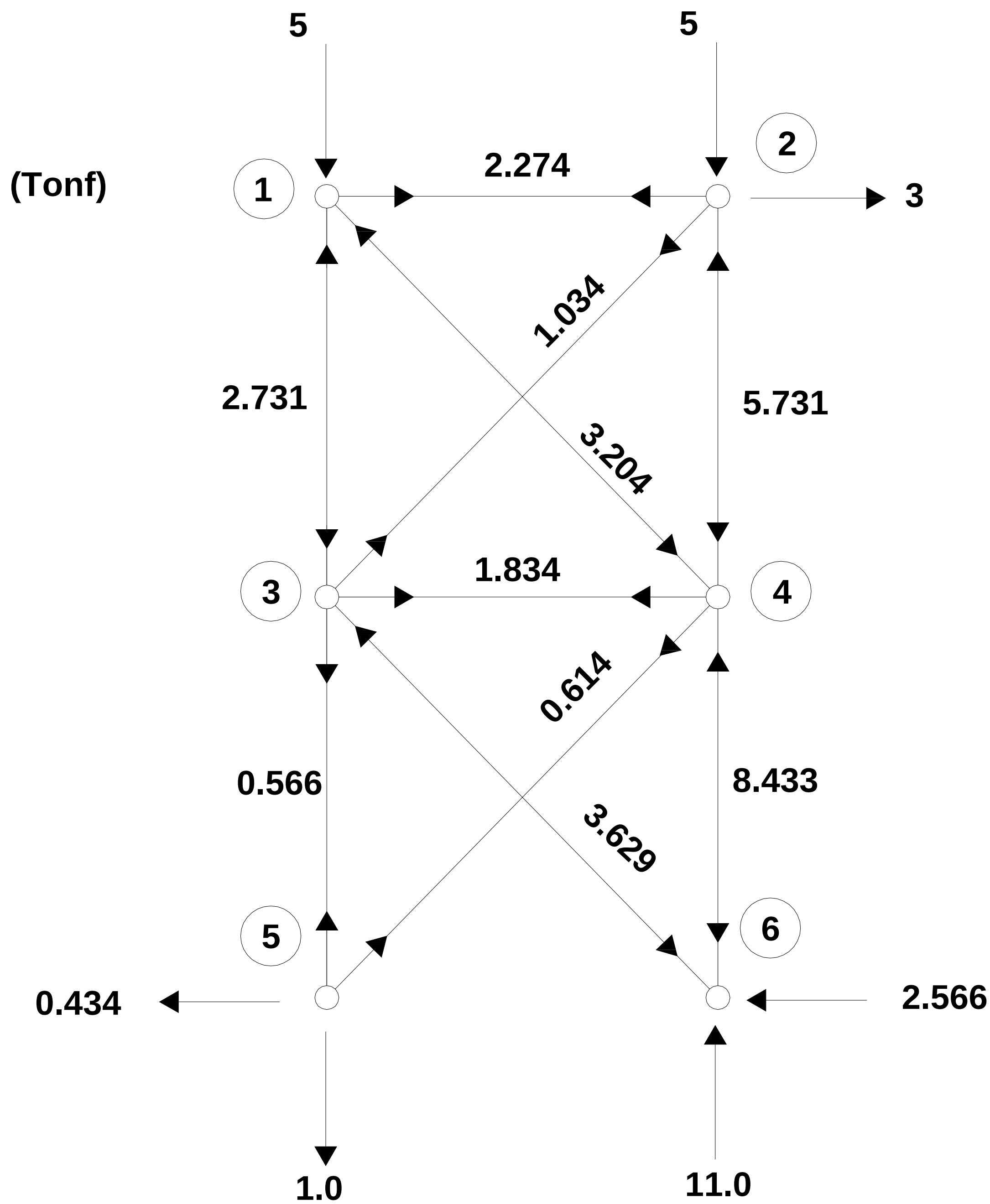
$$\overline{F}_{(36)} = \frac{EA}{6} \cdot \frac{1}{EA} \left[(0 - 23.471) \ + \ (0 - 1.699) \ (-1) \right] = -3.629 \ Tonf \qquad \text{(compresión)}$$

$$\overline{F}_{(23)} = \frac{EA}{6} \cdot \frac{1}{EA} \left[(23.471 - 73.863) \ + \ (1.699 + 42.492) \right] = +1.034 \ Tonf \qquad \text{(tensión)}$$

$$\overline{F}_{(45)} = \frac{EA}{6} \cdot \frac{1}{EA} \left[(0 - 28.894) \ + \ (0 + 25.298) \right] = +0.614 \ Tonf \qquad \text{(tensión)}$$

Resumen:

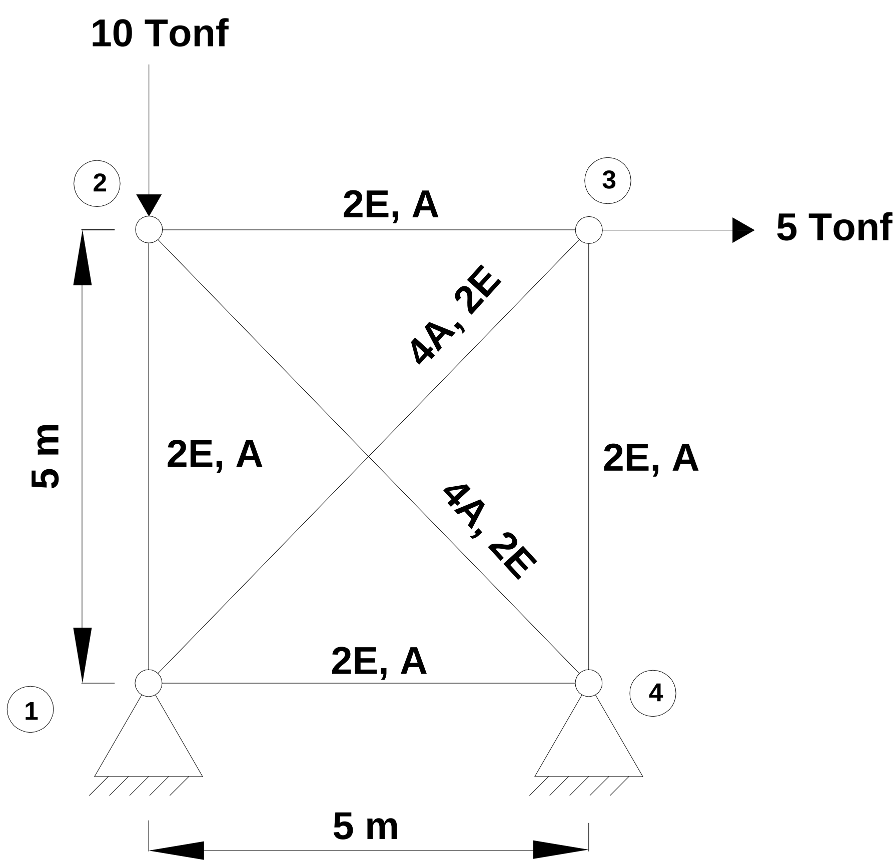
$\overline{F}_{(12)} = +2.274 \ Tonf$	$\overline{F}_{(46)} = -8.433 \ Tonf$
$\overline{F}_{(34)} = +1.834 \ Tonf$	$\overline{F}_{(14)} = -3.209 \ Tonf$
$\overline{F}_{(13)} = -2.731 \ Tonf$	$\overline{F}_{(36)} = -3.629 \ Tonf$
$\overline{F}_{(24)} = -5.731 \ Tonf$	$\overline{F}_{(23)} = +1.034 \ Tonf$
$\overline{F}_{(35)} = +0.566 \ Tonf$	$\overline{F}_{(45)} = +0.614 \ Tonf$


5
5
2
(Tonf)
1
2.274
3
1.034
2.731
5.731
3.204
3
1.834
4
0.614
0.566
8.433
3.629
5
6
0.434
2.566
1.0
11.0

3.2.2.4 Ejemplo No. 4

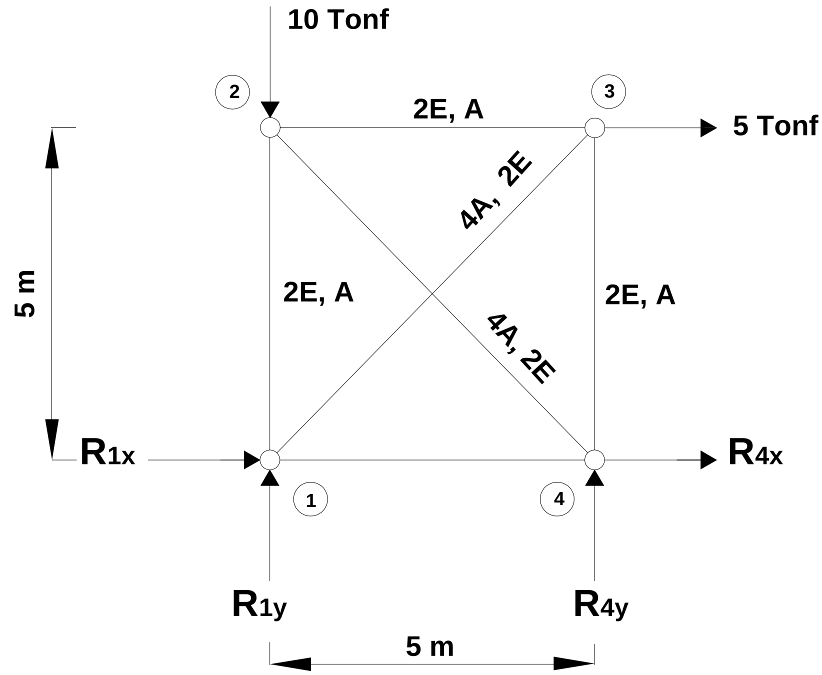
Para la armadura de la figura, obtener por el método matricial de las rigideces lo siguiente:

1) Los desplazamientos de los nudos;
2) Las reacciones en los apoyos;
3) Las fuerzas axiales de todas las barras.



Solución:

Diagrama de cuerpo libre:



Vectores de acciones y desplazamientos nodales:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \ldots\ldots \\ \{P\}_2 \\ \ldots\ldots \\ \{P\}_3 \\ \ldots\ldots \\ \{P\}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ \cdots \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ \cdots \\ P_{3x} \\ P_{3y} \\ \cdots \\ P_{4x} \\ P_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \cdots \\ 0 \\ -10 \\ \cdots \\ 5 \\ 0 \\ \cdots \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{Bmatrix}; \qquad \{D\} = \begin{Bmatrix} \{D\}_1 \\ \ldots\ldots \\ \{D\}_2 \\ \ldots\ldots \\ \{D\}_3 \\ \ldots\ldots \\ \{D\}_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ \cdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

Matriz de rigidez global para las barras:

$$[\ k\ ]_{(ij)} = \begin{bmatrix} [\ k_{ii}\ ] & [\ k_{ij}\ ] \\ [\ k_{ji}\ ] & [\ k_{jj}\ ] \end{bmatrix}$$

donde

$$[\ k_{ii}\ ] = [\ k_{jj}\ ] = -[\ k_{ij}\ ] = -[\ k_{ji}\ ] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$$

para lo que se conforma la siguiente tabla:

Barra	L (m)	θ	Cos θ	Sen θ	$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} C^2 & CS \\ CS & S^2 \end{bmatrix}$	
(1) 1-2	5	90º	0	1	$\frac{2EA}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$EA\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$
(2) 2-3	5	0º	1	0	$\frac{2EA}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$EA\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
(3) 3-4	5	270º	0	-1	$\frac{2EA}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$EA\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$
(4) 1-4	5	180º	-1	0	$\frac{2EA}{5}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$EA\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
(5) 1-3	7.0711		0.70711	0.70711	$\frac{8EA}{7.0711}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$	$EA\begin{bmatrix} 0.5657 & 0.5657 \\ 0.5657 & 0.5657 \end{bmatrix}$
(6) 2-4	7.0711		0.70711	-0.70711	$\frac{8EA}{7.0711}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$	$EA\begin{bmatrix} 0.5657 & -0.5657 \\ -0.5657 & 0.5657 \end{bmatrix}$

$$\left[\ k_{11}\ \right]_{(12)} = \left[\ k_{22}\ \right]_{(12)} = -\left[\ k_{12}\ \right]_{(12)} = -\left[\ k_{21}\ \right]_{(12)} = EA\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ k_{22}\ \right]_{(23)} = \left[\ k_{33}\ \right]_{(23)} = -\left[\ k_{23}\ \right]_{(23)} = -\left[\ k_{32}\ \right]_{(23)} = EA\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ k_{33}\ \right]_{(34)} = \left[\ k_{44}\ \right]_{(34)} = -\left[\ k_{34}\ \right]_{(34)} = -\left[\ k_{43}\ \right]_{(34)} = EA\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ k_{11}\ \right]_{(14)} = \left[\ k_{44}\ \right]_{(14)} = -\left[\ k_{14}\ \right]_{(14)} = -\left[\ k_{41}\ \right]_{(14)} = EA\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ k_{11}\ \right]_{(13)} = \left[\ k_{33}\ \right]_{(13)} = -\left[\ k_{13}\ \right]_{(13)} = -\left[\ k_{31}\ \right]_{(13)} = EA\begin{bmatrix} 0.5657 & 0.5657 \\ 0.5657 & 0.5657 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ k_{22}\ \right]_{(24)} = \left[\ k_{44}\ \right]_{(24)} = -\left[\ k_{24}\ \right]_{(24)} = -\left[\ k_{42}\ \right]_{(24)} = EA\begin{bmatrix} 0.5657 & -0.5657 \\ -0.5657 & 0.5657 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez estructural:

$$\left[\ K\ \right] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] & [K_{13}] & [K_{14}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] & [K_{23}] & [K_{24}] \\ [K_{31}] & [K_{32}] & [K_{33}] & [K_{34}] \\ [K_{41}] & [K_{42}] & [K_{43}] & [K_{44}] \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{ii}\ \right] = \sum_{(i)} \left[\ k_{ii}\ \right]_{(ij)} \quad ; \quad \left[\ K_{ij}\ \right] = \left[\ k_{ij}\ \right]_{(ij)}$$

Submatrices de la diagonal principal de la matriz de rigidez estructural:

$$\left[\ K_{11}\ \right] = \left[\ k_{11}\ \right]_{(12)} + \left[\ k_{11}\ \right]_{(13)} + \left[\ k_{11}\ \right]_{(14)} = EA\begin{bmatrix} 0.9657 & 0.5657 \\ 0.5657 & .9657 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{22}\ \right] = \left[\ k_{22}\ \right]_{(12)} + \left[\ k_{22}\ \right]_{(23)} + \left[\ k_{22}\ \right]_{(24)} = EA\begin{bmatrix} 0.9657 & -0.5657 \\ -0.5657 & .9657 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{33}\ \right] = \left[\ k_{33}\ \right]_{(23)} + \left[\ k_{33}\ \right]_{(13)} + \left[\ k_{33}\ \right]_{(34)} = EA\begin{bmatrix} 0.9657 & 0.5657 \\ 0.5657 & .9657 \end{bmatrix}$$

$$\left[\ K_{44}\ \right] = \left[\ k_{44}\ \right]_{(34)} + \left[\ k_{44}\ \right]_{(14)} + \left[\ k_{44}\ \right]_{(24)} = EA\begin{bmatrix} 0.9657 & -0.5657 \\ -0.5657 & .9657 \end{bmatrix}$$

Relación de rigidez:

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \cdots \\ 0 \\ -10 \\ \cdots \\ 5 \\ 0 \\ \cdots \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{Bmatrix} = EA\begin{bmatrix} 0.9657 & 0.5657 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & -0.5657 & -0.5657 & \vdots & -0.4 & 0 \\ 0.5657 & 0.9657 & \vdots & 0 & -0.4 & \vdots & -0.5657 & -0.5657 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0.9657 & -0.5657 & \vdots & -0.4 & 0 & \vdots & -0.5657 & 0.5657 \\ 0 & -0.4 & \vdots & -0.5657 & 0.9657 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0.5657 & -0.5657 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -0.5657 & -0.5657 & \vdots & -0.4 & 0 & \vdots & 0.9657 & 0.5657 & \vdots & 0 & 0 \\ -0.5657 & -0.5657 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0.5657 & 0.9657 & \vdots & 0 & -0.4 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -0.4 & 0 & \vdots & -0.5657 & 0.5657 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0.9657 & -0.5657 \\ 0 & 0 & \vdots & 0.5657 & -0.5657 & \vdots & 0 & -0.4 & \vdots & -0.5657 & 0.9657 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \\ \cdots \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Cálculo de desplazamientos nodales:

$$\left\{\ P_c\ \right\} = \left[\ K^*\ \right]\left\{\ D_d\ \right\} \qquad \therefore \qquad \left\{\ D_d\ \right\} = \left[\ K^*\ \right]^{-1}\left\{\ P_c\ \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -10 \\ \cdots \\ 5 \\ 0 \end{Bmatrix} = EA\begin{bmatrix} 0.9657 & -0.5657 & \vdots & -0.4 & 0 \\ -0.5657 & 0.9657 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ -0.4 & 0 & \vdots & 0.9657 & 0.5657 \\ 0 & 0 & \vdots & 0.5657 & 0.9657 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \cdots \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{Bmatrix} -7.0795 \\ -14.5023 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 3.4181 \\ -2.0023 \end{Bmatrix}}$$

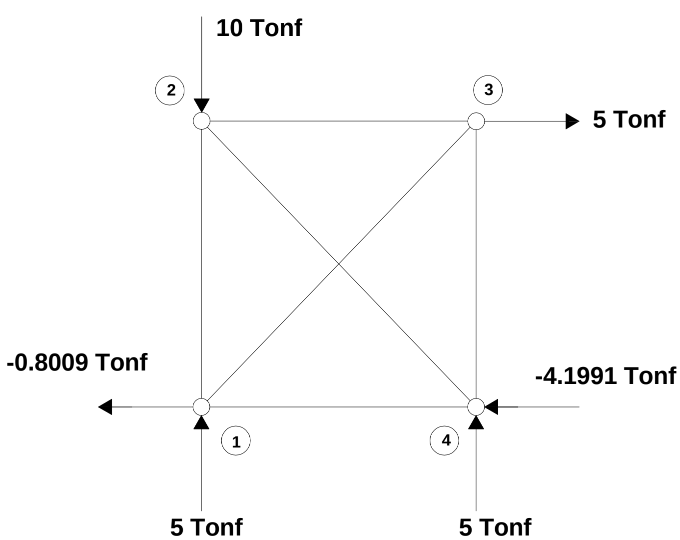
Cálculo de las reacciones en los apoyos:

$$\left\{ P_d \right\} = \left\{ R \right\} = \left[K_{cd} \right] \left\{ D_d \right\}$$

$$\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \cdots \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{Bmatrix} = EA \begin{bmatrix} 0 & 0 & \vdots & -0.5657 & -0.5657 \\ 0 & -0.4 & \vdots & -0.5657 & -0.5657 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ -0.5657 & 0.5657 & \vdots & 0 & 0 \\ 0.5657 & -0.5657 & \vdots & 0 & -0.4 \end{bmatrix} \frac{1}{EA} \begin{Bmatrix} -7.0795 \\ -14.5023 \\ \cdots\cdots \\ 3.4181 \\ -2.0023 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{Bmatrix} R_{1x} \\ R_{1y} \\ \cdots \\ R_{4x} \\ R_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.8009 \\ 5 \\ \cdots\cdots \\ -4.1991 \\ 5 \end{Bmatrix} Tonf}$$

Verificación del equilibrio externo:



$$\sum Fx = -0.8009 - 4.1991 + 5 = 0$$

$$\sum Fy = 5 + 5 - 10 = 0$$

Cálculo de fuerzas internas en las barras:

$$\overline{F}_{(ij)} = \frac{EA}{L}\left[\left(u_j - u_i\right) Cos\theta + \left(v_j - v_i\right) Sen\theta\right]$$

$$\overline{F}_{(12)} = \frac{2EA}{5}\left[-14.5023 - 0\right]\left(1\right)\cdot\frac{1}{EA} = -5.8009\ Tonf\ \ (compresión)$$

$$\overline{F}_{(23)} = \frac{2EA}{5}\left[3.4181 - (-7.0795)\right]\left(1\right)\cdot\frac{1}{EA} = 4.1990\ Tonf\ \ (tensión)$$

$$\overline{F}_{(34)} = \frac{2EA}{5}\left[0 - (-2.0023)\right]\left(-1\right)\cdot\frac{1}{EA} = -0.8009\ Tonf\ \ (compresión)$$

$$\overline{F}_{(14)} = 0$$

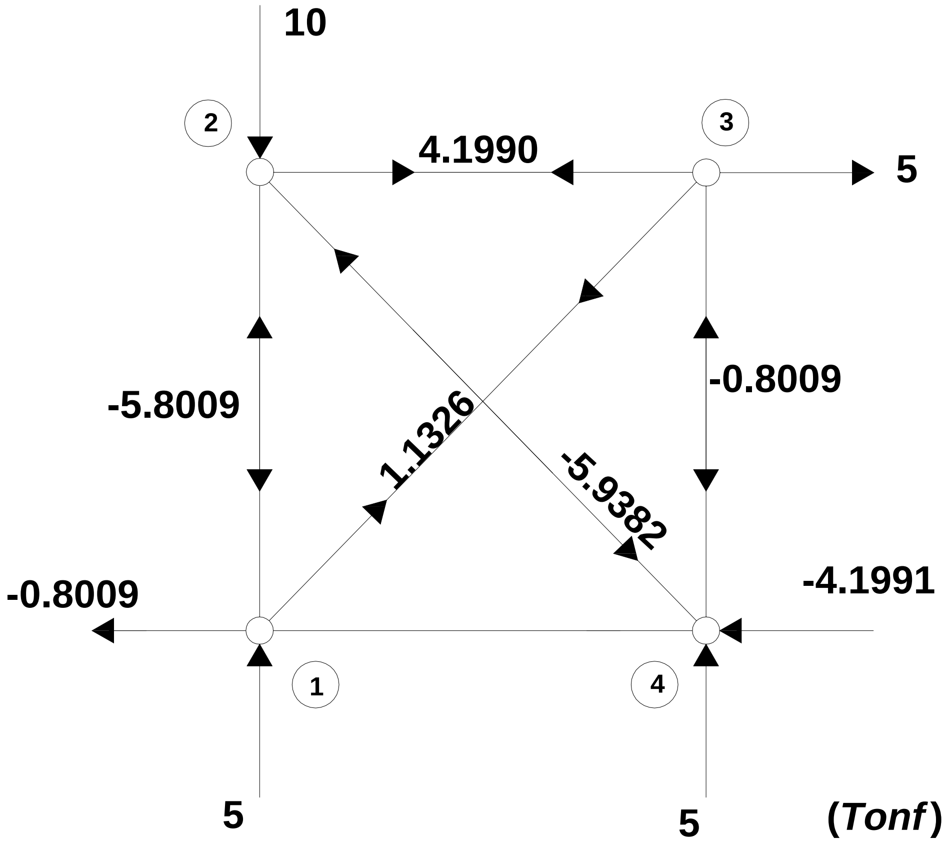
$$\overline{F}_{(13)} = \frac{8EA}{7.0711}\left[3.4181\right]\left(0.7071\right) + \left[-2.0023\right]\left(0.7071\right)\cdot\frac{1}{EA} = 1.1326\ Tonf\ \ (tensión)$$

$$\overline{F}_{(24)} = \frac{8EA}{7.0711}\left[0 - (-7.0795)\right]\left(0.70711\right) + \left[0 - (-14.5023)\right]\left(-0.70711\right)\cdot\frac{1}{EA} =$$

$$= -5.9382\ Tonf\ \ (Compresión)$$

Resumen:

$$\boxed{\begin{aligned}
&\overline{F}_{(12)} = -5.8009\ Tonf\ \ (Compresión)\\
&\overline{F}_{(23)} = 4.1990\ Tonf\ \ (Tensión)\\
&\overline{F}_{(34)} = -0.8009\ Tonf\ \ (Compresión)\\
&\overline{F}_{(14)} = 0\\
&\overline{F}_{(13)} = 1.1326\ Tonf\ \ (Tensión)\\
&\overline{F}_{(24)} = -5.9382\ Tonf\ \ (Compresión)
\end{aligned}}$$



10
2
3
4.1990
5
-5.8009
-0.8009
1.1326
-5.9382
-0.8009
-4.1991
1
4
5
5
(*Tonf*)